Politechnika Lubelska
Katedra Podstaw Konstrukcji Maszyn i Mechatroniki

Teoria maszyn i mechanizmów (TMM)

Wykład 4

Podstawowe informacje o analizie dynamicznej. Wstęp do wybranych zagadnień dynamiki - dobór silnika

Lublin 2022

Łukasz Jedliński

Podstawowe informacje

W **analizie dynamicznej** rozpatrywany jest ruch mechanizmu z udziałem sił. Opis zachowania się układu mechanicznego opiera się głównie na prawach Newtona w szczególności drugim wyrażonym równaniem $\vec{F} = m\vec{a}$. Wyróżnia się dwa podstawowe zadania dynamiki:

- ustalenie ruchu (przyspieszenia, prędkości i przemieszczenia) przy znanym obciążeniu zewnętrznym (proste zadanie dynamiki ang. forward dynamics problem). Dane siła F i masa m a szukane przyspieszenie a,
- ustalenie obciążenia zewnętrznego do realizacji znanego ruchu (odwrotne zadanie dynamiki ang. inverse dynamics problem). Dane przyspieszenie a i masa m a szukana siła F,

Inne rozpatrywane zagadnienia to:

- wyznaczenie reakcji w parach kinematycznych,
- wyważanie,
- określenie sprawności mechanizmu,
- dobór koła zamachowego,
- analiza drgań maszyn i mechanizmów.

Podstawowe informacje

Uproszczenie analizy można uzyskać stosując zasadę d’Alemberta, polegającą na sprowadzeniu problemu dynamicznego do zagadnienia rozwiązywanego metodami statyki. W równaniu sił (lub momentów) uwzględnia się siły (lub momenty) bezwładności oprócz pozostałych sił (lub momentów) zewnętrznych. Ponieważ problem dynamiczny rozwiązuje się jak statyczny, ten rodzaj analizy jest określany jako **analiza kinetostatyczna**.

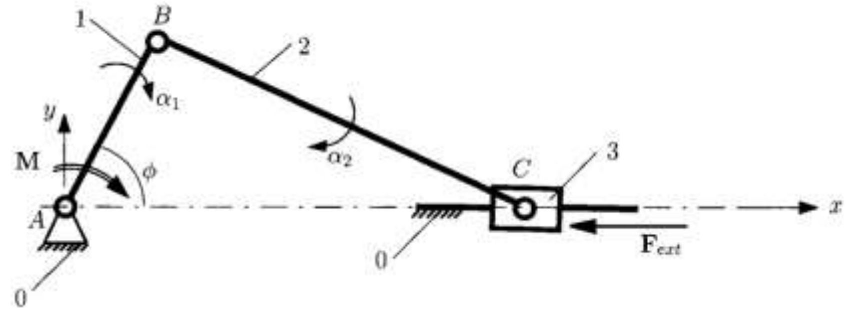
Analiza statyczna również jest wykonywana do wyznaczenia siły lub momentu równoważącego czy sił reakcji.

Podstawowe informacje

Podział sił

Siły zewnętrzne

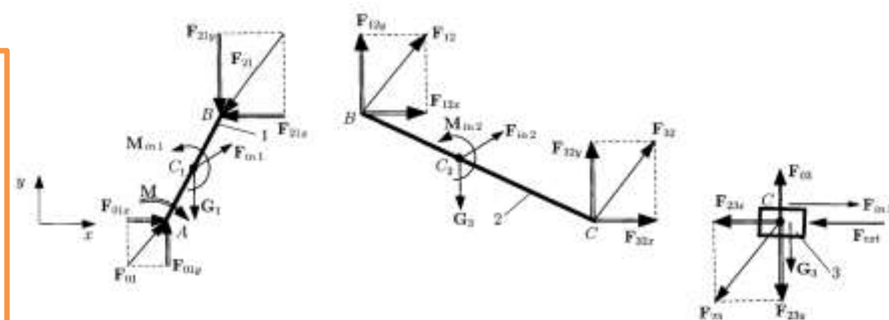
- siły czynne (np. pochodzące od silnika),
- siły bierne (np. od oporów technologicznych)
- bezwładności (ruch zmienny, $\vec{v} \neq \mathrm{const.}$),
- ciężkości (oddziaływanie pola grawitacyjnego).



Rys. Mechanizm korbowy z siłami zewnętrznymi (siły reakcji w parach kinematycznych nie są zaznaczone) [Marghitu 2005]

Siły wewnętrzne

- Reakcje w parach kinematycznych*:
  - normalne (od nacisków),
  - styczne (od tarcia),
- Siły spójności występujące w materiale (np. w rozważanym przekroju poprzecznym) i służące do wyznaczania naprężeń (wytrzymałość materiałów, PKM).



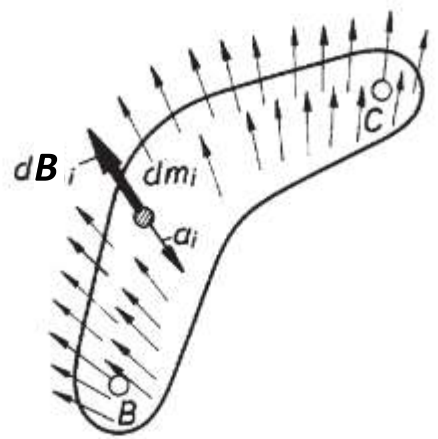
Rys. Schematy równowagi członów swobodnych mechanizmu korobwego (siły reakcji są traktowane jako zewnętrzne) [Marghitu 2005]

*_**Siły reakcji w parach kinematycznych**_ traktowane są jako _**wewnętrzne**_, gdy mechanizm analizowany jest całościowo łącznie z podstawą (przy zaniedbaniu tarcia).
W przypadku wydzielenia z mechanizmu członu lub członów poprzez uwolnienie od więzów w postaci schematu równowagi ciała swobodnego (ang. free body diagram) siły te traktowane są jako _**zewnętrzne.**_

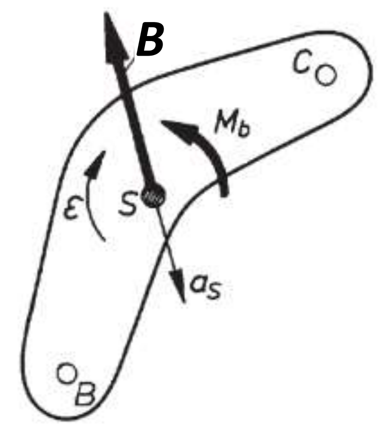
Podstawowe informacje

Siły bezwładności

Zmiana prędkości rozumiana jako zmiana jej wartości lub kierunku oznacza występowanie przyspieszenia a więc i sił bezwładności. Człony mają masę rozłożoną w sposób ciągły, dlatego siły bezwładności elementarnych mas tworzą ciągłe pole sił. Ciągłe pole sił można zastąpić siłą wypadkową. W przypadku dokładnego wyznaczania naprężeń może to być zbyt daleko idące uproszczenie.



Rys. Ciągłe pole sił bezwładności elementarnych mas [Miller 1996]



Rys. Zastąpienie ciągłego pola sił siłą B i momentem bezwładności M_b [Miller 1996]

Siła bezwładności B obliczana jest na podstawie II zasady dynamiki Newtona i ma przeciwny zwrot w stosunku do wypadkowej siły powodującej zmianę przyspieszenia:

$$\vec{B} = -m\vec{a}_s$$

Podobnie na podstawie tej zasady można sformułować moment bezwładności M_b

$$\vec{M}_b = -I_s\vec{\varepsilon}$$

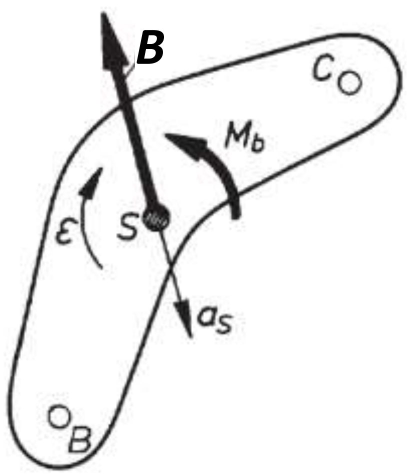
Siły bezwładności

Moment bezwładności M_b i siła bezwładności B (rys. 1) mogą być zastąpione jedną siłą bezwładności B_G (rys. 2 b). W tym celu moment bezwładności M_b zamieniany jest na parę sił B_G (rys. 2 a). Wartość momentu pary sił jest równoważny zastępowanemu momentowi, a wartość siły równa jest sile bezwładności *B*, co można zapisać:

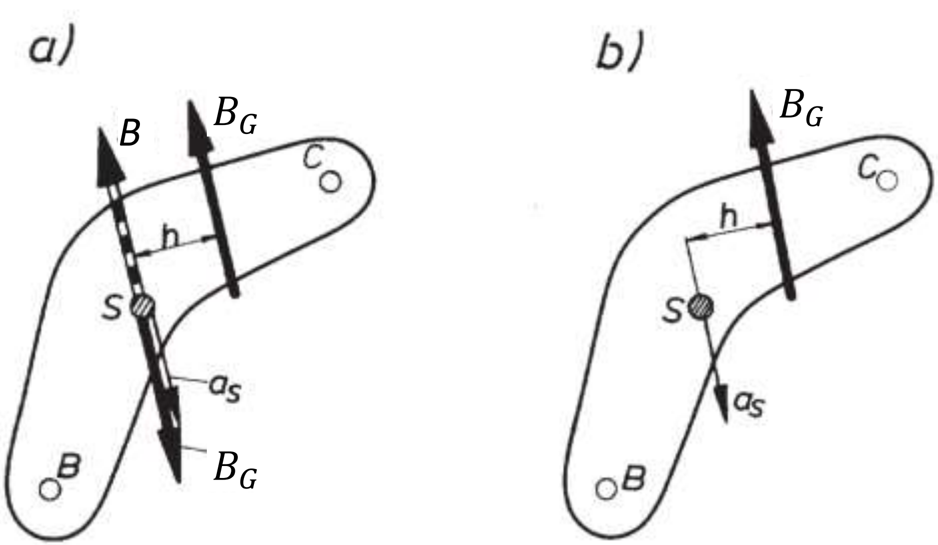
$$M_b = B_G h$$
$$B_G = B = -ma_s$$

Dla tak ustalonych założeń i wykorzystaniu właściwości pary sił następuje redukcja sił *B* i B_G działających na wspólnym kierunku. Pozostaje jedynie siła B_G w odległości *h* od środka ciężkości *S*.

$$h = \frac{M_b}{B_G} = \frac{I_s \varepsilon}{ma_s}$$



Rys. 1. Ciało swobodne pod działaniem siły i momentu bezwładności [Miller 1996]

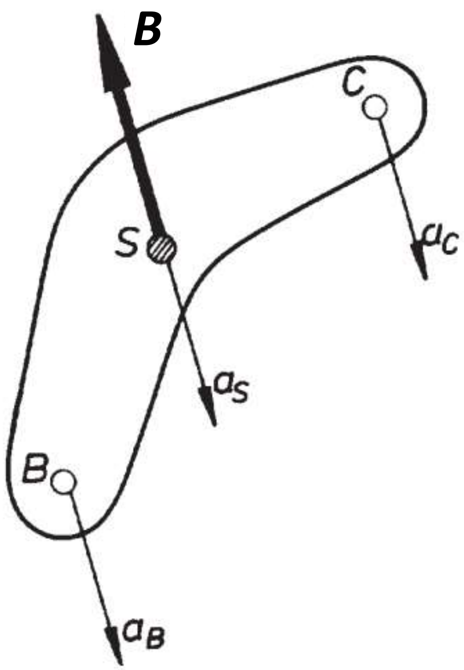


Rys. 2. Redukcja siły i momentu bezwładności do jednej siły wypadkowej: *a*) zastąpienie momentu bezwładności M_b parą sił $B_G \cdot h$, *b*) wypadkowa siła bezwładności B_G w odległości *h* od środka ciężkości *S* [Miller 1996]

Siły bezwładności w szczególnych przypadkach ruchu

Ruch postępowy

W ruchu postępowym każdy punkt członu ma takie samo przyspieszenie. Wypadkowa siła bezwładności *B* jest przyłożona do środka masy *S*, ma kierunek zgodny z przyspieszeniem *a* lecz jej zwrot jest przeciwny. Wypadkowa sił zewnętrznych i sił bezwładności zawsze leżą na wspólnym kierunku przechodzącym przez środek ciężkości.



Rys. Siła bezwładności w ruchu postępowym [Miller 1996]

$$\vec{B} = -m\vec{a}_s$$

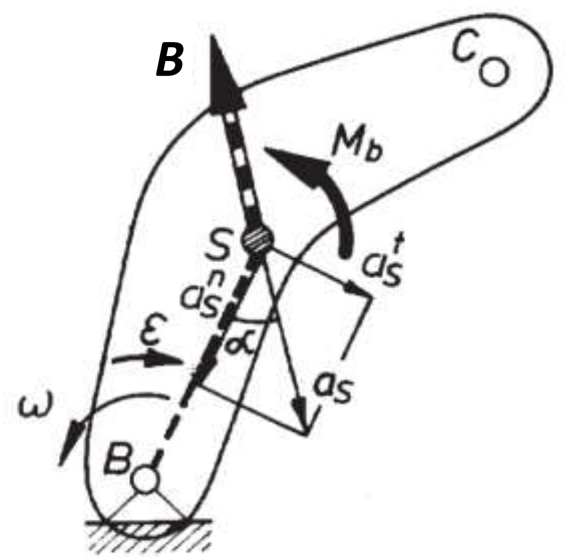
Podstawowe informacje

Siły bezwładności w szczególnych przypadkach ruchu

Ruch obrotowy

W ruchu obrotowym, w ogólnym przypadku, środek masy nie pokrywa się z osią obrotu. Występują siła bezwładności *B* i moment bezwładności M_b $(\varepsilon \neq 0)$. Wypadkowa siła bezwładności $\vec{B} = -m\vec{a}_s$ jest przyłożona do środka masy *S*. Moment bezwładności $\vec{M}_b = -I_s\vec{\varepsilon}$ obliczany jest na podstawie masowego osiowego momentu bezwładności I_s, którego oś przechodzi przez środek masy *S* i jest równoległa do osi obrotu.

$$\vec{B} = -m\vec{a}_s \qquad \vec{M}_b = -I_s\vec{\varepsilon}$$



Rys. Siła i moment bezwładności w ruchu obrotowym [Miller 1996]

Sumując momenty względem bieguna *B* otrzymuje się równanie

$$\sum_i M_{iB} = I_s\varepsilon + |BS|ma_s^t = I_s\varepsilon + |BS|m|BS|\varepsilon = \underbrace{(I_s + |BS|^2 m)}_{\text{twierdzenie Steinera}}\varepsilon = I_B\varepsilon$$

czyli

$$M_z = I_B\varepsilon$$

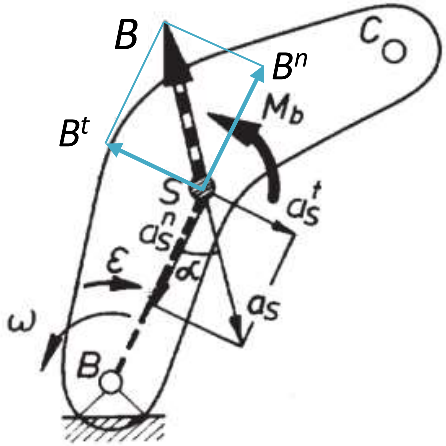
Równanie to można również otrzymać na podstawie twierdzenia o kręcie i określane jest jako ***dynamiczne równanie ruchu obrotowego*** [Leyko 2012]. Suma momentów wszystkich sił zewnętrznych M_z względem osi obrotu jest równa iloczynowi masowego momentu bezwładności I_B względem osi obrotu i przyspieszenia kątowego ε.

Podstawowe informacje

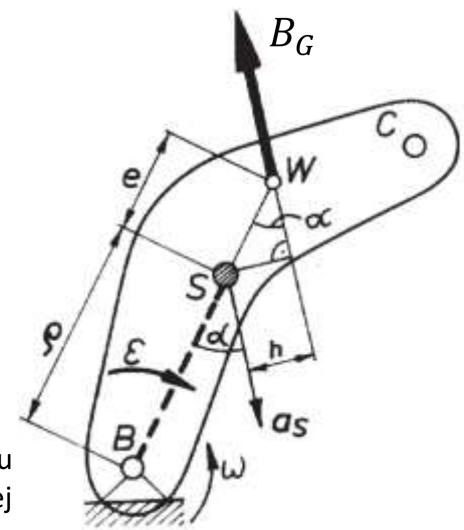
Siły bezwładności w szczególnych przypadkach ruchu

Ruch obrotowy

Siłę i moment bezwładności można zastąpić jedną wypadkową siłą bezwładności podobnie jak to zostało przeprowadzone dla ciała swobodnego. Kierunek wypadkowej siły B_G przecina się z kierunkiem *BS* w punkcie *W* (rys. 2). Pamiętając, że $B_G = B$ i o równoległości kierunków działania sił należy zauważyć, że ich składowe normalna (odśrodkowa) i styczna sił są sobie równe. Kierunek siły normalnej przechodzi przez środek obrotu, a wiec nie ma wpływu na moment wyznaczany względem niego. Z tego wynika, że uwzględnienie momentu bezwładności M_b, który jest zawsze sumowany z momentem od siły stycznej B^t, odbywa się poprzez zwiększenie odległości od środka obrotu. Dlatego odległość $|BW|$ jest zawsze większa od $|BS|$ (dla $\varepsilon = 0, |BW| = |BS|$).



Rys. 1. Siła i moment bezwładności w ruchu obrotowym [Miller 1996]



Rys. 2. Redukcja siły i momentu bezwładności do jednej siły wypadkowej w ruchu obrotowym [Miller 1996]

Siły bezwładności w szczególnych przypadkach ruchu

Ruch obrotowy

Wyznaczenie odległości $|BW|$ może być przeprowadzone w oparciu o równanie równowagi momentów względem środka obrotu - wypadkowej siły bezwładności oraz siły i momentu bezwładności:

$$\sum_i M_{iB} = I_s\varepsilon + |BS|ma_s^t = |BW|ma_s^t \quad \text{podstawiając } a_s^t = \varepsilon|BS|$$

$$I_s\varepsilon + |BS|^2 m\varepsilon = |BW||BS|m\varepsilon$$

$$|BW| = \frac{I_s}{|BS|m} + |BS| \quad \text{pamiętając, że } i_s^2 = \frac{I_s}{m}$$

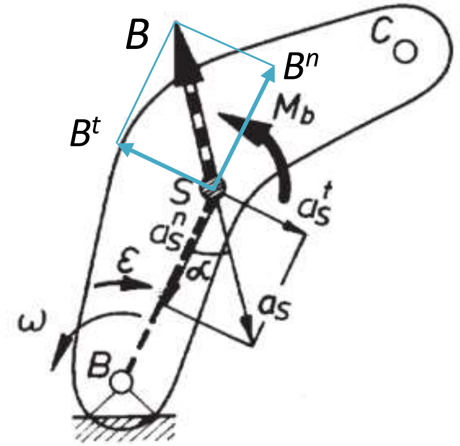
$$|BW| = \frac{i_s^2}{|BS|} + |BS|$$

i_s^2 - promień bezwładności

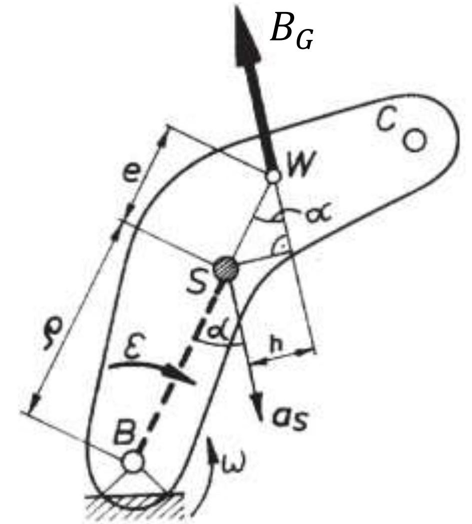
czyli zgodnie z wymiarami na rys. 2

$$|BW| = \rho + e = \frac{i_s^2}{\rho} + \rho$$

$$|SW| = e = \frac{i_s^2}{\rho}$$



Rys. 1. Siła i moment bezwładności w ruchu obrotowym [Miller 1996]



Rys. 2. Redukcja siły i momentu bezwładności do jednej siły wypadkowej w ruchu obrotowym [Miller 1996]

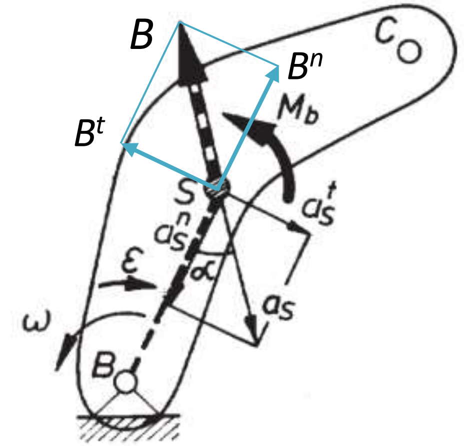
Podstawowe informacje

Siły bezwładności w szczególnych przypadkach ruchu

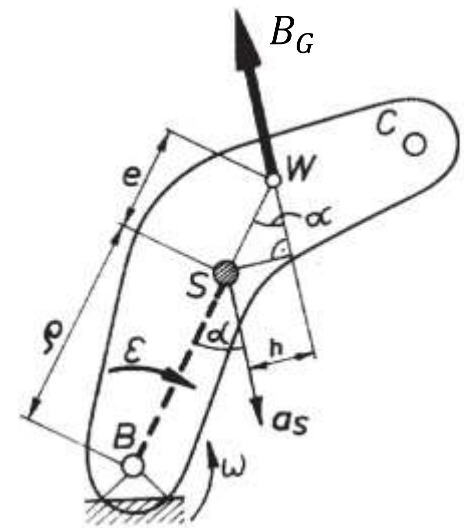
Ruch obrotowy

Wyznaczony punkt W jest określany jako ***punkt uderzeń***, ***wahnień*** lub ***środek wahań*** (ang. center of percussion). Przyłożona siła zewnętrzna, na kierunku prostopadłym do BW i przechodzącym przez punkt W, nie wywoła dodatkowej stycznej siły reakcji w punkcie obrotu. Jedyna siła reakcji będzie równoważyć siłę odśrodkową $B^n = -m|BS|\omega^2 = -ma_S^n$ wywołaną przyspieszeniem normalnym.

W praktyce znajomość położenia punktu wahnień może być stosowana w trakcie projektowania urządzeń do minimalizacji sił reakcji w łożyskach lub maksymalnym wykorzystaniu siły bezwładności, jeśli zadaniem członu obrotowego jest uderzenie w inny obiekt (np. młot Charpy'ego). Inne zastosowanie to projektowanie narzędzi ręcznych jak młotek lub sprzętu sportowego np. rakieta tenisowa czy kij bejsbolowy w celu redukcji drgań przenoszonych na rękę.



Rys. Siła i moment bezwładności w ruchu obrotowym [Miller 1996]



Rys. Redukcja siły i momentu bezwładności do jednej siły wypadkowej w ruchu obrotowym [Miller 1996]

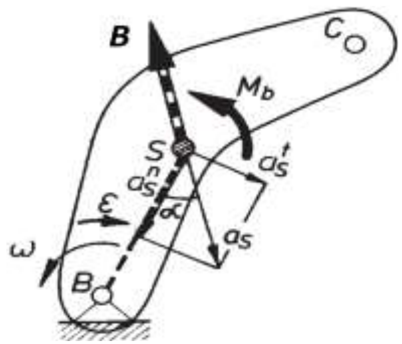
Podstawowe informacje

Siły bezwładności w szczególnych przypadkach ruchu

Ruch obrotowy

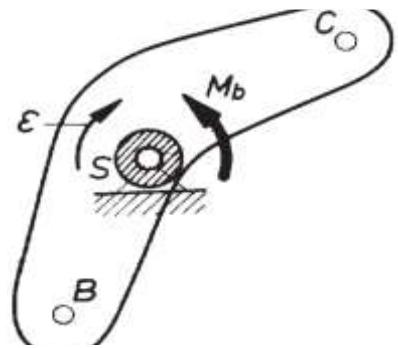
W ramach ruchu obrotowego można również wyodrębnić specyficzne warunki przemieszczania się członu.

Środek masy *S* nie pokrywa się z osią obrotu



1. Jeśli $\omega \neq 0, \varepsilon \neq 0$, występuje *B* i M_b.
2. Jeśli $\omega \neq 0, \varepsilon = 0$, występuje *B.*
3. Jeśli $\omega = 0, \varepsilon \neq 0$ (położenie zwrotne), występuje *B* i M_b.

Środek masy *S* pokrywa się z osią obrotu



1. Jeśli $\omega \neq 0, \varepsilon \neq 0$, występuje M_b.
2. Jeśli $\omega \neq 0, \varepsilon = 0$, brak jest sił i momentów bezwładności.
3. Jeśli $\omega = 0, \varepsilon \neq 0$ (położenie zwrotne), występuje M_b

W przypadku członu ***płaskiego*** i ruchu obrotowego, w którym środek masy pokrywa się z osią obrotu, występuje przypadek idealnego wyważenia. Dla stałej prędkości kątowej nie występują żadne wypadkowe siły i momenty bezwładności. Z punktu widzenia projektowania członu i wytrzymałości materiałów należy odrzucić uproszczenie o siłach wypadkowych i traktować siły bezwładności jako ciągłe pole sił działające na każdą cząstkę materiału. Po przekroczeniu odpowiednio dużej prędkości kątowej element ulegnie rozerwaniu na skutek istniejących (odśrodkowych) normalnych siły bezwładności.

Podstawowe informacje

Siły bezwładności w szczególnych przypadkach ruchu

Ruch płaski

W ruchu płaskim praktycznie zawsze występuje siła bezwładności B i moment bezwładności M_b, ponieważ (chwilowy) środek obrotu ma zmienne położenie najczęściej nie przechodzące przez środek masy, a przyspieszenie kątowe w trakcie ruchu mało kiedy jest równe zero.
Siła bezwładności dla członu 2, zgodnie z oznaczeniami na rysunku, jest równa:

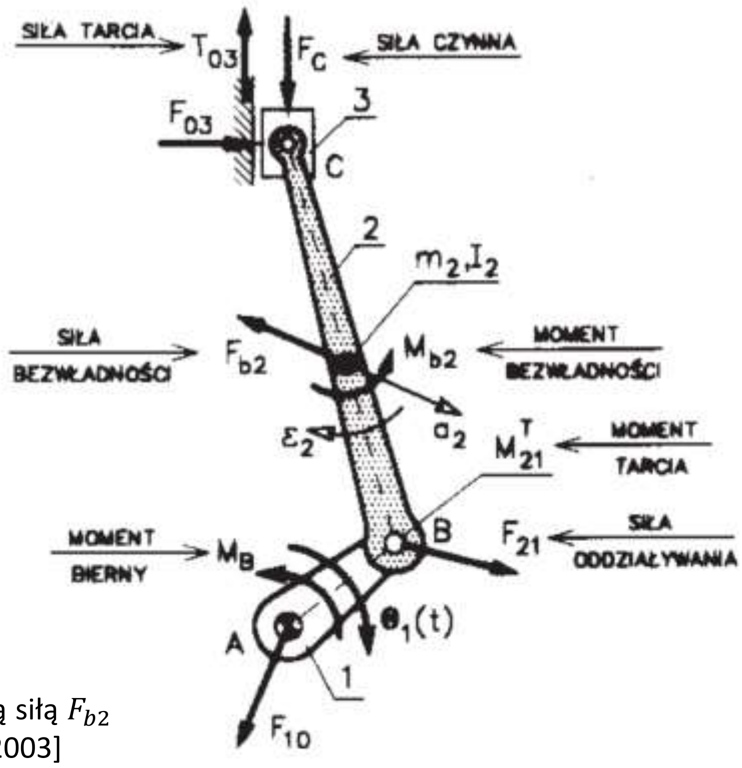
$$F_{b2} = -m_2 a_2$$

gdzie:
a_2 – przyspieszenie środka masy,
m_2 – masa korbowodu,

a moment bezwładności wynosi

$$M_{b2} = -I_2 \varepsilon_2$$

gdzie:
ε_2 – przyspieszenie kątowe korbowodu,
I_2 – masowy moment bezwładności korbowodu względem środka masy.



Rys. Korbowód w ruchu płaskim z zaznaczoną siłą F_{b2} i momentem M_{b2} bezwładności [Gronowicz 2003]

Podstawowe informacje

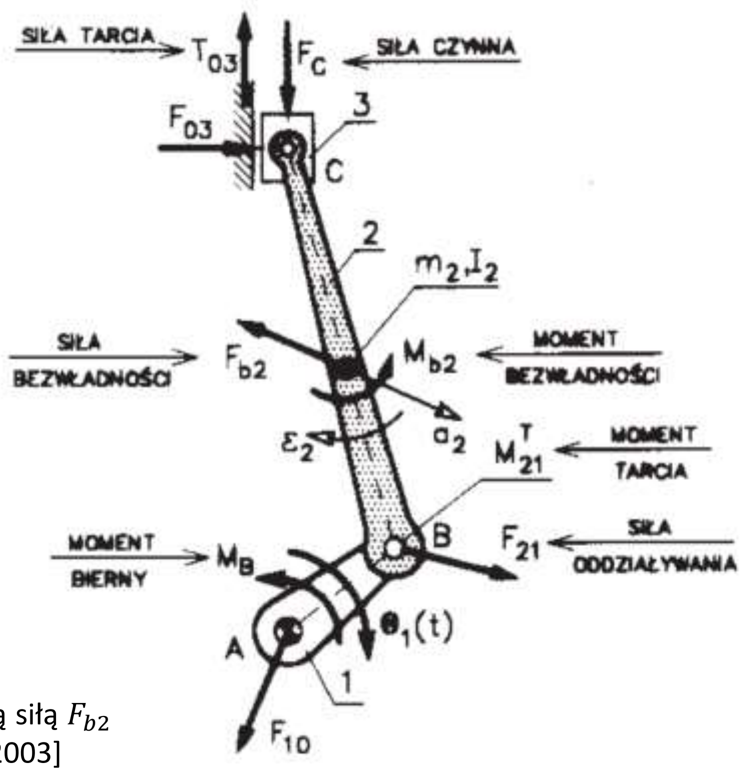
Siły bezwładności w szczególnych przypadkach ruchu

Ruch płaski

Siłę i moment bezwładności można wyrazić tylko poprzez moment bezwładności M_{bO2} określony względem chwilowego środka obrotu

$$M_{bO2} = -I_{O2}\varepsilon_2$$

gdzie:
ε_2 – przyspieszenie kątowe korbowodu,
I_{O2} – masowy moment bezwładności korbowodu względem chwilowego środka obrotu.



Rys. Korbowód w ruchu płaskim z zaznaczoną siłą F_{b2} i momentem M_{b2} bezwładności [Gronowicz 2003]

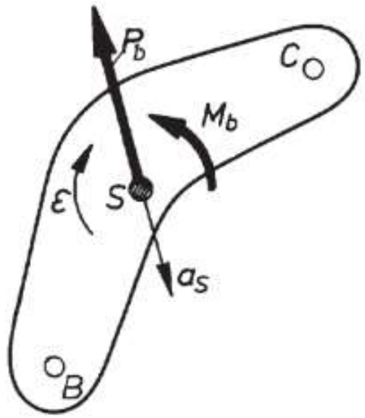
Zasada d’Alemberta

Siła bezwładności zwana również siłą d’Alemberta (lub fikcyjną) została pierwszy raz określona przez francuskiego fizyka i matematyka Jean le Rond d'Alembert. Zauważył on, że przenosząc iloczyn masy i przyspieszenia na stronę zewnętrznej siły wypadkowej otrzymuje się z II prawa Newtona równanie pozwalające na analizę dynamiczną mechanizmów metodami statycznymi (analiza kinetostatyczna). Suma wypadkowych sił zewnętrznej i bezwładności równa jest zero, co oznacza, że rozważany układ jest w równowadze - **zasada d’Alemberta**.
Przy znanym przyspieszeniu punktu członu sztywnego można wyznaczyć wypadkową sił zewnętrznych lub odwrotnie. W poniższych równaniach nie występują siły wewnętrzne, co ułatwia analizę dynamiczną mechanizmu.

$$\vec{F} - m\vec{a} = 0$$

$$\overrightarrow{M_b} - I\vec{\varepsilon} = 0$$

Pierwsze równanie wynika z przyspieszenia liniowego a drugie z przyspieszenia kątowego członu, w którym symbol *I* oznacza masowy moment bezwładności wyrażony w kg·m^2.



Rys. Zastąpienie ciągłego pola sił siłą i momentem bezwładności [Miller 1996]

Podstawowe informacje

Masowy moment bezwładności

Dla układu punktów materialnych osiowy ***masowy moment bezwładności*** I określony jest jako suma iloczynów poszczególnych mas m_i i kwadratów odległości r_i^2 od rozpatrywanej osi.

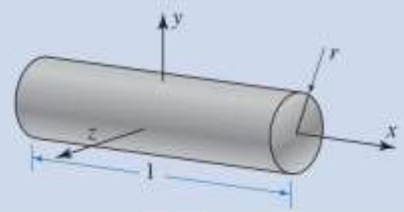
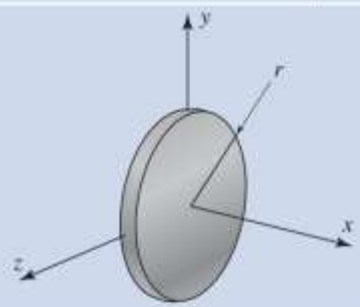
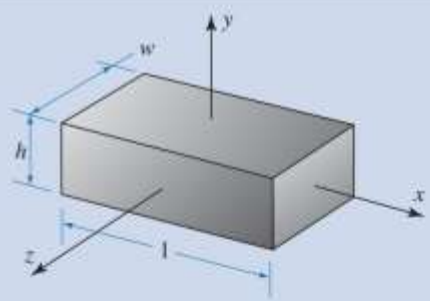
$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Obiekty rzeczywiste mają masę rozłożoną w sposób ciągły, dlatego masowe momenty bezwładności są wyrażone najczęściej w postaci całki

$$I = \int r^2 dm$$

Podstawowe informacje

Masowy moment bezwładności

Shape Name	Rendering	Mass Moment of Inertia
Cylinder		$I_x = \frac{1}{2}[mr^2]$ $I_y = \frac{1}{12}[m(3r^2 + l^2)]$ $I_z = \frac{1}{12}[m(3r^2 + l^2)]$
Slender rod		$I_x = 0$ $I_y = \frac{1}{12}[ml^2]$ $I_z = \frac{1}{12}[ml^2]$
Thin disk		$I_x = \frac{1}{2}[mr^2]$ $I_y = \frac{1}{4}[mr^2]$ $I_z = \frac{1}{4}[mr^2]$
Rectangular block		$I_x = \frac{1}{12}[m(w^2 + h^2)]$ $I_y = \frac{1}{12}[m(w^2 + l^2)]$ $I_z = \frac{1}{12}[m(h^2 + l^2)]$

Tab. Masowe momenty bezwładności dla obiektów o prostych kształtach, początek układu współrzędnych jest w środku masy [Myszka 2012]

Podstawowe informacje

Masowy moment bezwładności

Biegunowy masowy moment bezwładności I_o względem bieguna O równy jest połowie sumy osiowych momentów bezwładności:

$$I_o = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y + I_z\right)$$

Promień bezwładności i_x jest również stosowany do wyrażania masowego momentu bezwładności i jest równy iloczynowi kwadratu promienia bezwładności i masy:

$$I_x = i_x^2 m$$

stąd promień bezwładności wynosi

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}}$$

Promień bezwładności może być postrzegany jako odległości od osi, w której znajduje się całkowita masa obiektu. Masowy moment bezwładności obliczany na podstawie promienia bezwładności ma taką samą wartość jak rozpatrywanego ciała względem tej samej osi.

Podobnie masowy moment bezwładności może być określony jako iloczyn ***masy zredukowanej*** m_{red} i odległości od rozpatrywanej osi:

$$I_x = r^2 m_{red}$$

Interpretować to można jako poszukiwanie wartości skupionej masy, przy zadanej odległości od osi tak, aby moment bezwładności był równy momentowi bezwładność (względem tej samej osi) rozpatrywanego obiektu.

$$m_{red} = \frac{I_x}{r^2}$$

Podstawowe informacje

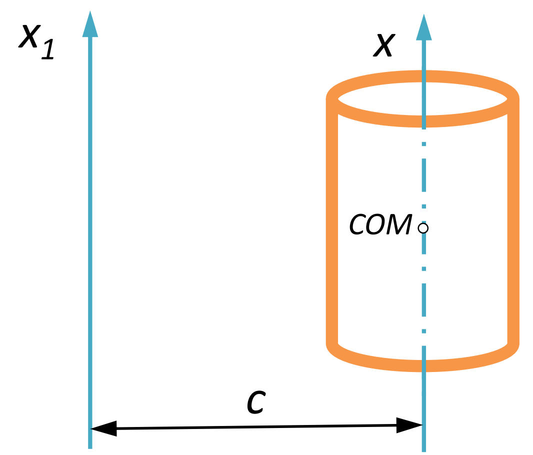
Masowy moment bezwładności

Osiowe masowe momenty bezwładności podane w tabeli dla typowych prostych kształtów odnoszą się dla przypadku, w którym osie przechodzą przez środek masy. W celu wyznaczenie osiowego masowego momentu bezwładności względem osi równoległej do osi względem której moment jest znany, można zastosować ***twierdzenie Steinera*** (ang. parallel axis theorem lub ang. Steiner's theorem):

$$I_{x1} = I_x + mc^2$$

I_{x1} - poszukiwany masowy moment bezwładności względem osi x_1 [kg·m^2],
I_{x1} - znany masowy moment bezwładności względem osi x [kg·m^2],
m – masa obiektu [kg],
c – odległość między równoległymi osiami [m].

Osiowe masowe momenty bezwładności obliczone względem tej samej osi mogą być dodawane i odejmowane.



Rys. Oś x przechodzi przez środek masy *COM* walca a oś x_1 jest do niej równoległa i odległa o c

Podstawowe informacje

Masowy moment bezwładności

Środek masy dla kształtów złożonych z prostych brył względem bieguna można wyznaczyć z zależności:

$$r_c = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}$$

a względem osi *x*

$$x_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

Dla obiektów o skomplikowanych kształtach masowy moment bezwładności i środek masy mogą być wyznaczone doświadczalnie albo poprzez zeskanowanie 3D lub wykonanie modelu bryłowego w programie typu CAD i odczytanie wartości obliczonych w sposób numeryczny.

Wstęp

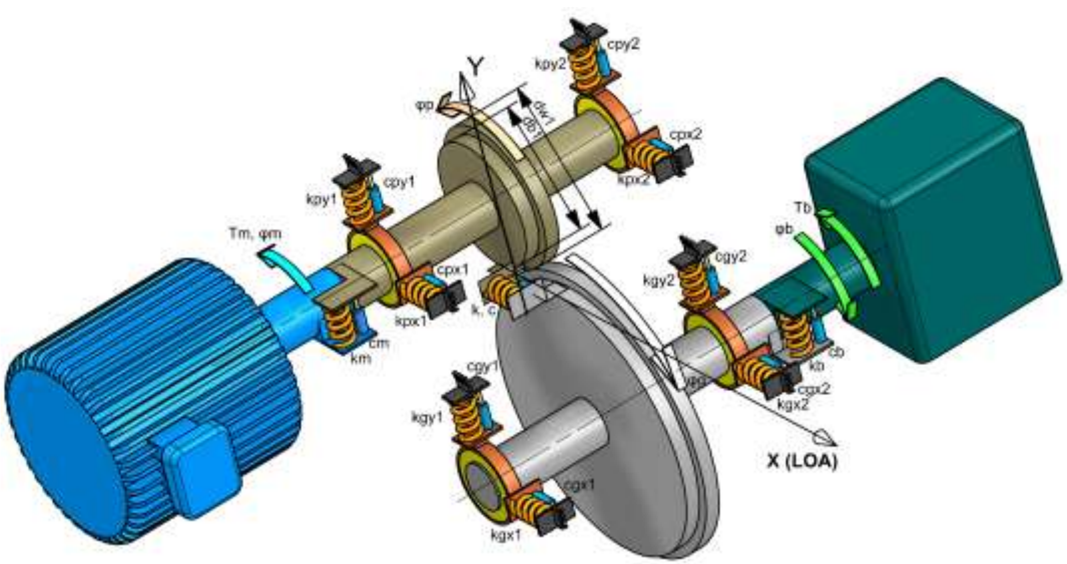
Modelowanie matematyczne to odwzorowanie zachowania rzeczywistych obiektów i zjawisk za pomocą zależności matematycznych. Celem modelowania jest zwiększenie wiedzy poprzez ***symulację*** - rozwiązanie modeli matematycznych w przedziale czasowym i prezentację wyników. Modele są zawsze uproszczeniem rzeczywistych obiektów i zachodzących zjawisk, niemniej umożliwiają sformułowanie podstawowych i szczegółowych wniosków o ich zachowaniu w różnych warunkach.
Podziału modeli matematycznych można dokonać ze względu na liczbę stopni swobody. Wyróżnia się ***modele ciągłe*** (o nieskończonej liczbie stopni swobody - DOF), ***dyskretne*** (o skończonej liczbie DOF) i ***dyskretno-ciągłe*** (model składa się z elementów ciągłych i dyskretnych). Modele matematyczne różnią się sposobem zapisu i dokładnością. Wyróżnia się modele analityczne, pół-analityczne, numeryczne i hybrydowe. ***Modele analityczne*** wyrażone są za pomocą równań mogących mieć rozwiązania dokładne i są zapisywane przez osobę tworzącą model. ***Modele numeryczne*** z założenia pozwalają na otrzymanie wyniku przybliżonego. Bardzo często tworzenie takich modeli odbywa się w dedykowanych programach, a sama postać wzorów nie jest znana (np. MES w typowych programach). ***Modele pół-analityczne*** zawierają głównie model analityczny, a część parametrów wyznaczana jest za pomocą równań dających wynik przybliżony. ***Modele hybrydowe*** to połączenie modeli analitycznych i numerycznych, gdzie część obiektów jest określona modelami analitycznymi a pozostałe obiekty modelami numerycznymi*.

*Podane definicje modeli analitycznych, numerycznych, pół-analitycznych i hybrydowych są propozycją autora, nie są więc powszechnie uznawane. Niestety autor nie dotarł do opracowań wyjaśniających te zagadnienia w sposób wystarczający. Powszechne użycie komputerów w całym procesie projektowania, w tym obliczeń, w pewnym stopniu zaciera różnice między modelami.

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

Wstęp

Modelowanie dynamiczne w TMM to odwzorowanie działania rzeczywistych maszyn i mechanizmów z uwzględnieniem sił za pomocą równań matematycznych.
Większość występujących modeli w TMM ma skończoną liczbę stopni swobody (modele dyskretne) i opisywane są za pomocą równań różniczkowy zwyczajnych w przeciwieństwie do modeli ciągłych reprezentowanych przez równania różniczkowe cząstkowe. Modele dyskretne (ang. lumped-parameter models) przedstawiają mechanizmy w postaci członów sztywnych o określonej liczbie stopni swobody. Masa członów skupiona jest w środku masy. Właściwości związane ze sztywnością i tłumieniem, występujące pomiędzy członami, reprezentowane są przez bezmasowe elementy sprężyste i tłumiące.
Modele dynamiczne maszyn i mechanizmów tworzone są na podstawie praw fizyki a w szczególności: praw Newtona, zasady zachowania energii i zasady zachowania pędu.



Rys. Wizualizacja modelu dyskretnego z członami sztywnymi o 12 stopniach swobody [Jedliński 2021]

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

Wstęp

Projektując produkt napędzany silnikiem inżynierowie stają przez zadaniem jego doboru. Typ silnika może być oczywisty lub narzucony, np. w dużych samochodach ciężarowych stosowane są obecnie silniki spalinowe o zapłonie samoczynnym, a w domowych kosiarkach do trawy silniki spalinowe o zapłonie iskrowym albo silniki elektryczne. W przypadku możliwości zastosowania różnych typów silnika wyboru należy dokonać poprzez sprawdzenie, który rodzaj najlepiej spełnia założenia projektowe. Można podać ***ogólne kryteria doboru typu silnika***:

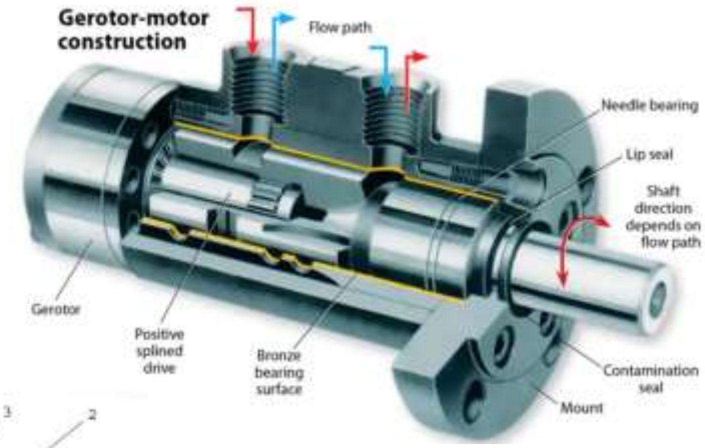
- rodzaj wymaganego ruch członu napędzającego: obrotowy albo postępowy, w jednym czy w obu kierunkach, precyzja przemieszczenia, występowanie momentu podtrzymującego blokującego przemieszczenie po zatrzymaniu,
- dostępność źródeł energii,
- wymagany moment obrotowy albo siła, prędkość obrotowa lub prędkość w ruchu postępowym,
- koszt zakupu i eksploatacji,
- trwałość i niezawodność działania i rozruchu,
- warunki pracy,
- tryb pracy – praca ciągła, przerywana lub dorywcza,
- praca przy stałej czy zmiennej prędkości obrotowej,
- rozruch pod obciążeniem czy bez obciążenia,
- masa silnika,
- ilość silników i konieczność synchronizacji ich pracy,
- wytwarzany przez silnik hałas, drgania i inne niepożądane procesy,
- możliwość odzysku energii w trakcie hamowania,
- sprawności itd.

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

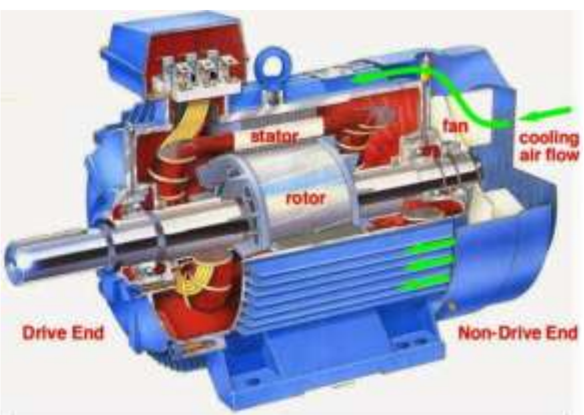
Wstęp

Podział silników najczęściej stosowanych w maszynach i mechanizmach:

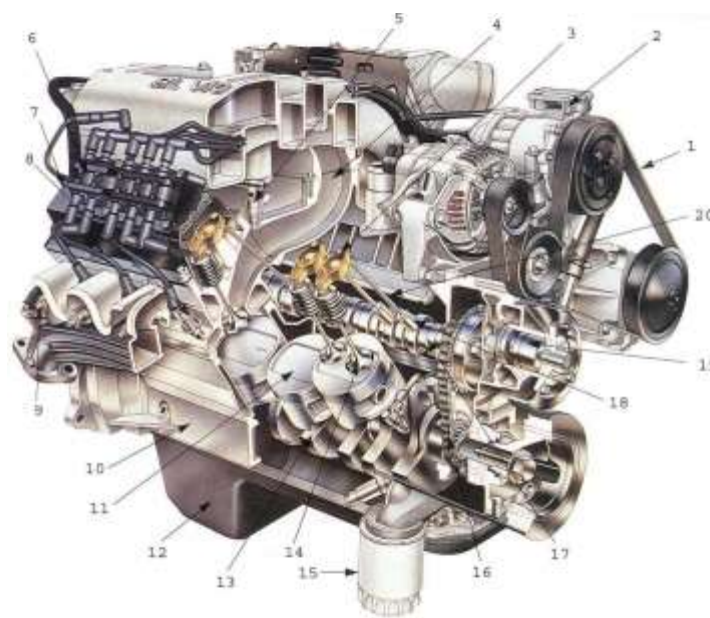
- elektryczne,
- cieplne,
- hydrauliczne,
- pneumatyczne.



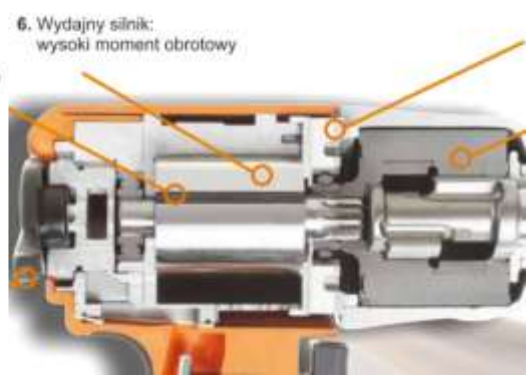
Rys. Silnik hydrauliczny [https://www.hjhydraulic.com/hydraulic_motor_usage_guide.html]



Rys. Silnik elektryczny [https://www.quora.com/What-is-the-importance-of-an-electric-motor]



Rys. Silnik cieplny - spalinowy [http://motoloverz.blogspot.com/2012/10/how-does-ice-internal-combustion-engine_10.html]



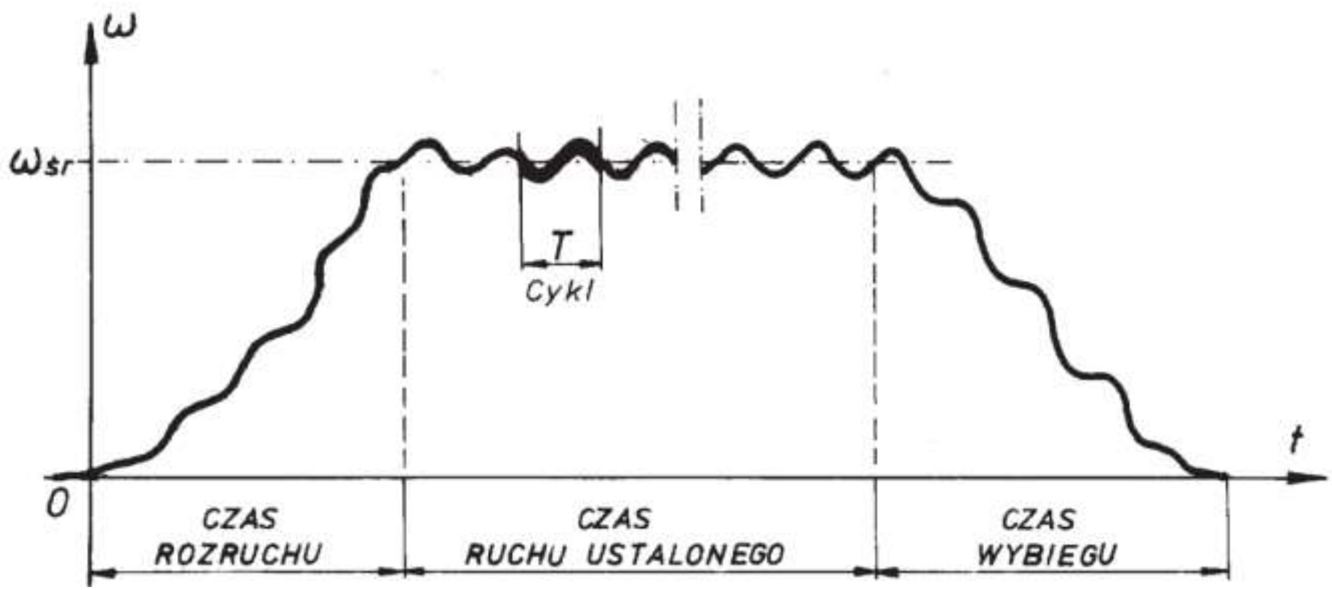
Rys. Silnik pneumatyczny [hhttps://delmet.pl/klucze-pneumatyczne/999982107-klucz-udarowy-pneumatyczny-dwukierunkowy-12-beta-1927p-8014230717920.html]

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

Wstęp

W ramach przedstawionych kategorii można dokonać dalszego podziału np. silniki elektryczne dzielą się na prądu stałego i przemiennego, a te z kolei na kolejne rodzaje w zależności od kryterium podziału. Liczba rodzajów silników jest wiec duża i każda grupa odznacza się charakterystycznymi właściwościami. Prawidłowy dobór silnika wymaga dobrej znajomości właściwości silników, urządzeń napędzanych i pozostałych czynników oddziaływujących na nie.
W pracy maszyny można wyodrębnić trzy charakterystyczne etapy:

- rozruchu – czas od włączenia silnika do osiągnięcia zadanej prędkości,
- pracy – etap w którym prędkość ma wartość zadaną,
- wybiegu – okres od momentu rozpoczęcia procesu zatrzymania do ustania ruchu.

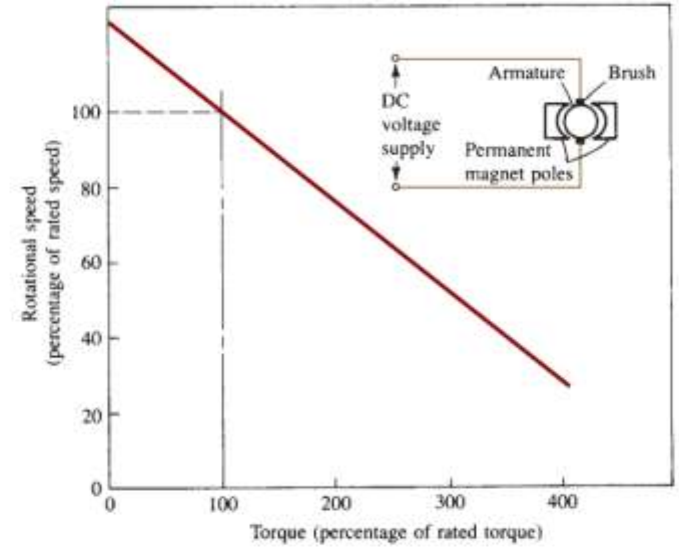


Rys. Etapy ruchu maszyny [Miller 1996]

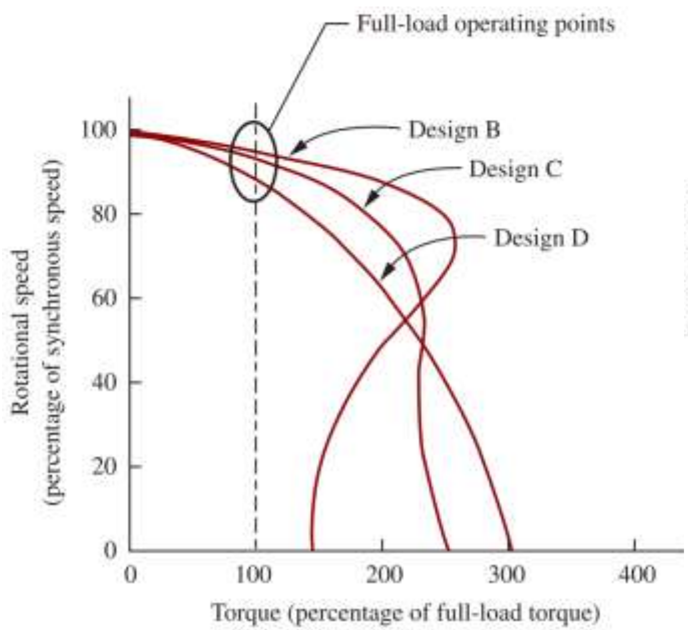
Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

Wstęp

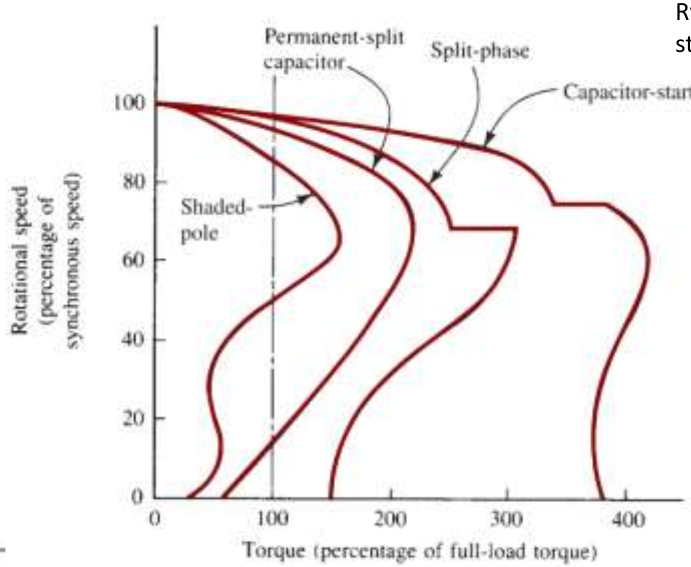
Pełna analiza dynamiczna wymaga badania maszyn w trzech etapach dla różnych warunków. Możliwa jest analiza doświadczalna dla istniejącego urządzenia lub teoretyczna. Do analizy teoretycznej wymagana jest znajomość wielkości charakterystycznych mających wpływ na dynamikę urządzenia i silnika. Najważniejszą charakterystyką silnika jest zależność pomiędzy prędkością obrotową a momentem napędowym albo prędkością przemieszczenia a siłą.



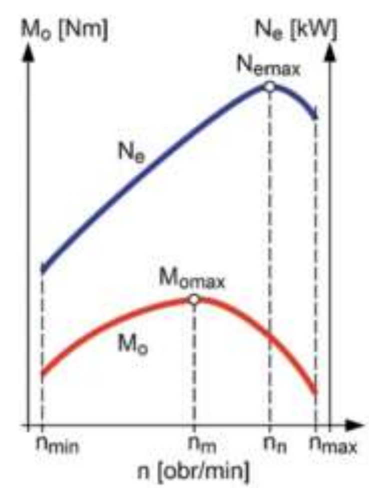
Rys. Przykładowa charakterystyka silnika prądu stałego z magnesami trwałymi [Mott 2018]



Rys. Przykładowe charakterystyki silnika asynchronicznego 3 fazowego klatkowego dla trzech rozwiązań konstrukcyjnych B, C, D zgodnie z NEMA (USA) [Mott 2018]



Rys. Przykładowe charakterystyki silników 1 fazowych prądu przemiennego [Mott 2018]



Rys. Przykładowa charakterystyka silnika spalinowego [https://warsztat.pl/artykuly/moment-obrotowy-i-moc-silnika-a-jego-obciazenie-2,56464]

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

Wstęp

Trzy etapy pracy urządzenia zostaną krótko omówione z perspektywy analizy dynamicznej.

Etap rozruchu

Włączenie silnika może odbyć się pod obciążeniem lub bez obciążenia. Jest to o tyle istotne, że niektóre typy silników mają zerowy moment rozruchowy (np. silnik spalinowy i teoretycznie silnik elektryczny synchroniczny) albo znacznie mniejszy niż nominalny moment obrotowy. Wynika z tego, iż niezbędnym minimum przy rozruchu z obciążeniem jest sprawdzenie czy moment rozruchowy silnika jest większy od momentu oporów maszyny. Celem analizy dynamicznej może być sprawdzenie czasu rozruchu przy znanym obciążeniu i momencie napędowym lub ustalenie wartości momentu napędowego aby rozruch trwał określony czas. Na przykładzie silników elektrycznych należy zaznaczyć, że charakterystyka silnika może zostać zmieniona np. poprzez zastosowanie urządzeń takich jak soft start czy przemiennik częstotliwości, a zmiany te powinny być uwzględnione w analizie.

Etap pracy

W trakcie pracy przy zadanej stałej prędkości obrotowej silnika mogą występować jej nieduże zmiany. Przyczyną może być zmienne obciążenie lub sposób działania silnika (np. spalinowego, krokowego). Celem analizy dynamicznej jest ocena nierównomierność biegu maszyny i ogólne badanie zachowania się w zmiennych warunkach w trakcie pracy. Minimalizacja nierównomierności biegu może być osiągnięta poprzez np.: dobór koła zamachowego, dobór silnika o korzystniejszej charakterystyce, wyważenie mechanizmu dźwigniowego jeśli taka czynność nie została wykonana, zastosowanie tłumika drgań, zastosowanie sprzęgła o innej charakterystyce czy wykonanie zmian konstrukcyjnych urządzenia.

Etap wybiegu

Analiza dynamiczna w tym etapie dotyczy głównie sprawdzenia czasu potrzebnego do zatrzymania przy zadanym momencie hamującym lub odwrotnie. W celu skrócenia czasu zatrzymania stosowane są hamulce lub można poprzez odpowiednie sterowanie hamować silnikiem jeśli jest to możliwe (np. silnik asynchroniczny może pracować w trybie prądnicowym, a wytworzona energia może być przekazana do sieci energetycznej).

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

Omówione zostaną wybrane aspekty doboru silnika w sposób uproszczony na przykładzie silnika o ruchu obrotowym.

1. Rozruch bez obciążenia

1.1. Stały moment obciążający w trakcie pracy

1.2. Zmienny moment obciążający w trakcie pracy

2. Rozruch pod obciążeniem

2.1. Stały moment obciążający przy rozruchu i w trakcie pracy

2.2. Zmienny moment obciążający i prędkość obrotowa w trakcie pracy

***3. Wybieg* (hamowanie)**

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

1. Rozruch bez obciążenia

1.1. Stały moment obciążający w trakcie pracy

Jest to najprostszy przypadek (teoretyczny). Ograniczając do minimum analizę wystarczy dobrać silnik o określonej prędkości obrotowej, którego moment obrotowy (czynny) jest wyższy od momentu obciążającego (biernego)*.

Producenci najczęściej podają moc P silnika i prędkość nominalną, a wynikiem obliczeń projektowych są najczęściej moment lub siła, dlatego należy wyznaczyć potrzebną moc w celu doboru silnika.

Moc w ruchu obrotowym

$$P = \frac{Mn}{9554{,}14}$$

gdzie:
P – moc w kW,
M – moment obrotowy w Nm,
n – prędkość obrotowa w obr/min.

$$P = M\omega$$

gdzie:
P – moc w W,
M – moment obrotowy w Nm,
ω – prędkość kątowa w rad/s.

Moc w ruchu postępowym

$$P = Fv$$

gdzie:
P – moc w W, F – siła w N, v – prędkość liniowa w m/s.

*Wymagana prędkość obrotowa wału wejściowego urządzenia może być inna niż silnika i w zależności od rodzaju urządzenia oraz typu silnika różne są metody jej dostosowania. Podobnie jest z określeniem o ile większy powinien być moment obrotowy od obciążającego. Jest to uzależnione od stopnia pewności informacji o momencie obciążającym, występujących potencjalnych przeciążeniach, odpowiedzialności i funkcji urządzenia, zakładanej sprawności (np. silniki elektryczne osiągają najwyższą sprawność najczęściej przy maksymalnym obciążeniu), dostępnych typoszeregów mocy silnika, itd.

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

1. Rozruch bez obciążenia

1.2. Zmienny moment obciążający w trakcie pracy

Podobnie jak w poprzednim przypadku niezbędne jest sprawdzenie czy moment obrotowy jest większy od momentu obciążającego w wymaganym zakresie prędkości obrotowej. Dokładniejsza analiza wymaga budowy modelu dynamicznego i symulacji.

2. Rozruch z obciążeniem

2.1. Stały moment obciążający przy rozruchu i w trakcie pracy

Uproszczony przypadek doboru silnika pracującego przy stałym obciążeniu został już omówiony w punkcie 1.1. Podobnie jest w trakcie rozruchu, moment obciążający (bierny) musi być mniejszy od momentu obrotowego (czynnego) silnika. Czas rozruchu nie powinien trwać zbyt długo z dwóch podstawowych powodów. Dąży się do tego aby czas od włączenia maszyny do możliwości wykonania przez nią pracy był jak najmniejszy, ponieważ jest to uzasadnione z ekonomicznego punku widzenia i oczekiwań klientów. Po drugie, nie wszystkie typy silników mogą pracować z pełnym obciążeniem przy niewielkiej prędkości obrotowej w stosunku do nominalnej przez dłuższy okres czasu. Dotyczy to np. silników elektrycznych asynchronicznych indukcyjnych bez dodatkowego chłodzenia, gdyż grozi to ich przegrzaniem się i w konsekwencji uszkodzeniem.

Określenie czasu rozruchu i wymaganego momentu obrotowego

Moment obciążający w trakcie rozruchu najczęściej pochodzi tylko od momentu bezwładności członów maszyny. Zakładając jego stałą wartość jak i stałą wartość momentu obrotowego silnika w zakresie od 0 do prędkości nominalnej (w rzeczywistości nie występuje silnik o takiej charakterystyce) można wyznaczyć czas rozruchu z drugiego prawa Newtona. Przedstawione założenia upraszczają analizę rozruchu rzeczywistego.

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

2. Rozruch z obciążeniem

2.1. Stały moment obciążający przy rozruchu i w trakcie pracy

Określenie czasu rozruchu i wymaganego momentu obrotowego

Drugie prawo Newtona dla ruchu obrotowego ma postać $M = I\varepsilon$ i można je zapisać jako $M = I\frac{d\omega}{dt}$.

gdzie:
$M = M_s - M_b > 0$ – moment całkowity (wypadkowy), M_s - moment obrotowy, M_b - moment bierny (obciążający) – w Nm,
I – masowy moment bezwładności członów urządzenia w kgm^2,
ε – przyspieszeni kątowe w rad/s^2,
ω– prędkość kątowa w rad/s,
t – czas w s.

Ponieważ założono, że M = const. i I = const. przyspieszenie kątowe również ma stałą wartość, a wiec pochodną można zastąpić przyrostem i wzór zapisać w postaci $M = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$,

gdzie:
$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ – przyrost prędkości kątowej, $\omega_1 = 0$ – prędkość początkowa, ω_2 – prędkość nominalna silnika,
$\Delta t = t_2 - t_1$ – przyrost czasu, $t_1 = 0$ – czas początkowy, t_2 – czas końcowy,

Po wprowadzeniu wartości początkowych możliwe jest zapisanie ostatecznych zależności

$M = I\frac{\omega_2}{t_2}$ - wymagany moment całkowity do rozruchu urządzenia w określonym czasie t_2,
$t_2 = I\frac{\omega_2}{M}$ - czasu potrzebny do rozruchu urządzenia przy stałym momencie całkowitym *M,*

a dla rozruchu bez obciążenia: $M_s = I\frac{\omega_2}{t_2}$ oraz $t_2 = I\frac{\omega_2}{M_s}$

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

2. Rozruch z obciążeniem

2.1. Stały moment obciążający przy rozruchu i w trakcie pracy

Określenie czasu rozruchu i wymaganego momentu obrotowego

Drugie prawo Newtona dla ruchu postępowego ma postać $F = ma$ i po przekształceniach analogicznych do poprzednich otrzymano zależności:

$F = m\frac{v_2}{t_2}$ - wymagana siła całkowita do rozruchu urządzenia w określonym czasie t_2,

$t_2 = m\frac{v_2}{F}$ - czas potrzebny do rozruchu urządzenia przy stałej sile całkowitej F,

a dla rozruchu bez obciążenia: $F_s = m\frac{v_2}{t_2}$ oraz $t_2 = m\frac{v_2}{F_s}$

Dokładniejsza analiza wymaga budowy modelu dynamicznego i symulacji.

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

2. Rozruch z obciążeniem

2.2. Zmienny moment obciążający i prędkość obrotowa pracy

Uproszczony przypadek doboru silnika pracującego przy zmiennym obciążeniu w trakcie pracy został już omówiony w punkcie 1.2. Dokładniejsza analiza wymaga budowy modelu dynamicznego i symulacji.

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

3. Wybieg (hamowanie)

Zmniejszenie prędkości następuje w wyniku działania oporów towarzyszących działaniu urządzenia lub w sposób wymuszony. Opory, powszechnie występujące w maszynach, to przede wszystkim opory tarcia i opory płynów (aero i hydrodynamiczne). Na ogół dąży się do tego, aby etap wybiegu trwał możliwie krótko podobnie jak i etap rozruchu. Generalnie zwiększa to bezpieczeństwo i zmniejsza czas, w którym urządzenie nie jest dostępne dla użytkownika, a w niektórych typach maszyn wymagane jest szybkie lub awaryjne zatrzymanie. Wymuszenie zatrzymania w krótkim czasie realizowane jest poprzez zastosowanie dodatkowego hamulca lub hamowanie silnikiem.

Korzystając z wzorów przedstawionych dla rozruchu w punkcie 2.1 można określić *wymagany moment hamujący w ruchu obrotowym, aby czas zatrzymania wynosił* t_2

$M_b = I\frac{\omega_1}{t_2}$, $M = M_c - M_b < 0, M_c = 0, \omega_2 = 0, t_1 = 0$; przy założeniach I = const., *M = const.,*

a w ruchu postępowym siła hamująca

$F_b = m\frac{v_1}{t_2}$, $F = F_c - F_b < 0, F_c = 0, v_2 = 0, t_1 = 0$; przy założeniach m = const., *F = const.*

Wyznaczenie czasu zatrzymania dla określonego momentu hamowania (biernego) dla tych samych założeń

$$t_2 = I\frac{\omega_1}{M_b}$$

i siły hamującej (*biernej*)

$$t_2 = m\frac{v_1}{F_b}$$

Dokładniejsza analiza wymaga budowy modelu dynamicznego i symulacji.

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

Ruch mechanizmu lub członu pod wpływem sił opisywany jest ***dynamicznym równaniem ruchu*** (w analizie kinematycznej jest to równanie ruchu). W najprostszym przypadku jest to jedno równanie, lecz dokładniejszy opis wymaga zazwyczaj utworzenia kilku lub kilkudziesięciu równań. Ilość równań uzależniona jest od liczby stopni swobody dla pojedynczego członu* oraz ilości członów traktowanych indywidualnie w analizie i stopnia ruchliwości dla mechanizmu. Zmienną niezależną względem której wyznacza się rozwiązanie może być czas albo położenie kątowe lub liniowe członu czynnego.
Podstawowym równaniem dynamicznym ruchu stosowanym przy doborze silnika jest równanie wyprowadzone z zasady równowagi pracy i energii kinetycznej. Drugą metodą jest otrzymanie dynamicznego równania ruchu z drugiego prawa Newtona. Równanie otrzymane z równania równowagi pracy i energii stosowane jest przede wszystkim do analizy mechanizmów o ruchliwości równej jeden z jednoczesną redukcją sił i mas lub momentów sił i masowych momentów bezwładności. W wyniku redukcji człony mechanizmu w analizie traktowane są jak pojedynczy człon i rozwiązywane zagadnienie ma jeden stopień swobody. Analiza mechanizmu na podstawie drugiego prawa Newtona często stosowana jest w przypadku niezależnego opisu ruchu każdego z jego członów. Liczba stopni swobody modelu dynamicznego równa jest liczbie równań lub niezależnych współrzędnych opisujących położenia członów. Różne aspekty funkcjonowania mechanizmów mogą być badane na podstawie dynamicznych równań ruchu.

*Rozważania dotyczą członów sztywnych

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

Zasada równowagi pracy i energii kinetycznej – równanie ogólne

Zasada równowagi pracy i energii kinetycznej może być wyprowadzona na podstawie II prawa Newtona. Na punkt materialny działa wypadkowa siła *F*. Składowa siła styczna do toru ma wartość $F\cos\alpha$ oraz pamiętając, że przyspieszenie $a = dv/dt$ można napisać dynamiczne równanie ruchu [Leyko 2012]:

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\alpha$$

mnożąc obie strony równania przez v przyjmuje ono postać

$$mv\frac{dv}{dt} = Fv\cos\alpha$$

Ponieważ masa *m* ma stałą wartość i $\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 2\frac{mv}{2}\frac{dv}{dt} = mv\frac{dv}{dt}$ otrzymuje się:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Fv\cos\alpha$$

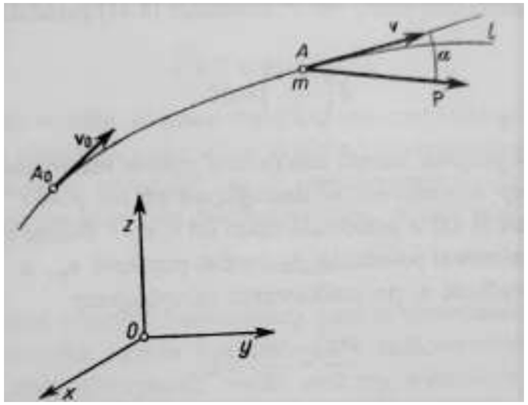
przekształcając

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Fv\cos\alpha\, dt$$

wiedząc, że $vdt = ds$

$$\underbrace{d\left(\frac{mv^2}{2}\right)}_{dT} = \underbrace{F\cos\alpha\, ds}_{dL}$$

Elementarny przyrost energii kinetycznej ← dT dL → Elementarna praca siły *P*



Rys. Ruch punktu materialnego [Leyko 2012]

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

Zasada równowagi pracy i energii kinetycznej – równanie ogólne

Zasada równowagi pracy i energii kinetycznej w postaci różniczkowej ma więc postać

$$dL = dT$$

Człon mechanizmu połączony z silnikiem wykonuje najczęściej ruch obrotowy oraz niekiedy postępowy.

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

Zasada równowagi pracy i energii kinetycznej – równanie ogólne

Ruch obrotowy

$$dL = Md\varphi$$

$$dT = d\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)$$

$$Md\varphi = d\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)$$

$$M = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)$$

dla $I(\varphi)$ i $\omega(\varphi)$

$$M = \frac{1}{2}I2\omega\frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{1}{2}\frac{dI}{d\varphi}\omega^2 = I\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\omega}{d\varphi} + \frac{1}{2}\frac{dI}{d\varphi}\omega^2$$

$$\boxed{M = I\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dI}{d\varphi}\omega^2}$$

dla I = const. $\frac{dI}{d\varphi} = 0$

$$\boxed{M = I\frac{d\omega}{dt}}$$ (II prawo Newtona)

Ruch postępowy

$$dL = Fds$$

$$dT = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$Fds = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$F = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

dla $m(s)$ i $v(s)$

$$F = \frac{1}{2}m2v\frac{dv}{ds} + \frac{1}{2}v^2\frac{dm}{ds} = m\frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} + \frac{1}{2}v^2\frac{dm}{ds}$$

$$\boxed{F = m\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dm}{ds}v^2}$$

dla m = const. $\frac{dm}{ds} = 0$

$$\boxed{F = m\frac{dv}{dt}}$$ (II prawo Newtona)

Zasada równowagi pracy i energii kinetycznej – równanie ogólne

Dla (pojedynczego) członu $I(\varphi)$ oznacza, że masowy moment bezwładności zmienia się, co może być skutkiem zmiany rozmieszczenia masy lub ilości masy. Podobnie $m(s)$ oznacza, że ilość masy członu w trakcie ruchu ulega zmianie. Jeżeli masowy moment bezwładności członu jest stały w ruchu obrotowym i masa członu jest stała w ruchu postępowym, to wtedy zasada równowagi pracy i energii kinetycznej przyjmuje postać drugiego prawa Newtona (ostatnie zależności na poprzednim slajdzie).

Mechanizmy najczęściej posiadają więcej niż jeden człon ruchomy. W celu uproszczenia analizy zastępuje się wszystkie człony ruchome jednym członem zwanym ***członem redukcji*** (rozważania dotyczą mechanizmów o ruchliwości równej 1). Na człon redukcji może być wybrany dowolny człon mechanizmu, jednak zwykle jest to człon napędzający albo roboczy. W wyniku redukcji otrzymujemy model o jednym stopniu swobody opisany jednym równaniem. Aby zachowanie mechanizmu sprowadzonego do jednego członu redukcji było równoważne (w ramach przyjętych uproszczeń) rzeczywistemu mechanizmowi należy odwzorować właściwości związane z masą. Jeśli człon redukcji wykonuje ruch postępowy należy wyznaczyć ***masę zredukowaną***, a dla ruchu obrotowego ***zredukowany moment bezwładności***. Proces ten określany jest jako ***redukcja mas***. Siły i momenty działające na człony mechanizmu należy zastąpić ***siłą zredukowaną*** (dla ruchu postępowego) albo ***momentem zredukowanym*** (dla ruchu obrotowego) działającym na człon redukcji. Określa się to jako ***redukcja sił***.

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

Redukcja mas

Zastąpienie wszystkich członów ruchomych mechanizmu jednym członem redukcji wymaga odwzorowania właściwości związanych z masą. Wychodzi się z zasady równości energii kinetycznej całego mechanizmu $\sum T_i$ i członu redukcji T_{zr} [Miller 1996, Felis 2008]

$$T_{zr} = \sum T_i$$

Energia kinetyczna członu w ruchu płaskim T jest równa sumie energii kinetycznej *w ruchu postępowym* $T_p = \frac{1}{2} m v_c^2$ z prędkością środka masy v_c i energii kinetycznej *w ruchu obrotowym* $T_o = \frac{1}{2} I_{oc} \omega^2$ z osiowym masowym momentem bezwładności I_{oc}, którego oś przechodzi przez środek masy.

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I_{oc} \omega^2$$

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

Redukcja mas

Rodzaj ruchu członu redukcji

Ruch obrotowy

$$T_{zr} = \frac{1}{2} I_{zr}\omega_{zr}^2 \qquad \sum T_i = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 + I_i\omega_i^2$$

$$\frac{1}{2} I_{zr}\omega_{zr}^2 = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 + I_i\omega_i^2$$

Moment bezwładności zredukowany I_{zr}

$$I_{zr} = \sum\left[m_i\left(\frac{v_i}{\omega_{zr}}\right)^2 + I_i\left(\frac{\omega_i}{\omega_{zr}}\right)^2\right]$$

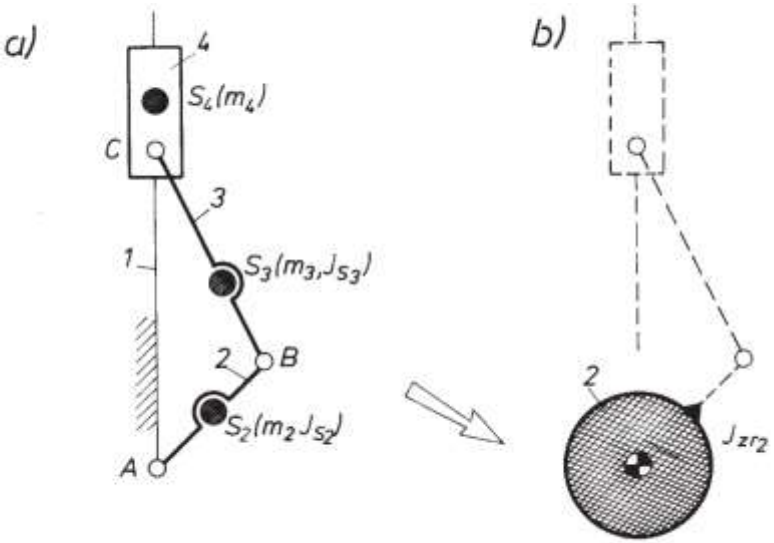
Ruch postępowy

$$T_{zr} = \frac{1}{2} m_{zr} v_{zr}^2 \qquad \sum T_i = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 + I_i\omega_i^2$$

$$\frac{1}{2} m_{zr} v_{zr}^2 = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 + I_i\omega_i^2$$

Masa zredukowana m_{zr}

$$m_{zr} = \sum\left[m_i\left(\frac{v_i}{v_{zr}}\right)^2 + I_i\left(\frac{\omega_i}{v_{zr}}\right)^2\right]$$



Rys. Schemat kinematyczny układu korbowego *a*) i redukcja masy członów do członu redukcji *2* w postaci momentu bezwładności zredukowanego J_{zr2} *b*) [Miller 1996]

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

Redukcja mas

Rodzaj ruchu członu redukcji

Ruch obrotowy	Ruch postępowy
Moment bezwładności zredukowany I_{zr}	***Masa zredukowana m_{zr}***
$I_{zr} = \sum \left[m_i \left(\frac{v_i}{\omega_{zr}} \right)^2 + I_i \left(\frac{\omega_i}{\omega_{zr}} \right)^2 \right]$	$m_{zr} = \sum \left[m_i \left(\frac{v_i}{v_{zr}} \right)^2 + I_i \left(\frac{\omega_i}{v_{zr}} \right)^2 \right]$

Z otrzymanych zależności opisujących zredukowaną masę i moment bezwładności wynika, że są one stałe w trzech przypadkach łącznie zachodzących:

- stała jest masa członów,
- stałe są masowe momenty bezwładności członów względem środków mas,
- stałe są ilorazy prędkości (przełożenia).

Dwa pierwsze warunki często są spełnione w mechanizmach natomiast trzeci zależy od typu mechanizmu. Stałe przełożenia występują dla członów wykonujących ruch obrotowy połączonych przekładniami o stałym przełożeniu. W przypadku stosowania wariatorów albo w mechanizmach dźwigniowych przełożenie między członami najczęściej nie jest stałe.

Redukcja sił

Zastępując ruchome człony mechanizmu członem redukcji należy również zastąpić siły zewnętrzne działające na człony ***siłą zredukowaną*** dla ruchu postępowego członu redukcji albo ***momentem zredukowanym*** dla ruchu obrotowego członu redukcji. Skutek energetyczny oddziaływania sił zewnętrznych na człony i siły zredukowanej albo momentu zredukowanego na człon redukcji powinien być taki sam. Uzyskanie zależności do redukcji sił opiera się na równości mocy.

$$P_{zr} = \sum P_i$$

P_{zr} - chwilowa moc członu redukcji,
$\sum P_i$ - chwilowa moc członów mechanizmu.

Moc *i*- tego członu w ruchu płaskim ma postać:

$$P_i = \sum (F_i v_i \cos \alpha_i \pm M_i \omega_i)$$

F_i - siła działająca na *i*- ty człon,
v_i - prędkość punktu *i*- tego członu, w którym przyłożona jest siła,
α_i - kat pomiędzy wektorem (kierunkiem) siły F_i i wektorem (kierunkiem) prędkości v_i,
M_i - para sił działająca na człon *i*- ty człon, jeśli para sił M_i i prędkość kątowa ma taki sam zwrot we wzorze jest znak (+), jeśli zwroty są przeciwne (-),
ω_i - prędkość kątowa *i* – tego członu.

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

Redukcja sił

Rodzaj ruchu członu redukcji

Ruch obrotowy

$$P_{zr} = M_{zr}\omega_{zr}$$

$$\sum P_i = \sum (F_i v_i \cos\alpha_i \pm M_i\omega_i)$$

$$M_{zr}\omega_{zr} = \sum (F_i v_i \cos\alpha_i \pm M_i\omega_i)$$

Moment zredukowany M_{zr}

$$M_{zr} = \sum \left(F_i \frac{v_i}{\omega_{zr}} \cos\alpha_i \pm M_i \frac{\omega_i}{\omega_{zr\,i}} \right)$$

Ruch postępowy

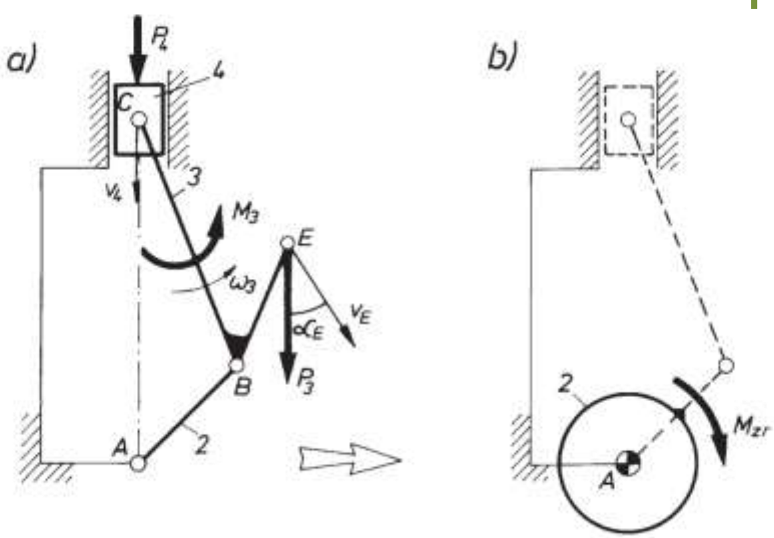
$$P_{zr} = F_{zr} v_{zr} \text{ dla } \cos\alpha_{zr} = 0$$

$$\sum P_i = \sum (F_i v_i \cos\alpha_i \pm M_i\omega_i)$$

$$F_{zr} v_{zr} = \sum (F_i v_i \cos\alpha_i \pm M_i\omega_i)$$

Siła zredukowana F_{zr}

$$F_{zr} = \sum \left(F_i \frac{v_i}{v_{zr}} \cos\alpha_i \pm M_i \frac{\omega_i}{v_{zr}} \right)$$



Rys. Siły zewnętrzne działające na układ korbowy *a*) i redukcja sił do członu redukcji *2* w postaci momentu zredukowanego M_{zr} *b*) [Miller 1996]

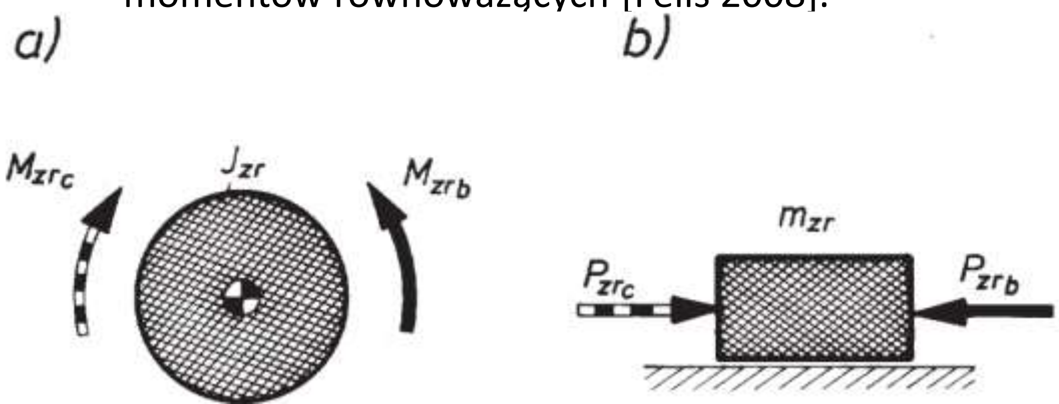
Redukcja sił

Siła zredukowana i moment zredukowany może mieć wartość dodatnią lub ujemną. Jeśli wartość jest dodatnia siły czynne są większe niż bierne, a jeśli wartość jest ujemna odwrotnie. Dlatego siła zredukowana i moment zredukowany zapisywane są także jako:

$$F_{zr} = F_{zrc} - F_{zrb}$$
$$M_{zr} = M_{zrc} - M_{zrb}$$

F_{zrc} - siły zredukowane czynne,
F_{zrb} - siły zredukowane bierne,
M_{zrc} - moment zredukowany czynny,
M_{zrb} - moment zredukowany bierny.

W obliczeniach siły zredukowanej F_{zr} i momentu zredukowanego M_{zr} pomija się siły i momenty bezwładności. Jeśli zostaną one uwzględnione zwroty będą przeciwne do sił i momentów równoważących [Felis 2008].



Rys. Człon redukcji w ruchu obrotowym *a*) i w ruchu postępowym *b*) [Miller 1996]

Modelowanie dynamiczne – dobór silnika

Zasada równowagi pracy i energii kinetycznej – równanie ogólne

Ponownie można zapisać równania dynamiczne ruchu w postaci różniczkowej z zasady równowagi pracy i energii kinetycznej dla członu redukcji oraz siły i momentu zredukowanego.

Ruch obrotowy

dla $I_{zr}(\varphi)$ i $\omega(\varphi)$

$$M_{zr} = I_{zr}\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dI_{zr}}{d\varphi}\omega^2$$

Dla I_{zr}= const. $\frac{dI}{d\varphi} = 0$

$$M_{zr} = I_{zr}\frac{d\omega}{dt}$$

(II prawo Newtona)

Ruch postępowy

dla $m_{zr}(s)$ i $v(s)$

$$F_{zr} = m_{zr}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dm_{zr}}{ds}v^2$$

Dla m_{zr}= const. $\frac{dm}{ds} = 0$

$$F_{zr} = m_{zr}\frac{dv}{dt}$$

(II prawo Newtona)

Różniczkowe równania ruchu mają rozwiązania analityczne tylko w szczególnych przypadkach. Wynika to z faktu, że moment bezwładności zredukowany I_{zr} i moment zredukowany M_{zr} oraz masa zredukowana m_{zr} i siła zredukowana F_{zr} najczęściej są zmienne w czasie, a to powoduje, że obecnie rozwiązanie w sposób ścisły nie jest możliwe. Przykładowe rozwiązania analityczne i numeryczne zostały omówione w podręcznikach np. [Felis 2008, Felis 2007, Miller 1996, Pylak 1986].

Literatura

1. Miller S.: *Teoria maszyn i mechanizmów. Analiza układów kinematycznych*. WPW, Wrocław 1996.
2. Felis J., Jaworowski H.: Teoria maszyn i mechanizmów. Część II. Przykłady i zadania. UWND AGH, Kraków 2007.
3. Felis J., Jaworowski H., Cieślik J.: *Teoria maszyn i mechanizmów. Część I. Analiza mechanizmów*. UWND AGH, Kraków 2008.
4. Marghitu D. B.: Kinematic chains and machine components design. Elsevier 2005.
5. Myszka D. H.: *Mechines & mechanism. Applied kinematic analysis*. Prentice Hall, Boston 2012.
6. Leyko J.: *Mechanika ogólna. Dynamika. Tom 2*. PWN, Warszawa 2012.
7. Gronowicz A.: Podstawy analizy układów kinematycznych. OWPW, Wrocław 2003.
8. Mott R. L., Vavrek E. M., Wang J.: Machine elements in mechanical design. Pearson 2018.
9. Pylak K., Bartnik R.: Zbiór zadań z teorii mechanizmów i maszyn. Wydawnictwa Uczelniane 1986.
10. Jedliński Ł.: New Analytical Model of Spur Gears with 5 DOF Shafts and its Comparison with other DOF Models. Advances in Science and Technology Research Journal - 2021.