

Ćw. 24. Pomiar współczynnika temperaturowego oporu metali

Wprowadzenie

Prądem elektrycznym nazywamy uporządkowany ruch ładunków elektrycznych. Najczęściej spotykane w elektrotechnice prądy elektryczne to ruch elektronów w przewodniku, np. w aluminiowych przewodach napowietrznych linii energetycznych czy miedzianych kablach instalacji domowej. W elektronice półprzewodnikowej jest to ruch elektronów i dziur, a w elektrochemii ruch kationów i anionów w elektrolicie.

Żeby prąd popłynął, zawsze trzeba dysponować źródłem prądu (stałego lub zmiennego) i zbudować obwód elektryczny, do którego to źródło podłączymy. Jednym z istotnych elementów wchodzących w skład obwodu są oporniki elektryczne, nazywane w skrócie opornikami, a w języku technicznym rezystorami. Ich podstawowym zadaniem jest ograniczenie prądu płynącego w tej gałęzi obwodu, w którą są podłączone. Mogą też być źródłem energii cieplnej (np. grzejniki oporowe), która wytwarza się w nich podczas przepływu prądu.

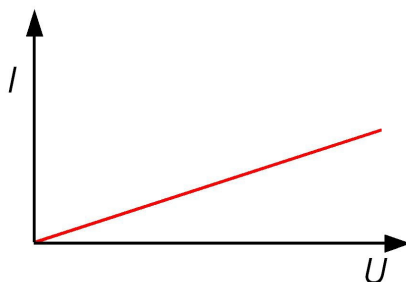
Podstawowym parametrem opornika jest opór elektryczny R . Jest on wielkością definiowaną jako stosunek przyłożonego do końców opornika napięcia U do natężenia prądu I płynącego przez ten opornik, co wyraża wzór:

$$R = \frac{U}{I}. \quad (1)$$

Już w pierwszej połowie XIX w. Georg Ohm zauważył, że tak zdefiniowana wielkość jest stała, tzn. nie zależy od napięcia przyłożonego do opornika. Doprowadziło to do sformułowania prawa Ohma mówiącego, że natężenie prądu płynącego przez opór jest wprost proporcjonalne do przyłożonego do jego końców napięcia, co zapisujemy w postaci:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (2)$$

Z powodu istnienia tej zależności pokazanej na rys. 1, oporniki zaliczamy do elementów liniowych obwodu elektrycznego. Jednostką oporu elektrycznego jest om oznaczony symbolem Ω i spełniający związek: $[R] = V/A = \Omega$.



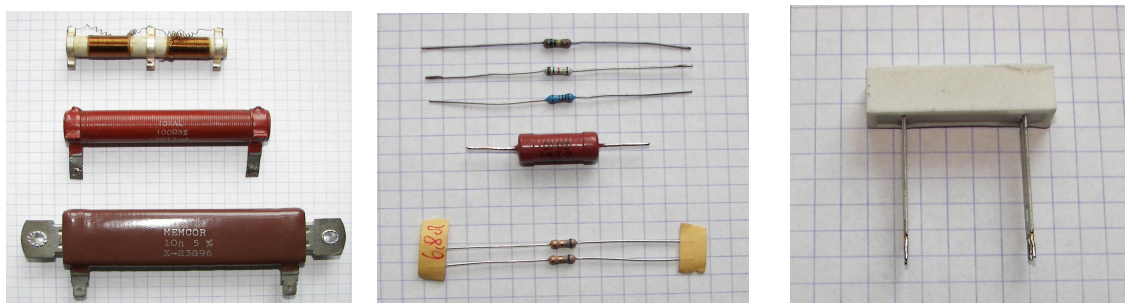
Rys. 1. Wykres ilustrujący prawo Ohma

Ze względu na konstrukcję oporniki elektryczne można podzielić na trzy grupy (patrz rys. 2):

a) drutowe - z drutem oporowym nawiniętym na nieprzewodzący rdzeń b) objętościowe - zbudowane z substancji oporowej uformowanej w kształt np. prostopadłościanu, c) warstwowe - z naniesioną cienką warstwą węgla pirolitycznego (oporniki węglowe) lub stopu metalu (oporniki metalizowane) na wałku ceramicznym. W każdym przypadku mamy do czynienia z przewodzącym materiałem spełniającym prawo Ohma, czyli tzw. przewodnikiem liniowym. Taki materiał jest często uformowany w obiekt przewodzący o dobrze określonych parametrach geometrycznych jak długość l i pole przekroju poprzecznego S . Gdy obiekt ma jednorodny skład chemiczny, stałą gęstość oraz jednakowe pole przekroju na całej długości, możliwe jest podanie prostego wzoru wyrażającego jego opór:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (3)$$

Parametr ρ jest wielkością fizyczną charakterystyczną dla danego materiału i nazywany jest oporem właściwym. Jego wartość podajemy w jednostkach $\Omega \cdot m$. Jako przykład zastosowania wzoru (3), zostanie obliczony opór przewodu elektrycznego w postaci drutu miedzianego o długości $l = 1$ m i średnicy $d = 1$ mm, a więc mniej więcej takiego, jakie są używane w pracowni jako przewody połączeniowe. Przyjmując dla miedzi $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$, otrzymujemy wynik $0,017 \Omega$. Jest to opór dużo mniejszy niż mają inne typowe oporniki laboratoryjne, gdzie zakres np. opornika dekadowego obejmuje od 1Ω do $10\,000 \Omega$.



Rys. 2. Wygląd typowych oporników: a) drutowych, b) warstwowych - węglowych (góra), metalizowanych (dół), c) objętościowych.

Wszystkie materiały można podzielić pod względem wartości oporu właściwego na trzy grupy: izolatory, półprzewodniki i przewodniki. Wartości graniczne ρ i przykłady materiałów podane są w Tab. 1. Taką klasyfikację przeprowadza się dla oporu właściwego zmierzonego w temperaturze pokojowej. W odpowiednio niskiej temperaturze niektóre z materiałów całkowicie tracą oporność i stają się nadprzewodnikami (wymagana temperatura podana jest w Tab. 1). Wiedząc, że opór właściwy najlepszego izolatora jakim jest polistyren jest rzędu $10^{20} \Omega \cdot m$, a najlepszego przewodnika - srebra - rzędu $10^{-8} \Omega \cdot m$ daje to wielką rozpiętość wartości tego parametru fizycznego – 18 rzędów wielkości, co stanowi rekord w przyrodzie. Taka rozpiętość to skutek wielkiej różnicy w koncentracji swobodnych nośników prądu, głównie elektronów, oraz ich ruchliwości. W izolatorach praktycznie wszystkie elektrony walencyjne są silnie związane z atomami substancji i nie mogą się przemieszczać, w metalach wiele z nich porusza się swobodnie w obrębie całego ciała.

Tab. 1. Zakresy oporu właściwego i przykłady materiałów należących do różnych grup przewodnictwa.

Rodzaj	Opór właściwy ρ [$\Omega \cdot m$]	Przykład materiału
Izolator	$10^9 < \rho \leq 10^{20}$	woda destylowana, olej transformatorowy, szkło, diament, teflon, polistyren
Półprzewodnik	$10^{-6} < \rho \leq 10^9$	krzem, arsenek galu GaAs, azotek galu GaN
Przewodnik	$10^{-8} < \rho \leq 10^{-6}$	srebro, złoto, miedź, glin, żelazo, ołów, grafit
Nadprzewodnik	$\rho = 0$	rtęć ($T < 4$ K), ołów ($T < 7$ K), stop NbTi ($T < 9$ K), MgB ₂ ($T < 39$ K), ceramika YBa ₂ Cu ₃ O ₇ ($T < 93$ K)

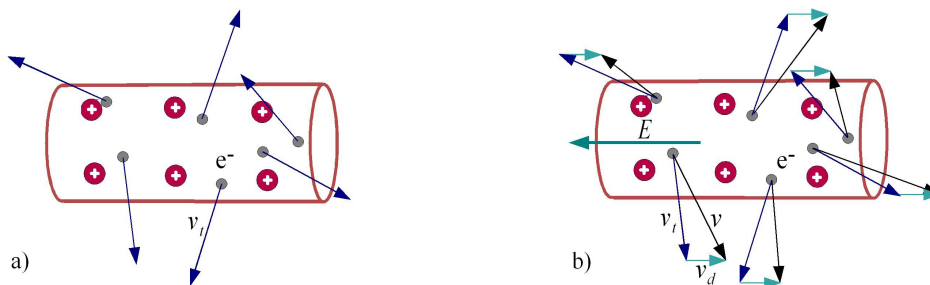
Atomy metali mają stosunkowo słabo związane elektrony na zewnętrznej powłoce, tzw. elektrony walencyjne. Gdy atomy wiążą się ze sobą i tworzą ciało stałe, część tych elektronów,

najczęściej jeden, oddziela się od każdego z atomów i przechodzi do przestrzeni międzyatomowej. Powstaje w ten sposób gaz elektronowy oraz dodatnio naładowane jony atomowe (rys. 3a). Koncentracja elektronów swobodnych n w gazie elektronowym jest równa koncentracji atomów, która zależy od gęstości ciała stałego i masy molowej atomów metalu. Dla metali wartość n jest bardzo duża, np. dla miedzi otrzymujemy wartość $8,5 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

Atomy w metalu, a dokładniej ich jony dodatnie, są uporządkowane w przestrzeni tworząc strukturę krystaliczną. Jony nie przemieszczają się lecz drgają wokół położenia równowagi ruchem termicznym, którego amplituda wzrasta wraz z temperaturą ciała T . Elektrony również mają energię kinetyczną proporcjonalną do temperatury zgodnie z zasadą ekwipartycji energii $E_k = 3k_B T/2$, gdzie k_B oznacza stałą Boltzmanna. Ponieważ $E_k = mv_t^2/2$, gdzie m to masa elektronu a v_t to jego prędkość termiczna, można otrzymać wartość tego ostatniego parametru:

$$v_t = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \quad (4)$$

Zgodnie z tym wzorem w temperaturze 300 K elektrony mają ogromną prędkość wynoszącą $1,2 \cdot 10^5$ m/s. Kierunek tej prędkości jest przypadkowy (rys. 3a) i dlatego nie ma przeważającego kierunku ruchu, jakiegoś jego uporządkowania – prąd więc nie płynie.



Rys. 3. Budowa mikroskopowa metali i ruch elektronów we fragmencie przewodu elektrycznego: a) bez pola elektrycznego, b) po przyłożeniu pola elektrycznego.

Pierwszą udaną próbą opisu przepływu prądu w metalach podjął Drude na początku XX w. Założył on w swoim modelu, że pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego elektrony swobodne w metalu zaczynają poruszać się w sposób nieco uporządkowany, tzn. obok nieuporządkowanej co do kierunku prędkości termicznej v_t pojawi się prędkość dryfu v_d skierowana wzdłuż pola elektrycznego (rys. 3b). Chcąc opisać ilościowo natężenie prądu I tak dryfujących elektronów zastosował znany wzór

$$I = enS \bar{v}_d \quad (5)$$

gdzie n jest koncentracją elektronów, S polem przekroju poprzecznego przewodnika, a kreska nad v_d oznacza średnią wartość prędkości dryfu. Ta ostatnia wielkość jest jedyną niewiadomą, którą trzeba obliczyć analizując ruch elektronu.

Wiadomo jest, że po przyłożeniu napięcia U do przewodnika o długości l , wytwarza się w nim pole elektryczne o natężeniu $E = U/l$. Na każdy elektron zaczyna wtedy działać siła skierowana przeciwnie do wektora natężenia pola elektrycznego \vec{E} o wartości $F = e \cdot E$, gdzie e to ładunek elektronu. Drude założył, że pod wpływem tej siły elektron doznaje stałego przyspieszenia a o wartości $e \cdot E/m$. Takie rozpędzanie elektronu kończy się jego zatrzymaniem w momencie zderzenia z jonem metalu, co zdarza się co przedział czasu τ , nazywany czasem relaksacji. W momencie zderzenia elektron ma największą prędkość uzyskaną w wyniku przyspieszania i równą $a \cdot \tau$, gdyż z założenia jest to ruch jednostajnie przyspieszony z zerową prędkością początkową. Ponieważ średnia prędkość w takim ruchu jest równa połowie wartości maksymalnej, można ostatecznie zapisać:

$$\bar{v}_d = \frac{e E \tau}{2m} \quad (6)$$

Możemy wykorzystać uzyskany wzór (6) do obliczenia średniej prędkości dryfu elektronów w przewodzie miedzianym o długości $l = 1$ m do którego podłączono napięcie $U = 1$ V. Obliczając natężenie pola elektrycznego $E = U/l = 1$ V/m oraz znając czas relaksacji dla miedzi $\tau = 2 \cdot 10^{-14}$ s, uzyskuje się wartość $1,8 \cdot 10^{-3}$ m/s ≈ 2 mm/s. Jest to więc bardzo mała wartość w stosunku do prędkości termicznej.

Chcąc obliczyć natężenie prądu elektrycznego w przewodniku, łączymy wzory (5) i (6) uzyskując:

$$I = enS \frac{eE\tau}{2m} .$$

Podstawiając do powyższego wzoru podstawową zależność $E = U/l$, uzyskuje się związek między natężeniem prądu i napięciem:

$$I = \frac{e^2 n S \tau}{2m} \frac{U}{l} .$$

Dzieląc napięcie U przez tak uzyskaną wartość natężenia prądu I , przewidywaną w modelu, można zgodnie z definicją oporu daną wzorem (1) podać jego wartość przewidywaną w postaci:

$$R = \frac{2m}{e^2 n \tau} \frac{l}{S} . \quad (7)$$

Porównanie równań (7) i (3) prowadzi do stwierdzenia, że opór właściwy przewodnika wynosi $2m/e^2 n \tau$ – zależy więc od koncentracji elektronów i czasu relaksacji. W ten sposób model Drudego umożliwia interpretację mikroskopową występowania oporu i słuszności prawa Ohma.

Zmienność oporu właściwego metali danego wzorem (7) w funkcji temperatury wynika głównie z silnej zależności czasu relaksacji τ od temperatury T , podczas gdy koncentracja elektronów swobodnych jest praktycznie stała. Czas relaksacji zależy od częstości zderzeń elektronów przewodnictwa z trwałymi niedoskonałościami (defektami strukturalnymi) sieci krystalicznej oraz z niedoskonałościami chwilowymi, tworzącymi się w wyniku drgań termicznych atomów wokół położenia równowagi w sieci krystalicznej. Procesy rozpraszania poruszających się elektronów potrafi ilościowo wyjaśnić dopiero teoria kwantowa. Traktuje ona ruch elektronów w metalu jako ruch fali elektronowej w zdeformowanej sieci krystalicznej uwzględniając przy tym oddziaływanie tej fali z fononami, czyli porcjami energii drgań termicznych sieci. Zgodnie z tym obrazem kwantowym, opór właściwy można podzielić na dwa składniki

$$\rho(T) = \rho_r + \rho_s(T),$$

gdzie pierwszy składnik jest oporem resztkowym związanym z istnieniem defektów, a drugi to opór wywołany rozpraszaniem fali elektronowej na drganiach termicznych sieci krystalicznej.

Składnik sieciowy oporu właściwego ρ_s zależy mocno od temperatury, gdyż jego wzrost jest spowodowany zwiększeniem amplitudy drgań atomów sieci, co w opisie kwantowym oznacza większą ilość fononów, a więc i zwiększenie prawdopodobieństwa rozproszenia fali elektronowej. W niskich temperaturach ($T < \text{ok. } 200$ K) opór sieciowy jest proporcjonalny do piątej potęgi temperatury bezwzględnej, tj. $\rho_s \propto T^5$, natomiast w znacznie wyższych $\rho_s \propto T$. Oznacza to, że opór przewodnika metalowego w temperaturze pokojowej i wyższej zmienia się liniowo z temperaturą i może być zapisany następująco:

$$R(T) = R_0 [1 + \alpha \Delta T], \quad (8)$$

gdzie poszczególne symbole oznaczają: R_0 – opór przewodnika w temperaturze $t_0 = 0^\circ\text{C}$ czyli $T_0 = 273,15$ K, ΔT – przyrost temperatury przewodnika względem T_0 , a α – współczynnik temperaturowy oporu. Współczynnik α dla czystych metali przyjmuje wartość $4 \div 6 \cdot 10^{-3}$ K⁻¹, ale dla niektórych szczególnych stopów może być znacznie mniejszy, np. $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ K⁻¹ dla konstantanu.

Metoda pomiaru

Wzór (8) można wykorzystać do pomiaru wartości współczynnika temperaturowego oporu wybranego przewodnika metalowego. Wystarczy znać trzy wartości: $R(T)$, R_0 i ΔT , ale dokładniejszy wynik uzyskamy, gdy opór przewodnika (oznaczony dalej jako R_x) będzie zmierzony dla więcej niż jednej wartości przyrostu temperatury ΔT . Dysponując zbiorem wartości zmierzonych: R_{x_i} oraz ΔT_i wykonujemy wykres liniowej zależności $R_x(\Delta T)$ wynikającej z równania (8) w postaci

$$R_x = R_0 + \alpha R_0 \Delta T. \quad (9)$$

Korzystając z metody najmniejszych kwadratów (MNK) dla zbioru danych R_{x_i} oraz ΔT_i , uzyskujemy współczynniki linii prostej: $a = \alpha R_0$ oraz $b = R_0$. Stąd mamy wartość współczynnika temperaturowego oporu

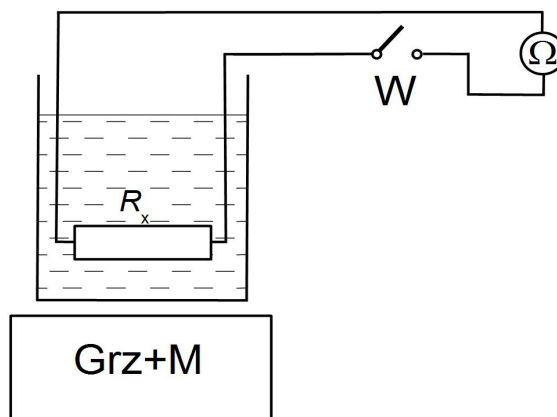
$$\alpha = \frac{a}{b}. \quad (10)$$

W doświadczeniu mierzymy opór R_x długiego drutu z badanego metalu, z którego wykonana jest cewka o dużej ilości zwojów pokazana na rys. 4. Dzięki izolacji naniesionej na powierzchnię drutu, prąd płynie wzdłuż jego długości l , więc zgodnie z zależnością (3) wartość R_x jest stosunkowo duża i może być zmierzona przy pomocy mostka Wheatstone'a. W tym celu należy zestawić obwód pomiarowy pokazany na rys. 5, gdzie do mostka dołączymy: cewkę z drutu o mierzonym oporze R_x , galwanometr oraz źródło napięcia stałego. Cewka jest zanurzona w zlewce z olejem transformatorowym podgrzewanym od dołu przez grzałkę i mieszanym przez mieszadło magnetyczne. Temperatura oleju, a więc i przewodnika, stale rośnie i jest odczytywana jednocześnie z pomiarem aktualnego oporu cewki. Takie pomiary najlepiej wykonywać po osiągnięciu kolejnych przyrostów temperatury o jednakowej wartości, aby dane pomiarowe pokryły równomiernie przedział zmian temperatury.

Wykonanie ćwiczenia



Rys. 4. Zestaw przyrządów potrzebnych do pomiaru współczynnika temperaturowego oporu metali: R_x - badany przewodnik metalowy (tu: drut w cewce) zanurzony w kąpeli olejowej w zlewce, Grz+M – urządzenie z grzałką i mieszadłem magnetycznym, W – wyłącznik, Ω – omomierz, T – termometr do pomiaru temperatury oleju.



Rys. 5. Schemat układu pomiarowego do wyznaczenia współczynnika temperaturowego oporu metali (oznaczenia jak na rys. 4).

1. Skompletować zestaw przyrządów pokazany na rys. 4. Opór badany R_x wybiera prowadzący zajęcia.

- Opór badany R_x w zlewce umieścić na płycie grzejnika wyposażonego w mieszadło magnetyczne Grz+M. Termometr T umieszczamy w gnieździe opornika R_x tak, aby pozostawał w kontakcie z olejem i wskazywał jego temperaturę.
- Połączyć układ pomiarowy zgodnie ze schematem z rys. 5 korzystając z przewodów połączeniowych z pojemnika.
- Po sprawdzeniu obwodu, rozpocząć pomiary włączając grzałkę Grz, na której wybieramy moc 100 W. Uruchomić mieszadło magnetyczne (przycisk motor) i sprawdzić czy magnes w oleju obraca się stabilnie. W przypadku zatrzymywania się magnesu po wypadnięciu ze środka dna cewki na skutek zbyt szybkich obrotów, należy wycisnąć i ponownie wcisnąć przycisk „motor” oraz zmniejszyć częstotliwość obrotu pola magnetycznego mieszadła obracając pokrętkę w lewo.
- Podczas wzrostu temperatury oleju, dokonujemy około 7 pomiarów oporu drutu $R_x(\Delta T)$ począwszy od temperatury pokojowej aż do osiągnięcia $t = 80\text{ }^\circ\text{C}$, najlepiej co $\Delta t = 10\text{ }^\circ\text{C}$. Pomiaru oporu dokonujemy zawsze wyłączając na czas pomiaru przyciskiem „motor” mieszadło i zamykając wyłącznik. Po wykonaniu pomiaru oporu omomierzem, wyłącznik otwieramy a mieszadło ponownie włączamy.
- Po zakończeniu pomiarów, wyjąć termometr i zetrzeć z niego olej papierowym ręcznikiem.
- Zapisać wyniki pomiarów do poniższej tabeli i nanieść punkty na wykres $R_x = f(\Delta T)$. Stosując metodę najmniejszych kwadratów uzyskać współczynniki a i b , które wykorzystujemy do narysowania optymalnego przebiegu linii prostej.
- Dyskusję niepewności pomiaru przeprowadzić najlepiej metodą logarytmiczną zastosowaną do wzoru (10) i przyjmując, że α jest funkcją dwóch wielkości obciążonych niepewnością: a i b . Niepewności maksymalne Δa oraz Δb obliczyć korzystając z metody MNK.

Tabela pomiarowa

L.p.	Nr próbki (rodzaj metalu)	t [$^\circ\text{C}$]	ΔT [K]	R_x [Ω]

Zagadnienia do kolokwium:

- Definicja oporu elektrycznego i prawo Ohma.
- Zależność oporu przewodnika od jego kształtu. Budowa podstawowych typów oporników.
- Klasyfikacja materiałów pod względem wartości oporu właściwego.
- Budowa mikroskopowa metali wraz z charakterystyką gazu elektronowego.
- Uporządkowany ruch elektronów swobodnych w metalu po przyłożeniu napięcia.
- Interpretacja mikroskopowa oporu elektrycznego.
- Zależność temperaturowa oporu metali.

Literatura:

- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, tom 3 (Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003) rozdz. 27.
- J. Massalski, M. Massalska, *Fizyka dla inżynierów*, Część I - *Fizyka klasyczna*, (Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2005) 18.1-18.3.
- B. M. Jaworski, A. A. Piński, *Elementy fizyki*, Tom 2 (PWN, Warszawa, 1976) §3.2-3.5.
- H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, (Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1997) 4.3, 10.0.

Opiekun ćwiczenia: dr Wiesław Polak