Ćw. 10. Wyznaczanie momentu bezwładności brył nieregularnych

Wprowadzenie

Obserwowane w przyrodzie ruchy ciał można opisać* stosując podział na ruch postępowy i ruch obrotowy. W ruchu postępowym wszystkie punkty ciała poruszają się po torach o jednakowym kształcie, które są tylko przesunięte względem siebie w przestrzeni o pewien wektor. W ruchu obrotowym ciała wszystkie jego punkty poruszają się po okręgach (patrz rys. 1a), których środki leżą na jednej prostej – osi obrotu. Ruchem postępowym porusza się np. na prostym odcinku drogi samochód, którego prędkość może zmieniać wartość, ale nie zmienia kierunku. Ten sam samochód okrążający rondo, bez zmiany odległości od jego środka, porusza się ruchem obrotowym.

Związek ruchu ciała z działającymi siłami bada dział fizyki – dynamika. Już w XVII w. Izaak Newton sformułował trzy zasady dynamiki opisujące ruch postępowy ciał. II zasada dynamiki mówi np. że ciało o masie m pod wpływem wypadkowej siły $\vec{F}$ będzie zmieniało swoją prędkość w tempie określonym przez nadane mu przyspieszenie o wartości $\vec{a}=\vec{F}/m$. Prawo to ma zastosowanie do ciał poruszających się takim ruchem, że tory wszystkich jego punktów można uznać za jednakowe. Słuszne jest ono więc nawet dla pewnych ruchów obrotowych, jak np. małej kulki doczepionej do długiej nici i wirującej wokół osi obrotu. Ruch samochodu na rondzie można opisać tym prawem tylko w pewnym przybliżeniu, które jest tym lepsze im mniejszy jest stosunek rozmiarów samochodu do promienia drogi wokół ronda. Generalnie jednak opis dynamiki ruchu obrotowego wymaga zastosowania innych pojęć i praw niż te stosowane dla ruchu postępowego.

Do opisania związku parametrów ruchu obrotowego ciał z działającymi siłami niezbędne było wprowadzenie zasad dynamiki ruchu obrotowego. Zasady te przyjmują postać szczególnie prostą w przypadku ciał, które nie odkształcają się podczas tego ruchu, tzn. odległość między dowolnymi dwoma punktami tego ciała nie zmienia się. Jeśli tak jest, to mówimy, że mamy do czynienia z bryłą sztywną. II zasada dynamiki dla bryły sztywnej ma postać:

$$\varepsilon=\frac{\vec{M}}{I}, \tag{1}$$

gdzie ε jest przyspieszeniem kątowym, $\vec{M}$ momentem siły a I momentem bezwładności tej bryły względem osi obrotu. W przypadku, gdy oś obrotu bryły nie zmienia swojego położenia względem ciała (jest z nim na sztywno związana) oraz nie zmienia ona swojego kierunku w przestrzeni, postać II zasady dynamiki ruchu obrotowego można zapisać bez wektorów w postaci

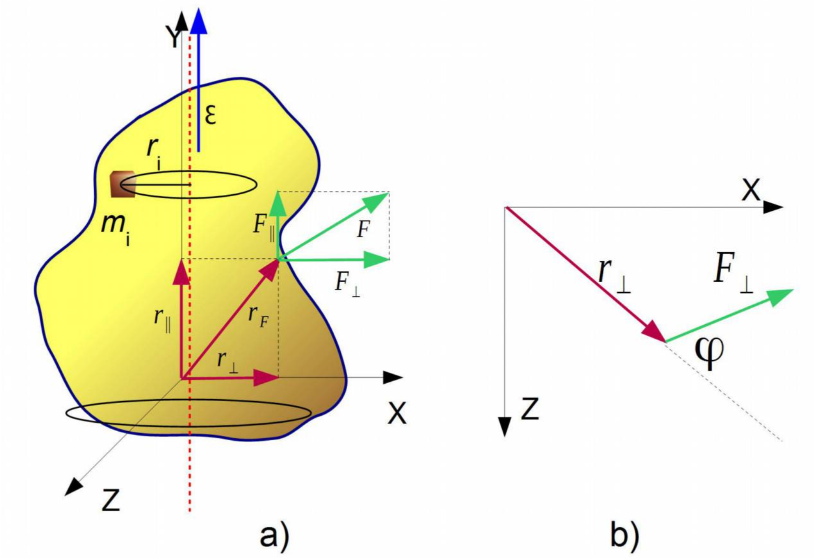
$$\varepsilon=\frac{M}{I}. \tag{2}$$

Przyspieszenie kątowe bryły sztywnej ε ma ścisły związek z innymi wielkościami kinematycznymi bryły – prędkością kątową ω i drogą kątową α:

* Zajmuje się tym dział fizyki - kinematyka

$$\varepsilon(t)=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \tag{3}$$

gdyż prędkość i droga kątowa są związane zależnością $\omega=d\alpha/dt$. Ponieważ drogę kątową $\alpha(t)$, wyrażającą kąt o jaki obróciła się bryła w czasie t, mierzymy w radianach ($[\alpha]$ = rad), to jednostką prędkości jest rad/s a przyspieszenia rad/s^2.



Rys. 1. a) Ruch obrotowy bryły sztywnej z zaznaczonymi kołowymi torami ruchu dwóch wybranych punktów (czarne elipsy) oraz osią obrotu (czerwona linia przerywana). Pokazany jest również rozkład na składową równoległą i prostopadłą do osi obrotu wektora przyłożenia siły r_F i siły F. Jeden z wycinków bryły o masie m_i odległy jest o r_i od osi obrotu. b) Składowe wektorów decydujące o wartości momentu siły.

Moment siły jest wielkością wektorową zdefiniowaną jako iloczyn wektorowy wektora położenia $\vec{r}_F$ punktu do którego przyłożono siłę i wektora tej siły $\vec{F}$ (patrz rys. 1a).

$$\vec{M}=\vec{r}_F\times\vec{F}. \tag{4}$$

Gdy bryła sztywna obraca się wokół unieruchomionej osi obrotu, jak to ma miejsce w większości maszyn, wartość momentu siły wynosi $M=r\,F\cdot\sin\varphi$ (rys. 1b). Zależy więc nie tylko od wartości rzutu siły $\vec{F}$ na kierunek prostopadły do osi obrotu, ale też od ramienia siły (odległości punktu przyłożenia siły od osi obrotu) oraz od sinusa kąta między ramieniem siły r a składową prostopadłą siły F.

Moment bezwładności I bryły względem danej osi jest wielkością skalarną zdefiniowaną następująco:

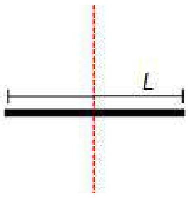
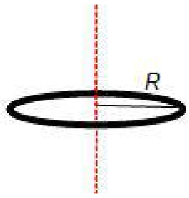
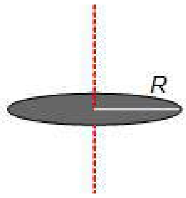
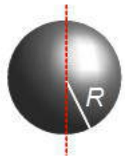
$$I=\sum_{i=1}^{i=N} m_i r_i^2, \tag{5}$$

gdzie sumowanie obejmuje wszystkie wycinki bryły na które została myślowo podzielona, m_i jest masą i-tego wycinka a r_i jest jego odległością od osi obrotu (rys. 1b). W przypadku brył trójwymiarowych, takie sumowanie z matematycznego punktu widzenia da się wykonać i ma postać całki po objętości bryły (całka trójwymiarowa), którą zapisuje się następująco

$$I=\iiint_V \rho(x,y,z)\,r^2\,dxdydz, \tag{6}$$

gdzie $\rho(x, y, z)$ jest lokalną gęstością bryły w punkcie o współrzędnych x, y, z, a r jest odległością od osi obrotu. Moment bezwładności brył regularnych o jednorodnej gęstości ρ można obliczyć z definicji (6) przez całkowanie. Uzyskane tak wartości momentów bezwładności wybranych brył regularnych zawiera Tab. 1.

Tab. 1. Nazwa bryły, jej położenie względem osi obrotu (linia przerywana) i moment bezwładności.

Pręt	Obręcz	Walec/tarcza	Kula
			
$I=\frac{1}{12}mL^2$	$I=mR^2$	$I=\frac{1}{2}mR^2$	$I=\frac{2}{5}mR^2$

Obliczanie momentu bezwładności brył przez całkowanie nie zawsze jest łatwe, a dla brył nieregularnych jest praktycznie niemożliwe bez pomocy komputera. Gdy gęstość bryły jest niejednorodna i nieznany jest wystarczająco dobrze rozkład gęstości $\rho(x, y, z)$, nawet użycie komputera nie pozwoli obliczyć tej ważnej wielkości fizycznej. Dlatego też pomiar momentu bezwładności metodami doświadczalnymi jest łatwiejszą lub nawet jedyną metodą jego określenia.

Metoda pomiaru

Jedna z metod doświadczalnych wykorzystuje wahadło torsyjne. Jest ono zbudowane ze statywu do którego mocuje się pionowo cienki pręt, najczęściej metalowy drut, a do jego końca przymocowuje się bryłę sztywną. Po skręceniu bryły o pewien początkowy kąt α_0, pozwalamy jej poruszać się swobodnie − wykonuje wtedy drgania skrętne, których okres T mierzymy. Ten ruch drgający bryły jest ruchem harmonicznym, gdyż skręcony pręt działa momentem siły proporcjonalnym do kąta skręcenia α

$$M(\alpha)=-D\cdot\alpha, \tag{7}$$

gdzie D jest momentem kierującym pręta, a znak minus oznacza, że moment siły zmusza bryłę do powrotu do położenia początkowego przed skręceniem. Wartość D zależy od sprężystości materiału pręta (dokładnie od jego modułu sztywności G), jego promienia r i długości l w postaci zależności $D=\pi G r^4/(21)$.

Zależność okresu drgań od momentu bezwładności i momentu kierującego uzyskuje się z rozwiązania równania ruchu bryły sztywnej danej równaniem różniczkowym:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-\frac{D}{I}\alpha, \tag{8}$$

które wynika z połączenia równań 2, 3 i 7. Rozwiązaniem równania 8 jest zależność $\alpha(t)=\alpha_0\sin(2\pi t/T+\varphi)$, gdzie φ jest fazą początkową drgań a okres T wynosi

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \tag{9}$$

Z powyższego wzoru wynika, że okres drgań bryły o większym momencie bezwładności dla tego samego pręta jest większy, a zwiększenie D poprzez zastosowanie pręta np. o większym promieniu prowadzi do zmniejszenia okresu drgań.

W sytuacji gdy nie znamy wartości momentu kierującego D, ale znamy moment bezwładności bryły wzorcowej I_0, moment bezwładności badanej bryły I_x można obliczyć dokonując pomiarów ich okresów drgań, odpowiednio T_o i T. Wykorzystanie równania 9 prowadzi do układu równań:

$$\left\{\begin{array}{l} T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_0}{D}} \\ T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_x}{D}} \end{array}\right\}, \tag{10}$$

gdzie nieznanymi wielkościami są I_x i D. Żeby obliczyć I_x, podnosimy obydwa równania do kwadratu a następnie dzielimy je stronami otrzymując

$$\frac{T_0^2}{T^2} = \frac{I_0}{I_x}. \tag{11}$$

Stąd uzyskujemy już rozwiązanie $I_x = I_0 \cdot T^2 / T_0^2$. W przypadku tego ćwiczenia bryłą wzorcową jest jednorodny walec o średnicy *d* i masie *m*. Stosując odpowiedni wzór z Tab. 1 i po przyjęciu $R = d/2$ otrzymujemy zależność końcową:

$$I_x = \frac{1}{8} m d^2 \frac{T^2}{T_0^2}. \tag{12}$$

Wykonanie zadania

Rys. 2. a) Wygląd układu pomiarowego z przyrządami potrzebnymi do pomiaru: suwmiarka, waga szalkowa z odważnikami, stoper. b) W powiększeniu widoczny jest uchwyt do montowania pręta oraz mechanizm (na górze obracająca się tarcza z bolcem, dolna część to tarcza z otworem blokującym) do nadawania bryle początkowego skręcenia o określony kąt.

1. Skompletować zestaw przyrządów pokazany na rys. 2. Numer pręta (oznaczony na końcówce kreskami) i mierzonej bryły podaje prowadzący.
2. Zważyć bryłę wzorcową (walec) na wadze oraz zmierzyć kilkakrotnie suwmiarką jej średnicę.
3. Zamocować pręt w uchwycie wiertarskim wkładając jego gładką końcówkę do otworu uchwytu, zablokować ją tam lekko przekręcając uchwyt w prawo a potem dokręcić kluczem przymocowanym do statywu.
4. Do dolnej części pręta zamocować bryłę wzorcową wkładając do jej gniazda końcówkę z dwoma zaczepami a następnie, skręcając bryłę, zawiesić ją na nich.
5. Wprawić bryłę w drgania torsyjne pociągając za nakrętkę bolec mechanizmu do góry i jednocześnie skręcając górną tarczę o kąt α_0 w granicach od 90^o do 180^o. Następnie, po

zatrzymaniu ruchów bryły, energiczne przekręcić górną tarczę w pierwotne położenie aż do zablokowania się bolca w otworze dolnej tarczy. Uzyskujemy wtedy drgania skrętne bryły o amplitudzie α_0.

6. Zmierzyć kilkakrotnie czas t_0 trwania n_1 okresów drgań. Dla większej dokładności pomiaru okresu zalecane jest wybranie n_1 nie mniejszego niż 10, ale ze względu na tłumienie drgań nie większego niż 20, tzn. $10 \le n_1 \le 20$.
7. Zamocować na pręcie bryłę badaną.
8. Skręcając bryłę przy pomocy mechanizmu (rys. 2b) o kąt w przedziale (90°; 180°) a potem wykonując szybki ruch powrotny mechanizmu wprawić ją w drgania torsyjne.
9. Zmierzyć kilkakrotnie czas t trwania n_2 okresów drgań przy zachowaniu warunku $10 \le n_2 \le 20$.
10. Wpisać uzyskane dane do tabeli pomiarowej, obliczyć wartości średnie t_o i t a stąd średnie wartości okresów $T_0 = t_o/n_1$ i $T = t/n_2$. Na podstawie uzyskanych wartości ze wzoru 12 obliczyć szukaną wartość momentu bezwładności.
11. Dyskusję niepewności pomiaru przeprowadzić najlepiej metodą logarytmiczną zastosowaną do wzoru 12 przyjmując, że I_x jest funkcją czterech wielkości obarczonych niepewnością pomiarową: m, d, T_0 i T.

Tabela pomiarowa

Nr pręta	Bryła	m [kg]	d [m]	n_1	t_0 [s]	$T_{0\,śr}$ [s]	n_2	t [s]	$T_{śr}$ [s]	I_x [kg m^2]
	Walec	....	....	....	....	....	X	X	X	
	nr	X	X	X	X	X	....	....	....	....

Zagadnienia do kolokwium:

1. Cechy ruchu postępowego i obrotowego oraz przykłady takich ruchów.
2. II zasada dynamiki bryły sztywnej. Scharakteryzować występujące w niej wielkości.
3. Definicja bryły sztywnej oraz jej momentu bezwładności.
4. Momenty bezwładności brył regularnych.
5. Budowa i działanie wahadła torsyjnego.
6. Jakie parametry ruchu mają drgania skrętne bryły doczepionej do sztywnego pręta?
7. Metoda pomiaru z wyprowadzeniem wzoru końcowego.

Literatura:

- D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, Tom 1 (Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003) rozdz. 11 i 12.
- J. Massalski, M. Massalska, *Fizyka dla inżynierów*, Część I - *Fizyka klasyczna*, (Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2005) rozdz. 6.7.1-6.7.3.
- H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, (Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1997) rozdz. III 8.0-8.1.

Opiekun ćwiczenia: dr Wiesław Polak