Ćw. 6. Wyznaczanie przyspieszenia ziemskiego przy pomocy wahadła prostego

Wprowadzenie

Ruchy obserwowane w przyrodzie możemy podzielić na dwa typy, zależnie od tego, czy poruszający się obiekt w trakcie trwania ruchu znajduje się w pobliżu jednego punktu w przestrzeni, czy przemieszcza się z miejsca na inne miejsce. Do pierwszego typu, zwanych drganiami można zaliczyć takie ruchy jak oscylacje wahadła sprężynowego, wahadła punktowego (matematycznego), wahadła fizycznego, drgania strun w instrumentach muzycznych. Zwykle, aby drgania mogły nastąpić, układ drgający musi zostać wzbudzony w chwili początkowej, a następnie drgania odbywają się bez ingerencji z zewnątrz. Takie drgania nazywa się drganiami swobodnymi. W realnym świecie trudno jest uzyskać realizację drgań swobodnych, ze względu na występujące opory ruchu, które powodują rozproszenie energii układu i z czasem zanik drgań. Dlatego do podtrzymania ruchu drgającego w praktyce musimy dostarczać ciągle energii. Wówczas mamy do czynienia z drganiami wymuszonym.
Drgania swobodne opisywane są poprzez następujące równanie:

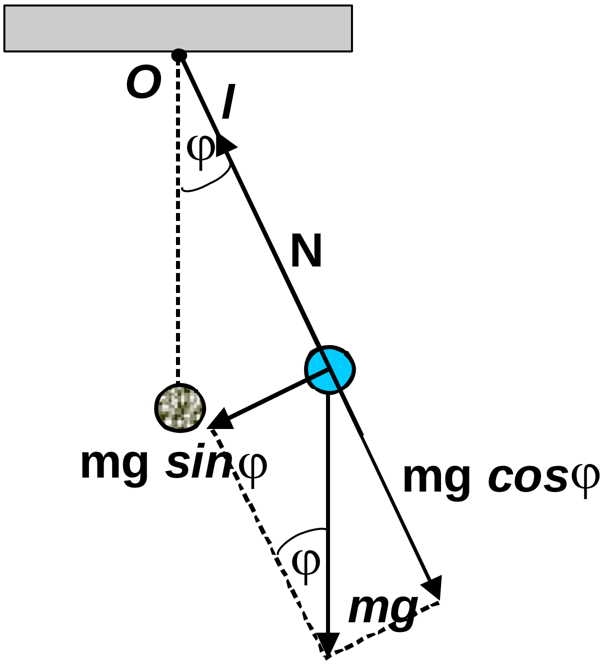
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0. \tag{1}$$

gdzie ω jest częstością drgań układu. Jest to równanie różniczkowe jednorodne drugiego rzędu. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja położenia obiektu *x(t)*, która jest funkcją periodyczną, następującej postaci:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi) \tag{2}$$

gdzie x_0 jest maksymalnym wychyleniem obiektu od punktu równowagi.

Jednym z bardziej znanych układów drgających jest wahadło proste, zwanym również wahadłem matematycznym. Wahadło matematyczne składa się z pręta lub nici nieważkiej o długości *l*, z jednej strony obciążonej masą *m* o rozmiarach punktowych, drugi koniec jest unieruchomiony w punkcie *O*. Cały układ jest zawieszony w polu grawitacyjnym. Schemat wahadła matematycznego zaprezentowano na rysunku 1.



Rys. 1. Wahadło matematyczne.

Podczas drgań jedyną siłą, która działa w układzie jest siła grawitacji, której kierunek względem kierunku równoległego do nici w trakcie ruchu zmienia się. Równanie ruchu, zgodnie z II prawem Newtona możemy zapisać w postaci:

$$m\vec{a} = \vec{Q}\,. \tag{3}$$

Ponieważ drgania odbywają się w płaszczyźnie i droga jest fragmentem okręgu możemy również zastosować II prawo Newtona dla ruchu po okręgu. Zgodnie z nim iloczyn momentu bezwładności obiektu względem osi (punktu) obrotu i przyspieszenia kątowego jest równe momentowi siły działającej na poruszający się obiekt. Wybór ten jest podyktowany tym, że położenie punktu wówczas można jednoznacznie określić poprzez podanie kąta odchylenia od pionu, jak pokazano na rysunku 1. Składowa siły ciężkości styczna do toru ruchu wnosi nie zerowy wkład do momentu siły, stąd równanie ruchu przyjmie postać:

$$ml^2\vec{\varepsilon} = -lmg\sin\varphi\,. \tag{4}$$

Natomiast składowa prostopadła jest zrównoważona przez siłę naciągu nici. Skracając masę, zapisując przyspieszenie kątowe jako druga pochodna po czasie oraz przenosząc wszystkie czynniki na lewą stronę, otrzymamy:

$$\frac{\partial^2\varphi(t)}{\partial t^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi(t) = 0 \tag{5}$$

Jeśli funkcję $\sin\varphi(t)$ rozwiniemy w szereg Taylora:

$$\sin\varphi(t) = \varphi(t) - \frac{\varphi^3(t)}{3!} + \frac{\varphi^5(t)}{5!} - \frac{\varphi^7(t)}{7!} + \ldots = 0 \tag{6}$$

Dla dostatecznie małych kątów φ wyrażonych w radianach możemy pominąć wyrazy wyższych rzędów rozwinięcia i przyjąć, że $\sin\varphi(t) = \varphi(t)$. Wówczas równanie opisujące drgania wahadła matematycznego przyjmie postać:

$$\frac{\partial^2\varphi(t)}{\partial t^2} + \frac{g}{l}\varphi(t) = 0 \tag{7}$$

gdzie, po podstawieniu

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \tag{8}$$

otrzymamy równanie drgań swobodnych wahadła matematycznego:

$$\frac{\partial^2 \varphi(t)}{\partial t^2} + \omega^2 \varphi(t) = 0 \tag{9}$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja kąta wychylenia w dowolnej chwili czasowej:

$$\varphi(t) = \varphi_m \sin(\omega t + \vartheta) \tag{10}$$

gdzie, φ_m jest kątem maksymalnego wychylenia, a ϑ jest fazą początkową. Obie stałe φ_m i ϑ można wyznaczyć z warunków początkowych ruchu, jeśli znamy prędkość kątową i kąt wychylenia dla *t=0* z równań:

$$\varphi(t) = \varphi_m \sin(\vartheta) \tag{11}$$

$$\frac{\partial \varphi(t)}{\partial t} = \omega \varphi_m \cos(\vartheta) \tag{12}$$

Z przedstawionego rozwiązania widzimy, że okres drgań wahadła prostego zależy tylko od długości nici i przyspieszenia ziemskiego, natomiast nie zależy od masy obiektu wykonującego ruch ani od wielkości kąta wychylenia:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{13}$$

Wynik ten pozwala na użycie wahadła matematycznego do wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego poprzez pomiar okresu drgań i długości wahadła:

$$g = \frac{4\pi^2}{T^2} l \tag{14}$$

Metoda pomiaru

W celu wyznaczenia przyspieszenia ziemskiego zgodnie z wyrażeniem (14) należy w sposób bezpośredni wyznaczyć długość wahadła oraz okres jego drgań. Długość wahadła to odległość punktu zaczepienia wahadła do środka masy zawieszonej na nici. Jeśli ciałem zawieszonym będzie kula to odległość punktu zawieszenia od środka masy będzie różnicą pomiaru długości wahadła (włącznie z kulką) i połowy średnicy kuli:

$$l = l_w - d/2 \tag{15}$$

Okres drgań wyznaczamy poprzez pomiar czas trwania dużej liczby pełnych wahnięć. Jeśli *n* jest liczbą pełnych drgań, a *t* czas ich trwania to okres będzie równy stosunkowi:

$$T = t/n \tag{16}$$

Biorąc pod uwagę powyższe wyrażenia, formuła na przyspieszenie ziemskie przyjmie postać:

$$g = \frac{4\pi^2 n^2}{t^2}(l_w - d/2) \tag{17}$$

Wykonanie ćwiczenia

1. Zmierzyć średnicę kulki przy pomocy suwmiarki.
2. Zwiesić kulkę na cienkim drucie miedzianym lub nierozciągliwej żyłce.
3. Po zawieszeniu kulki zmierzyć długość drutu od punktu zawieszenia do końca kulki. Wyniki pomiarów zapisać w tabelach:

L.p.	*d* –średnica kulki [mm]
1.	
2.	
3.	
….	

L.p.	l_w –długość wahadła [cm]
1.	
2.	
3.	
….	

4. Kilkakrotnie dokonać pomiaru czasu dużej liczby (*n>30*) pełnych drgań wahadła.
5. Wyniki pomiarów zapisać w tabeli:

L.p.	Liczba pełnych drgań -n	*t* - czas [s]
1.		
2.		
3.		
….		

6. Obliczyć okres drgań dla wahadła prostego.
7. Niepewność pomiaru oszacować tzw. metodą różniczkową.

Zagadnienia do kolokwium:
1. Wahadło sprężynowe, matematyczne i fizyczne.
2. Drgania harmoniczne nietłumione, tłumione i wymuszone.
3. Energia w ruchu harmonicznym.

Literatura:

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 2003. Tom 2.
2. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, *Wstęp do fizyki*, Wyd. Naukowe PWN, Warszawa 1991.
3. C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, *Mechanika*, PWN, Warszawa 1975.
4. J. Taylor, *Wstęp do analizy błędu pomiarowego*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1999.
5. G.L. Squires, *Praktyczna Fizyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1992.
6. H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna wspomagana komputerem*, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 2003.