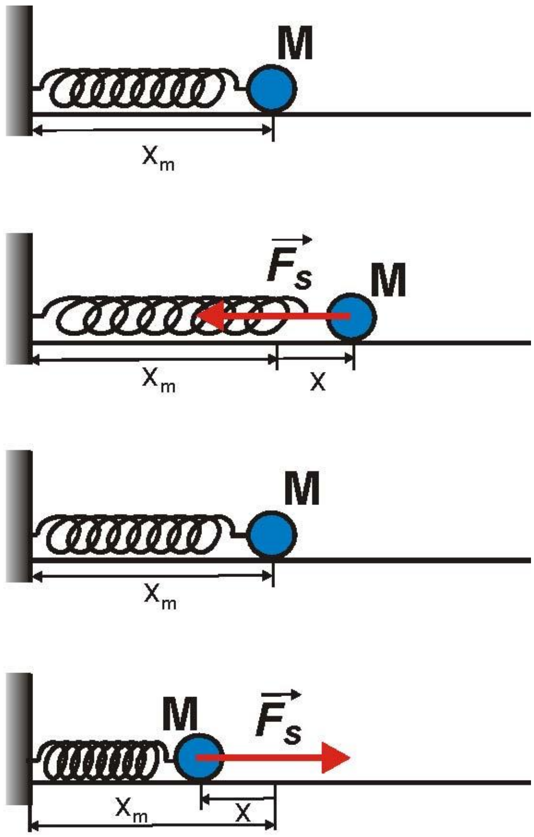
KATEDRA FIZYKI STOSOWANEJ

Ćw. 5. Wyznaczanie współczynnika sprężystości przy pomocy wahadła sprężynowego

Wprowadzenie

Ruch drgający należy do najbardziej rozpowszechnionych ruchów w przyrodzie. Szczególnym przypadkiem ruchu drgającego jest ruch harmoniczny, który odbywa się pod wpływem siły F liniowo zależnej od wychylenia x wokół pewnego punktu położenia $F=-kx$, gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności. Siła ta ma tę własność, że zmienia swój kierunek na przeciwny przy zmianie znaku wartości wychylenia. Przykładem takiej siły jest siła sprężystości pochodząca od sprężyny, jak pokazano na rysunku 1. W przedstawionym przykładzie współczynnik k jest współczynnikiem sprężystości sprężyny.



Rys. 1. Wahadło sprężynowe poziome.

Ruch kulki o masie m, zgodnie z II prawem Newtona jest opisany równaniem:

$$m\vec{a} = \vec{F}_S + \vec{F}_W \tag{1}$$

gdzie $\vec{a}$ jest przyspieszeniem, a $\vec{F}_S$ wektorem siły działającej na masę *m* pochodzącym od sprężyny. $\vec{F}_W$ jest sumą sił pochodzących z innych źródeł niż sprężyna. W naszym przypadku, przedstawionym na rys. 1, ruch odbywa się wzdłuż linii prostej, którą możemy oznaczyć jako oś X, z początkiem w położeniu równowagi masy (od ścianki w odległości równej długości swobodnej sprężyny x_m). Gdy pominiemy tarcie, jedyną siłą działającą wzdłuż osi X jest siła pochodząca od sprężyny. Siły działające na masę m w innych kierunkach niż w kierunku osi X równoważą się w naszym układzie. Wobec tego siła może być przedstawiona jako $\vec{F}_S = -kx(t)$, a równanie przyjmuje postać:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t). \tag{2}$$

Po prostych przekształceniach i podstawieniu

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \tag{3}$$

gdzie ω jest częstością własną układu, otrzymujemy następujące równanie opisujące drgania harmoniczne nie tłumione:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0. \tag{4}$$

Jest to równanie różniczkowe jednorodne drugiego stopnia. Rozwiązaniem tego równania jest zależność funkcyjna położenia x masy od czasu w postaci:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi) \tag{5}$$

o okresie $T = 2\pi/\omega$

Ponieważ $\omega = \sqrt{k/m}$, możemy otrzymać wyrażenie na okres wahadła sprężynowego:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{6}$$

Realizacja w praktyce poziomego wahadła sprężynowego, które wykonuje drgania niettłumione jest praktycznie nierealne ze względu na istnienie sił tarcia o podłoże. Gdy masę *m* zawiesimy na sprężynie wówczas otrzymamy wahadło pionowe, co pozwala na wyeliminowanie sił tarcia, ale pojawi się stała siła (ciężkości $\vec{Q}$) działająca na ciało podczas ruchu. Równanie ruchu dla takiego układu przyjmuje postać:

$$m\vec{a} = \vec{F}_S + \vec{Q}. \tag{7}$$

Ponieważ ruch odbywa się wzdłuż linii prostej możemy napisać:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) + mg. \tag{8}$$

Po prostych przekształceniach oraz po podstawieniu:

$$\omega^2 = \frac{k}{k}, \tag{9}$$

otrzymamy równanie:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = g. \tag{10}$$

Rozwiązaniem takiego równania jest następująca funkcja:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi) + x_1 \tag{11}$$

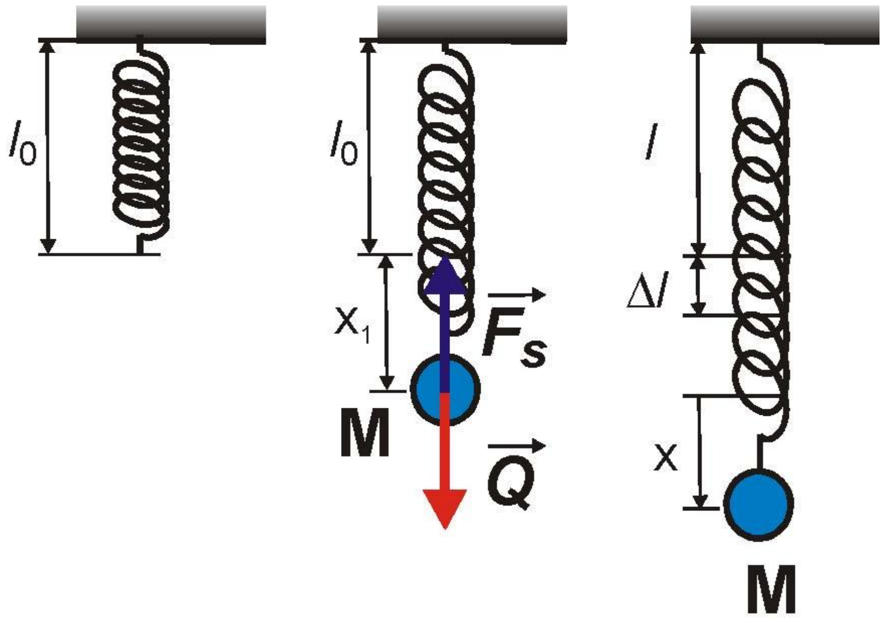
gdzie x_1 jest stałą, którą wyznaczamy z warunku równowagi sprężyny, gdy obiekt *m* spoczywa. W takiej sytuacji amplituda drgań x_0 jest zero i $x(t) = x_1$, gdzie x_1 jest wydłużeniem sprężyny w stanie równowagi. Wówczas siła ciężkości jest zrównoważona przez siłę sprężystości sprężyny, co oznacza, że:

$$kx_1 = mg \tag{12}$$

skąd

$$x_1 = \frac{mg}{k}. \tag{13}$$

Wyrażenie powyższe pozwala również na doświadczalne wyznaczenie stałej k, jeśli znamy masę obiektu zawieszonego na sprężynie i wydłużenie, które ten obiekt spowodował. Ostatecznie, możemy stwierdzić, że częstość drgań wahadła sprężynowego pionowego będzie taka sama jak dla wahadła poziomego, tylko punkt równowagi tego ruchu jest przesunięty.



Rys. 2. Wahadło sprężynowe pionowe.

W przypadku gdy sprężyna posiada masę, to wolno ją pominąć w sytuacji znacznie mniejszej masy sprężyny w stosunku do masy zawieszonego ciężarka. W innych przypadkach należy masę sprężyny uwzględnić. Dowolny fragment sprężyny o długości Δl ma masę:

$$\Delta m = \frac{\Delta l}{l_0} m_s, \tag{14}$$

gdzie m_s jest masą całej sprężyny, l_0 jest długością swobodną sprężyny. Jeśli wychylenie końcowego elementu sprężyny jest równe x (tyle samo co ciężarka zawieszonego), to wychylenie elementu sprężyny w odległości l od punktu zaczepienia jest równe $(l/l_0)x$. Natomiast prędkość tego elementu jest równa $(l/l_0)dx/dt$. Stąd energia kinetyczna fragmentu sprężyny jest równa:

$$\Delta E_{k,s} = \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{\Delta l}{2l_0} m_s \left(\frac{l}{l_0}\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{m_s}{2l_0^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 l^2 \Delta l. \tag{15}$$

Całkowita energia kinetyczna sprężyny jest wobec tego równa:

$$E_{k,s} = \frac{m_s}{2l_0^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \int_0^{l_0} l^2 dl = \frac{m_s}{2l_0^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{1}{3} l^3 = \frac{1}{6} m_s \left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \tag{16}$$

A energia kinetyczna układu (sprężyna i ciężarek) będzie wówczas równa:

$$E_{k,s} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{6} m_s \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3} m_s\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \tag{17}$$

Energia kinetyczna tego układu jest równoważna energii układu ze sprężyną nieważką, dla którego masa ciężarka została powiększona o 1/3 masy sprężyny. Stąd możemy napisać, że okres drgań takiego układu jest równy:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{1}{3} m_s}{k}} \ . \qquad (18)$$

Metoda pomiaru

Matoda1.

Na sprężynie zawieszamy pręt do mocowania obciążników. Następnie zwiększamy obciążenie sprężyny i mierzymy wydłużenie sprężyny pod wpływem danego obciążenia. Współczynnik sprężystości jest równy stosunkowi ciężaru zawieszonego na sprężynie do wartości wydłużenia spowodowanego tym obciążeniem, tzn. $k = mg / x_1$.

Metoda 2

Wprawiając obciążoną sprężynę w drgania, mierzymy okres drgań, a współczynnik sprężystości k wyznaczamy z wzoru na okres drgań

$$T_t = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_i m_i + m_p + \frac{1}{3} m_s}{k}} \qquad (19)$$

gdzie $\sum_i m_i$ jest sumą mas obciążników uwzględnionych w danym przypadku. Okres drgań wyznaczamy mierząc czas wielu pełnych drgań, żeby dokładność jego pomiaru była duża.

Wykonanie ćwiczenia

Metoda 1

1. Ważymy na wadze szalkowej elementy naszego układu drgającego, wyznaczając masy: sprężyny m_s, pręta do mocowania obciążników m_p, oraz obciążniki m_i.
2. Zawieszamy na sprężynie pręt do mocowania odważników.
3. Następnie kolejno dodajemy obciążniki ($m_1, m_2, m_3, ...$) i mierzymy wydłużenie sprężyny pod wpływem całkowitego ciężaru zawieszonego na sprężynie. Otrzymane wartości wpisujemy do tabeli:

<table>
<tr><th rowspan="2">Numer sprężyny</th><th colspan="2">Ciężarek</th><th colspan="2">Położenie wskaźnika</th><th rowspan="2">Wydłużenie $x = l - l_0$ [m]</th><th rowspan="2">Współczynnik sprężystości $k = mg/x$ [N/m]</th><th rowspan="2">k$k_{śr}$ [N/m]</th></tr>
<tr><th>Masa m [kg]</th><th>Ciężar Q = mg [N]</th><th>Bez obciążenia l_0 [m]</th><th>Z obciążenie m l [m]</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Do obliczeń przyjąć wartość $g = 9{,}80665 \frac{m}{s^2}$

Wszystkie pomiary powinny być zapisywane bez obróbki i przed zapisaniem odczytanej wartości nie należy przeprowadzać w pamięci żadnych, nawet trywialnych obliczeń.

4. Wartość stałej sprężystości *k* obliczamy dla każdego pomiaru ze wzoru:

$$k = \frac{m_i g}{x_i} \tag{20}$$

a następnie obliczamy wartość średnią z tych pomiarów.

Metoda 2

1. Wykonujemy czynności opisane w punktach 1 i 2 metody 1.
2. Wyznaczamy okres drgań (*T*) dla poszczególnych zestawów obciążników mierząc czas *t* dużej liczby *n* (min. 30) pełnych drgań układu. Okres drgań $T = t/n$. Wyniki pomiarów wpisujemy do tabeli

Masa **m** [g]	Czas n = ……… drgań **t** [s]			**t**$_{śr}$ [s]	Okres drgań $T = t_{śr}/n$ [s]	Współczynnik sprężystości $k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$ [N/m]

3. Dla poszczególnych obciążeń przekształcając wyznaczamy współczynnik sprężystości ze wzoru:

$$k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}, \tag{21}$$

gdzie

$$m = m_p + \frac{1}{3} m_s + \sum_i m_i ,$$

gdzie m_p jest masą pręta, m_s masą sprężyny, a $\sum_i m_i$ jest sumą mas obciążników uwzględniona w danym przypadku.

Niepewność pomiaru współczynnika sprężystości sprężyny szacujemy wybrana metodą zastosowaną odpowiednio do wzorów (20) i (21). We wzorze (21) za Δm przyjmujemy sumę niepewności wyznaczania poszczególnych mas, czyli

$\Delta m = \Delta m_p, + 1/3 \Delta m_s + \Delta \sum_i m_i$

<u>Zagadnienia do kolokwium:</u>

1. Wahadło sprężynowe, punktowe, fizyczne.
2. Drgania harmoniczne nietłumione, tłumione i wymuszone.
3. Energia w ruchu harmonicznym.

Literatura:

1. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, *Podstawy fizyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003. Tom 2.
2. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, *Wstęp do fizyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1991.
3. C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, *Mechanika*, PWN, Warszawa 1975.
4. J. Taylor, *Wstęp do analizy błędu pomiarowego*, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1999.
5. G.L.Squires, *Praktyczna Fizyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1992.
6. H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna wspomagana komputerem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003.