KATEDRA FIZYKI STOSOWANEJ

Ćw. 3. Wyznaczanie modułu Younga metodą jednostronnego rozciągania

Wprowadzenie

Ze względu na budowę struktury cząsteczkowej, ciała stałe możemy podzielić na amorficzne oraz krystaliczne. Ciała amorficzne zwane bezpostaciowymi (np. szkła czy żywice) posiadają atomy rozmieszczone w sposób nieuporządkowany (przypadkowy), natomiast ciała krystaliczne charakteryzują się uporządkowaną strukturą tworzącą regularną sieć atomów lub cząsteczek.

Ciała stałe są w większości ciałami polikrystalicznymi tzn. stanowią zbiór połączonych ze sobą krystalitów czyli małych ziaren o budowie krystalicznej zorientowanych względem siebie przypadkowo i mających różne kształty.

Atomy tworzące sieć krystaliczną pozostają w równowadze w wyniku wzajemnej kompensacji sił przyciągania i odpychania. Pod wpływem działania zewnętrznej siły odkształcającej następuje zmiana położenia atomów. Prowadzi to do naruszenia równowagi pomiędzy siłami wzajemnego oddziaływania i w związku z tym w strukturze sieci pojawiają się wewnętrzne siły sprężystości przeciwdziałające siłom zewnętrznym. Jeżeli po ustaniu zewnętrznej siły odkształcającej sieć krystaliczna powraca do pierwotnego kształtu, to odkształcenie takie nazywamy sprężystym (elastycznym). Jeżeli siła odkształcająca przekroczy pewną wartość krytyczną, następuje trwałe odkształcenie kryształu. Deformacja sieci krystalicznej jest wówczas tak duża, że atomy zajmują nowe trwałe położenia, w których następuje ponowna równowaga sił odpychania i przyciągania. Odkształcenie materiału poddanego takim dużym, krytycznym siłom nazywamy odkształceniem trwałym (plastycznym). Dalsze zwiększanie wartości oraz czasu trwania siły może spowodować nieodwracalne zerwanie wiązań między molekułami czyli rozerwanie (zniszczenie) materiału.

Z punktu widzenia właściwości mechanicznych możemy podzielić materiały na kruche i plastyczne. Materiały kruche ulegają zniszczeniu przy bardzo niewielkich odkształceniach. Materiały plastyczne ulegają zniszczeniu przy znacznych odkształceniach. Do pierwszej kategorii materiałów można zaliczyć przykładowo: żeliwo, kamień, szkło, gips. Do drugiej kategorii zaliczamy np. miedź, złoto, stal niskowęglową. Podział na ciała kruche i plastyczne jest względny, gdyż istnieją materiały, które w wysokiej temperaturze i przy wolno działającej sile są plastyczne, a stają się kruche w miarę obniżania temperatury i przy szybko działającej sile.

Ze względu na zmianę geometrii ciał wprowadzamy pojęcia *odkształcenia postaciowego*, w którego trakcie zmienia się jedynie kształt ciała i *odkształcenia objętościowego*, kiedy to zmienia się objętość ciała bez zmiany kształtu. W rzeczywistych procesach zachodzą na ogół obydwa odkształcenia jednocześnie.

W końcu XVII w. angielski fizyk Robert Hooke na drodze doświadczeń, odkrył prawo opisujące zjawisko występujące w ciele odkształcanym sprężyście. Hooke stwierdził, że siła oporu sprężystego rośnie liniowo wraz z odkształceniem. Ilościowo tę zależność wyraża się równaniem:

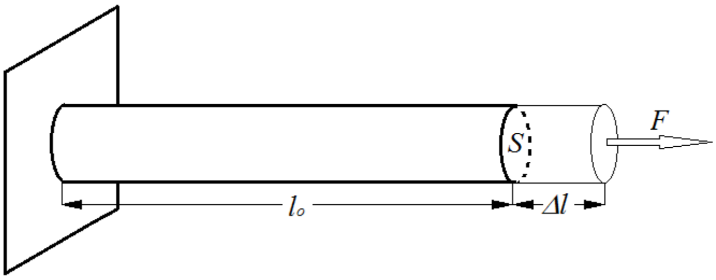
$$\varepsilon_x = k \cdot \sigma, \qquad (1)$$

gdzie: ε_x – odkształcenie względne dla określonego kierunku, k – współczynnik proporcjonalności zależny od sposobu odkształcania i rodzaju ciała stałego, σ - ciśnienie zwane inaczej naprężeniem wewnętrznym.

Odkształcenia osiągamy przez: rozciąganie, ściskanie, zginanie, skręcanie i ścinanie. W odkształconym ciele stałym powstają siły wewnętrzne przeciwdziałające siłom zewnętrznym powodującym odkształcenie. Przy ściskaniu ujawniają się siły wzajemnego odpychania cząsteczek, a przy rozciąganiu – siły przyciągania. Te siły wewnętrzne F_w, przypadające na jednostkę powierzchni S pola przekroju prostopadłego do ich kierunku działania są naprężeniem wewnętrznym σ.

$$\sigma = \frac{F_w}{S} \quad \left[\frac{N}{m^2}\right]. \tag{2}$$

Dla dobrego zobrazowania prawa Hooke'a rozważymy najprostszy przypadek, czyli rozciąganie ciała stałego (np. pręta) z rysunku 1.



Rys. 1. Wydłużenie pręta pod wpływem siły rozciągającej.

Jeżeli l_0 jest długością początkową pręta, Δl - przyrostem długości pręta, F - siłą powodującą wydłużenie a S - polem przekroju poprzecznego pręta oraz wiedząc, że zgodnie z prawem akcji i reakcji $F_w = F$ to na podstawie zależności (1) oraz (2), prawo Hooke'a możemy zapisać

$$\frac{\Delta l}{l_0} = k \cdot \frac{F}{S}, \tag{3}$$

gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności dla danego materiału a $\frac{\Delta l}{l_0}$ stanowi względny przyrost długości, zwany także wydłużeniem względnym ε. Dla rozważanego przypadku możemy napisać prawo Hooke'a w postaci wzoru na naprężenie wewnętrzne σ.

$$\sigma = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \tag{4}$$

Jeżeli przyjmiemy, że $E = \frac{1}{k}$, to ostatecznie możemy zapisać:

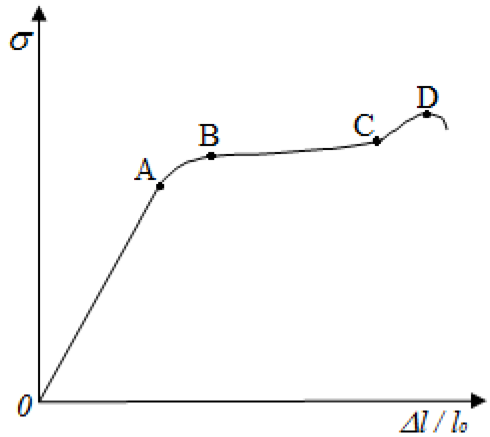
$$\sigma = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}, \tag{5}$$

gdzie E jest współczynnikiem proporcjonalności, zwanym modułem Younga, Sens fizyczny modułu Younga określimy łatwo na podstawie wzoru (5), z którego wynika, że jeżeli $\Delta l = l_0$, *to* $E = \sigma$. Stąd wynika sformułowanie, że **Moduł Younga** jest wielkością charakterystyczną dla danej substancji i jest równy naprężeniu, przy którym następuje podwojenie długości ciała. Na ogół podwojenie długości ciał nie udaje się, ponieważ zwykle zanim to nastąpi, ciało ulega rozerwaniu. Wymiarem modułu Younga, zwanym także modułem sprężystości, jest $\frac{N}{m^2}$. Moduł Younga używany jest do określenia właściwości sprężystych ciał, a jego wielkość określa wytrzymałość materiału na różne czynniki mechaniczne.

Podczas rozciągania ciała zmniejsza się jego pole przekroju poprzecznego (nie uwzględnione na rysunku 1), mierzone w kierunku prostopadłym do kierunku działania siły; mówimy, że następuje przewężenie ciała. Stosunek względnego przewężenia do względnego wydłużenia nosi nazwę **współczynnika Poissona** i jest wielkością charakterystyczną dla danego materiału. Np. dla pręta o przekroju kołowym o promieniu r i długości l współczynnik Poissona μ wyrażamy:

$$\mu = \frac{\Delta r}{r} : \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta r}{r} \cdot \frac{l}{\Delta l}, \tag{6}$$

gdzie Δl jest bezwzględnym przyrostem długości a Δr bezwzględnym zmniejszeniem promienia.



Rys. 2. Naprężenie wewnętrzne jako funkcja względnego przyrostu długości rozciąganego ciała.

Wykres naprężenia wewnętrznego jako funkcji wydłużenia względnego rozciąganego drutu lub pręta przedstawia rys. 2. Przedział $0 – A$ na wykresie jest zakresem sprężystości, w którym ze względu na liniowy charakter stosuje się prawo Hooke'a. Punkt B oznacza koniec zakresu sprężystości. Przedział $B – C$ jest zakresem plastyczności materiału. Punkt D stanowi granicę wytrzymałości materiału, której przekroczenie powoduje rozerwanie drutu czy pręta. Materiały o stosunkowo dużym przedziale $0 – B$ nazywamy materiałami sprężystymi (np. stal, guma). Dla niektórych materiałów najdłuższa część wykresu zawiera się pomiędzy punktami $B – C$. Takie materiały nazywamy plastycznymi (np. ołów, cyna). Materiały mające bardzo mały zakres sprężystości i plastyczności nazywamy kruchymi (np. żeliwo, beton).

Metoda pomiaru

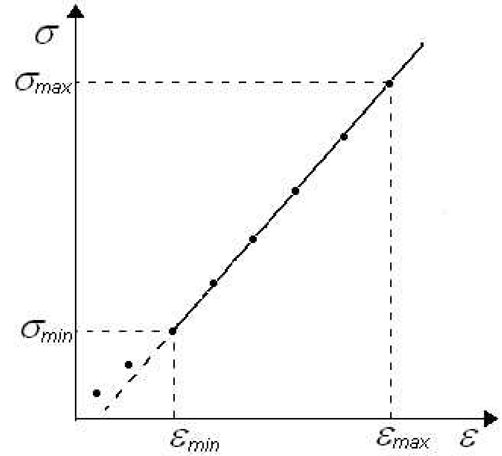
Do wyznaczenia modułu Younga danego materiału stosujemy wykonany z niego drut o przekroju okrągłym zamocowany w pozycji pionowej jednym końcem w uchwycie. Do drugiego końca przyłożona jest siła zewnętrzna F w postaci ciężaru obciążników P ($F = P$) powodująca rozciąganie badanego materiału. Siła ta równa ciężarowi obciążników o masie m, wynosi $P = m \cdot g$, gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim równym $9{,}81\ m/s^2$. Zestaw służący do wykonania pomiarów przedstawia rysunek 4.

Celem naszym jest wykonanie wykresu jak na rysunku 2 dla zakresu pomiarów nie przekraczających punktu A (zakres stosowalności prawa Hooke'a) oraz wyznaczenie na podstawie tego wykresu modułu Younga badanego materiału. Do pomiarów naprężenia wewnętrznego zastosujemy zależność (2) , w której siła jest równa ciężarowi obciążników, natomiast powierzchnią jest pole przekroju drutu. Dla drutu o przekroju kołowym o średnicy d pole powierzchni wynosi

$S = \dfrac{\pi d^2}{4}$. Zatem naprężenie wewnętrzne σ oraz wydłużenie względne ε (patrz rys.1) możemy zapisać wzorami odpowiednio (7a) oraz (7b):

$$\text{a)} \quad \sigma_i = \frac{4 \cdot m_i \cdot g}{\pi \cdot d_{śr}^2} \quad , \qquad \text{b)} \quad \varepsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_0} \quad , \qquad (7)$$

gdzie: m_i – masy obciążające badany pręt w kilogramach, g – przyspieszenie ziemskie (9,81 m/s^2), $d_{śr}$ – średnia średnica pręta w metrach, Δl_i – przyrosty długości pręta w metrach, l_0 - długość początkowa pręta w metrach, i oznacza numer poszczególnego pomiaru.



Rys. 3. Rzeczywista zależność między naprężeniem i odkształceniem dla odkształceń proporcjonalnych.

Rys. 4. Widok stanowiska pomiarowego

Moduł Younga wyznaczamy z wykresu, którego przykład przedstawiony jest na rysunku 3. Jest on równy współczynnikowi kierunkowemu prostej, który to możemy obliczyć stosując poniższy wzór:

$$E = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}} \quad . \qquad (8)$$

Wykonanie ćwiczenia

1. Za pomocą zawleczki zamocować górnym końcem badany pręt (drut) do wspornika ***W*** zamocowanego w ścianie (patrz rys. 4).
2. Dolny koniec pręta zamocować za pomocą cieńszej zawleczki do sworznia metalowego elementu $\boldsymbol{P_0}$, na który będą nakładane obciążniki $\boldsymbol{P_i}$.
3. Metalowe ramię $\boldsymbol{R_1}$ ustawić tak, żeby badany pręt był ukierunkowany idealnie pionowo.
4. Do ramienia $\boldsymbol{R_2}$ (umieszczonego poniżej $\boldsymbol{R_1}$) zamocować mikromierz ***M*** tak, ażeby jego ruchomy trzpień stykał się z dolnym końcem elementu $\boldsymbol{P_0}$.
5. Za pomocą przymiaru liniowego, zamocowanego na ścianie obok prętów, zmierzyć długość początkową l_0 badanego pręta.
6. Za pomocą śruby mikrometrycznej dokonywać 15 do 20 pomiarów średnicy pręta d w różnych miejscach na kierunkach wzajemnie prostopadłych i obliczyć wartość średnią $d_{śr}$.
7. Wyzerować mikromierz.

8. Zdjąć pierwszy obciążnik $\boldsymbol{P_1}$ ze wspornika $\boldsymbol{W}$ i umieścić go na sworzniu elementu $\boldsymbol{P_0}$.
9. Dokonać odczytu zmiany długości Δl_1 na skali mikromierza.
10. Zdjąć drugi obciążnik $\boldsymbol{P_2}$ ze wspornika $\boldsymbol{W}$ i umieścić go na obciążniku $\boldsymbol{P_1}$ umieszczonym uprzednio na elemencie $\boldsymbol{P_0}$.
11. Dokonać odczytu Δl_2 na mikromierzu (począwszy od położenia początkowego).
12. Postępować analogicznie z następnymi obciążnikami. Wykorzystujemy wszystkie posiadane obciążniki, chyba że prowadzący ćwiczenia zaleci mniejszą liczbę (stalową cienką strunę możemy obciążyć maksymalnie 5-cioma obciążnikami).
13. Pomiarów dokonać również dla zmniejszanego obciążenia (obciążniki $\boldsymbol{P_i}$ zdejmujemy z elementu $\boldsymbol{P_0}$ i wkładamy na wspornik $\boldsymbol{W}$.
14. Jeżeli prowadzący ćwiczenia nie poda ciężarów obciążników, należy je zważyć.
15. Obliczyć wartości naprężenia σ_i oraz odkształcenia względnego ε_i dla poszczególnych obciążeń według wzorów (7ab).
16. Na podstawie obliczonych wartości σ_i i ε_i wykonać wykres $\sigma = f(\varepsilon)$ jak na rys. 3. Wartości σ_{min} i ε_{min} oraz σ_{max} i ε_{max} wyznaczyć z prostoliniowej części charakterystyki.
17. Na podstawie wykresu obliczyć moduł Younga E dla badanego pręta wg wzoru (8). Moduł E można również wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów z równania prostej $\sigma = A\varepsilon + B$, gdzie $A = E$.
18. Oceny maksymalnej niepewności pomiaru modułu Younga można dokonać metodą różniczkowania, wykorzystując zależność 8 gdzie po podstawieniu zależności (7) mamy ostatecznie:

$$E = \frac{4 g l_0 \Delta m}{\pi d^2 \Delta l} \quad , \tag{9}$$

gdzie $\Delta m = m_{\max} - m_{\min}$ oraz $\Delta l = l_{\max} - l_{\min}$.

Za maksymalne bezwzględne niepewności występujące we wzorze przyjąć: Δl_0 – niepewność odczytu z przymiaru liniowego, Δd – największe odchylenie od wartości średniej plus najmniejsza działka na skali śruby mikrometrycznej, $\Delta(\Delta m)$ – podwójna wartość niepewności ważenia masy obciążników, $\Delta(\Delta l)$ – podwójna wartość niepewności odczytu na mikromierzu.

Oceny niepewności pomiaru modułu Younga ΔE można także dokonać metodą najmniejszych kwadratów dla punktów leżących na prostoliniowej części charakterystyki, wówczas $\Delta E = \Delta A$.

Tabela pomiarowa 1. Pomiary średnicy drutu.

nr pomiaru	1	2	3	. . .	Wartość średnia	
d [m]				. . .	$d_{śr.}$ [m]	

<u>Tabela pomiarowa 2.</u> Wyznaczanie modułu Younga.

seria	nr pom.	P [N]	Δl_i [$\times 10^{-3}$ m]	l_0 [m]	$d_{śr}$ [m]	S [m^2]	σ_i [$\times 10^6$ N/m^2]	ε	E [N/m^2]	$E_{śred}$ [N/m^2]
zwiększanie obciążenia	1									
	2									
	3									
	⋮	⋮	⋮				⋮	⋮	⋮	
zmniejszanie obciążenia	1									
	2									
	3									
	⋮	⋮	⋮				⋮	⋮	⋮	

<u>Zagadnienia do kolokwium:</u>

1. Rodzaje ciał stałych.
2. Rodzaje odkształceń.
3. Pojęcie odkształcenia względnego i naprężenia.
4. Prawo Hooke'a.
5. Zależność odkształcenia względnego w funkcji naprężenia.
6. Wyznaczanie modułu Younga metodą jednostronnego rozciągania.

<u>Bibliografia</u>:

1. Massalski J., Massalska M., *Fizyka dla inżynierów*. WN-T, Warszawa, 2008, tom 1.
2. Halliday D., Resnick R., Walker J., *Podstawy fizyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2003, tom 2.
3. Szydłowski H., *Pracownia fizyczna*. PWN, Warszawa, 1994.