

Ćw. 8. Wyznaczanie współczynnika lepkości dynamicznej cieczy metodą Stokesa

Wprowadzenie

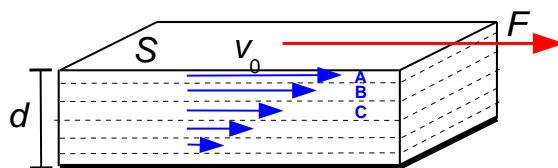
Ciecze stanowią jedną z trzech faz, obok gazu i ciała stałego, w jakich według tradycyjnego podziału mogą występować substancje w przyrodzie. Jej cechą makroskopową jest zjawisko płynięcia pod wpływem siły zewnętrznej. To właśnie dzięki niemu ciecz wlewa do naczynia zawsze wypełni dolną jego część i wytworzy płaską powierzchnię swobodną pod wpływem pola grawitacyjnego. Czas potrzebny do dostosowania początkowego kształtu wlanej cieczy do naczynia zależy głównie od jej parametru fizycznego – lepkości. To ona decyduje jak szybko może ciecz płynąć pod wpływem siły zewnętrznej, tu swojego ciężaru. Różnicę łatwo można zaobserwować, gdy mamy do czynienia z cieciami tak różnymi pod względem lepkości jak woda czy płynny miód.

Ruch fragmentów cieczy podczas jej przepływu może mieć charakter ruchu burzliwego lub laminarnego/warstwowego. W tym pierwszym przypadku ruch cieczy jest niestabilny w czasie, gdyż tworzą się w nim przemieszczające się i nietrwałe wiry. Dzięki tym wirom zachodzi intensywne mieszanie się różnych obszarów cieczy. W drugim przypadku wiry nie powstają, a sam przepływ odbywa się stabilnymi w czasie strugami. W przypadku płynięcia cieczy po płaskiej powierzchni, takie strugi mają kształt warstw równoległych do tej powierzchni.

Ruch laminarny cieczy pokazany na rys. 1 pozwala sformułować ważną zależność definiującą lepkość. Jeśli siła zewnętrzna działa na powierzchnię S , np. folii położonej na powierzchnię cieczy, to zacznie ona poruszać się wraz z najwyższą warstwą cieczy z prędkością v_0 , a głębsze warstwy mają coraz mniejszą prędkość aż do wartości zerowej przy podłożu (patrz rys.1). Prędkość warstw cieczy jest wprost proporcjonalna do odległości od podłoża, więc mamy do czynienia ze stałym gradientem prędkości w kierunku pionowym $\Delta v/\Delta y$. Ma on wartość v_0/d , gdzie d jest grubością warstwy cieczy. Siła potrzebna do wywołania takiego ruchu cieczy wynosi

$$F = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} S, \quad (1)$$

gdzie η jest współczynnikiem lepkości dynamicznej cieczy, której jednostką jest $\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ czyli $\text{Pa}\cdot\text{s}$. Siła z jaką działa ciecz na przesuwaną powierzchnię S ma cechę obecną w siłach tarcia – zawsze jest skierowana przeciwnie do prędkości tej powierzchni. Siła ta powstaje ona na skutek wzajemnego oddziaływania warstewek cieczy (np. A, B i C na rys. 1), na jakie dzielimy myślowo całą warstwę. Zawsze warstewka wolniejsza będzie spowalniała ruch szybszej (np. B spowalnia A) a sama ciągnie do przodu niższą, wolniejszą warstwę (np. B pociąga C).



Rys. 1. Rozkład prędkości w warstwie cieczy o grubości d na której górną powierzchnię S działa siła F .

Istnienie sił oporu między przesuwanymi się warstwami można wytłumaczyć analizując ruch cząsteczek cieczy. Mają one w cieczach dość dużą swobodę przemieszczania się wskutek drgań termicznych w odróżnieniu od ciał stałych, gdzie taki ruch jest praktycznie niemożliwy. Dlatego też tylko cząsteczki w cieczach mogą w czasie zderzeń z sąsiadami podczas drgań termicznych zmieniać swoje położenie, gdy między nieregularnie rozmieszczonymi najbliższymi cząsteczkami pojawia się puste miejsce do obsadzenia. Takie zmiany położenia prowadzą do chaotycznego ruchu cząsteczek w obrębie cieczy, czyli ich dyfuzji. Na skutek takiego ruchu dyfuzyjnego cząsteczki z warstwy poruszającej się/płynącej wolniej mogą przejść do tej szybszej, np. z B do A na rys. 1. Tuż po przejściu mają mniejszą prędkość w kierunku przepływu. Żeby uzyskać prędkość równą tej, jaką mają jej nowi sąsiedzi z warstwy A, trzeba ich prędkość a więc i pęd w kierunku przepływu zwiększyć. Zgodnie z II zasadą dynamiki Newtona taka zmiana pędu wymaga zadziałania zewnętrznej siły F , zmuszającej warstwę A i inne do ruchu. Taki mechanizm ruchu cząstek cieczy oznacza że wartość lepkości dynamicznej η zależy nie tylko od rodzaju cieczy (wielkość i masa cząsteczki, oddziaływanie międzycząsteczkowe) ale i od jej temperatury (η maleje ze wzrostem temperatury). Bardzo wyraźnie widać to w przypadku np. smoły, której lepkość zmienia się gwałtownie w przedziale temperatur np. od 0 °C do 100 °C, czy oleju poddanemu ogrzewaniu.

Metoda pomiaru

Pomiar współczynnika lepkości dynamicznej można oprzeć na zjawisku oporu dynamicznego jaki wywiera ciecz na poruszające się w niej ciała. W metodzie Stokesa wykorzystuje się ciała w kształcie kuli o znanym promieniu r . Gdy taka kulka porusza się w cieczy z prędkością v na tyle małą, że ruch cieczy wokół kulki będzie laminarny, działa na nią siła oporu o wartości

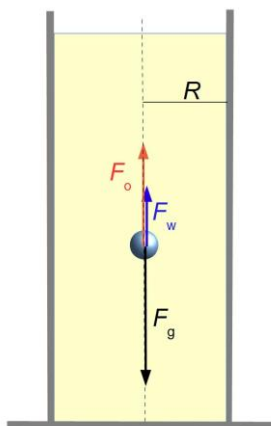
$$\vec{F}_o = -6\pi\eta r \vec{v}, \quad (2)$$

nazywana siłą Stokesa od nazwiska brytyjskiego fizyka i odkrywcy tego prawa George'a Stokesa z połowy XIX w. Znak „-” w równaniu 2 oznacza, że siła oporu jest zawsze przeciwnie skierowana do prędkości kulki, co jest charakterystyczne dla tego rodzaju sił. Z wzoru 2 wynika, że kulki o większym promieniu lub większej prędkości będą doznawały większego oporu ośrodka.

Żeby określić wartość F_o i z równania 2 obliczyć η , wykorzystuje się ruch kulek o gęstości znacznie większej od gęstości cieczy, do której są wrzucane. Jak pokazuje to rys. 2, na taką kulkę w cieczy działają trzy siły: ciężkości F_g , oporu F_o (siła Stokesa) i wyporu F_w . Początkowo siły te nie równoważą się, gdyż siła Stokesa jest zbyt mała ze względu na małą prędkość v , więc kulka porusza się ruchem przyspieszonym. Po krótkim czasie osiąga jednak taką prędkość, że siła wyporu i siła Stokesa równoważą ciężar, tzn.

$$F_o + F_w = F_g \quad (3)$$

i wtedy jej ruch staje się jednostajny. Z równania 6 możemy obliczyć F_o , gdyż pozostałe dwie siły



Rys. 2. Siły działające na kulkę spadającą w cieczy wlanej do cylindra o promieniu R .

zależą od łatwych do określenia wielkości: objętości kulki V i jej gęstości ρ_k oraz gęstości cieczy ρ_c . Siła ciężkości wynosi $F_g = mg = \rho_k Vg$, gdzie masa kulki m i przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Zgodnie z prawem Archimedesesa, siła wyporu cieczy jest równa $F_w = \rho_c Vg$. Wprowadzając wyrażenia na te dwie siły do przekształconego równania 3 w postaci $F_o = F_g - F_w$, otrzymujemy

$$F_o = Vg(\rho_k - \rho_c). \quad (4)$$

Po podstawieniu za objętość kuli $V = 4\pi r^3/3$ a za F_o siłę Stokesa daną zależnością 2, mamy

$$6\pi\eta r v = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_k - \rho_c). \quad (5)$$

Uwzględniając, że prędkość ruchu kulki jest stosunkiem drogi S pokonanej przez nią w ruchu jednostajnym do czasu t tego ruchu, czyli $v = S/t$, możemy już obliczyć współczynnik lepkości dynamicznej

$$\eta = \frac{2r^2 g(\rho_k - \rho_c)t}{9S}. \quad (6)$$

Gdy promień kulki r zastąpimy we wzorze 6 połową jej średnicy, czyli zależnością $r = d/2$, otrzymamy końcowy wzór:

$$\eta = \frac{d^2 g(\rho_k - \rho_c)t}{18S}. \quad (7)$$

Wynika z niego, że obliczenie η wymaga znajomości wartości tablicowej materiału kulki ρ_k , gęstości cieczy ρ_c i przyspieszenia ziemskiego g oraz pomiaru: średnicy kulki d , czasu spadania t kulki oraz drogi S , jaką przebywa w tym czasie.

Obliczenia współczynnika lepkości mogą być dokładniejsze gdy zastosuje się zmodyfikowany wzór 2 w postaci zaproponowanej przez Ladenburga i podanej wzorem 8. Uwzględnia on fakt, że ruch kulki odbywa się w cieczy ograniczonej ściankami cylindra, a nie w nieograniczonej objętości cieczy. Trzeba więc przyjąć, że ciecz opływając kulkę musi mieć prędkość zerową przy ściankach cylindra, co utrudnia jej przepływ i zwiększa dlatego wartość siły oporu. Zakładając, że ruch kulki odbywa się wzdłuż osi cylindra o promieniu R , siła oporu wynosi:

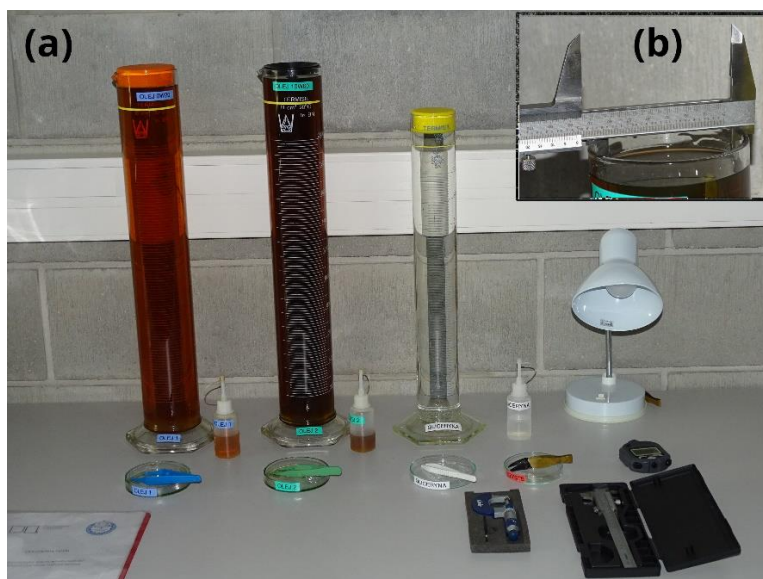
$$\vec{F}_o = -6\pi\eta r \vec{v} \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right). \quad (8)$$

Taka poprawka oznacza, że wzór do obliczania współczynnika lepkości przyjmuje teraz postać

$$\eta = \frac{d^2 g(\rho_k - \rho_c)t}{18S \left(1 + 2,4 \frac{d}{D}\right)}. \quad (9)$$

Dokładniejsze obliczenie η wymaga więc: a) znajomości wartości tablicowych przyspieszenia ziemskiego g , gęstości materiału kulki ρ_k i gęstości cieczy ρ_c oraz b) pomiaru średnicy kulki d , średnicy wewnętrznej cylindra D , czasu spadania t kulki oraz drogi S , jaką wtedy przebywa.

Wykonanie zadania



Rys. 3. Wygląd stanowiska pomiarowego z przyrządami niezbędnymi do pomiaru: cylinder z badaną cieczą, szalka Petriego z kulkami szklanymi i pęsetą (suchą) do manipulowania nimi, szalka z cieczą i pęsetą do zamoczenia kulek, suwmiarka, mikromierz, przymiar liniowy, stoper.

1. Skompletować zestaw przyrządów pokazany na rys. 3. Ciecz do badania wybiera prowadzący.
2. Wybrać suchą pęsetą dowolną kulkę z szalki i zmierzyć jej średnicę d mikromierzem.
3. Zmierzoną kulkę przenieść do szalki z cieczą. Korzystając z drugiej pęsety, zamoczyć całą powierzchnię kulki, aby wyeliminować ewentualne pęcherzyki powietrza doczepione do kulki.
4. Zamoczoną kulkę przenieść do górnego otworu cylindra i wrzucić na jego osi, w czym pomaga specjalny otworek w pokrywie i jej lejkowaty kształt.
5. Zmierzyć stoperem czas t spadania kulki na drodze między dwoma wybranymi i odległymi liniami pomiarowymi zaznaczonymi na ścianie bocznej cylindra do oznaczenia jego pojemności. W celu ułatwienia obserwacji ruchu kulki szklanej w cylindrze z ciemną cieczą zaleca się podświetlić go z tyłu lampką w postaci pionowego paska LED.
6. Powtórzyć czynności od punktu 2 do 5 dla wybranych około 10 kul, najlepiej o różnej wielkości.
7. Zmierzyć przymiarem liniowym odległość S między wykorzystaną do pomiaru linią górną i dolną na cylindrze.
8. Zmierzyć średnicę wewnętrzną D cylindra przy pomocy suwmiarki po zdjęciu pokrywy cylindra z cieczą (patrz rys. 3b). Żeby uwzględnić możliwość, że jej przekrój różni się nieco od kołowego, pomiar R wykonać kilkakrotnie (np. 3-4 razy) za każdym razem przykładając suwmiarkę pod różnymi kątami.
9. Odczytać na termometrze ustawionym na stoliku temperaturę powietrza w laboratorium i przyjąć ją jako temperaturę cieczy. Jej wartość podać w sprawozdaniu np. w nagłówku tabeli.
10. Wpisać uzyskane dane do tabeli pomiarowej. Na podstawie uzyskanych wartości pomiarów, ze wzoru 7 lub 9 (wybieramy sami, jeśli nie określi tego prowadzący) obliczyć szukaną wartość współczynnika lepkości η dla każdej użytej kulki i obliczyć jego wartość średnią $\bar{\eta}$.
11. Dyskusję niepewności pomiaru wykonać przyjmując, że η dane wzorem 7 jest funkcją trzech wielkości d , t i S obarczonych niepewnością pomiarową, natomiast dla wzoru 9 uwzględnić niepewność czterech wielkości: d , D , t i S . Obliczenia najlepiej przeprowadzić dla tego pomiaru, który dał wynik η najbardziej zbliżony do wartości średniej $\bar{\eta}$.

W obliczeniach przyjąć wartości:

- $\rho_k = 2630 \text{ kg/m}^3$ dla kulek szklanych,
- $\rho_k = 7900 \text{ kg/m}^3$ dla kulek stalowych,
- $\rho_c = 1260 \text{ kg/m}^3$ dla gliceryny w temperaturze pokojowej
- $\rho_c = 850 \text{ kg/m}^3$ dla oleju silnikowego 0W-20
- $\rho_c = 840 \text{ kg/m}^3$ dla oleju silnikowego 10W-60

Tabela wyników pomiarów i obliczeń – proponowana postać

Rodzaj cieczy	Wartości pomiarów					Wartości tablicowe		Wyniki obliczeń	
	Lp.	d [mm]	t [s]	D [10^{-2} m]	S [m]	ρ_k [kg/m ³]	ρ_c [kg/m ³]	η [Pa·s]	$\bar{\eta}$ [Pa·s]

Zagadnienia do kolokwium:

1. Lepkość cieczy – zjawisko i definicja współczynnika lepkości dynamicznej.
2. Ruch laminarny i burzliwy cieczy.
3. Wyjaśnienie zjawiska lepkości na gruncie budowy wewnętrznej cieczy.
4. Prawo Stokesa bez i z poprawką Ladenburga.
5. Ruch kulki w cylindrze z cieczą z opisem działających na nią sił.
6. Wyprowadzenie wzoru końcowego.

Literatura:

- J. Massalski, M. Massalska, *Fizyka dla inżynierów*, Część I - *Fizyka klasyczna*, (Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2005) rozdz. 8.
- S. J. Ling, J. Sanny, W. Moebs, *Fizyka dla szkół wyższych*, tom 1, rozdz. 6 i 14 (OpenStax Poland, 2018). Darmowy dostęp: <https://openstax.org/details/books/fizyka-dla-szkol-wyzszych-tom-1>.
- H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, (Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1997) rozdz. III 9.2.

Autor opisu i opiekun ćwiczenia: dr hab. Wiesław Polak