

Ćw. 12. Wyznaczanie współczynnika lepkości dynamicznej cieczy metodą Stokesa

Wprowadzenie

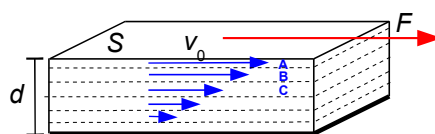
Ciecze stanowią jedną z trzech faz, obok gazu i ciała stałego, w jakich według tradycyjnego podziału mogą występować substancje w przyrodzie. Jej cechą makroskopową jest zjawisko płynięcia pod wpływem siły zewnętrznej. To właśnie dzięki niemu ciecz wlewa do naczynia zawsze wypełni dolną jego część i wytworzy płaską powierzchnię swobodną pod wpływem pola grawitacyjnego. Czas potrzebny do dostosowania początkowego kształtu wlanej cieczy do naczynia zależy głównie od jej parametru fizycznego – lepkości, która decyduje jak szybko może ciecz płynąć pod wpływem siły zewnętrznej, tu swojego ciężaru. Różnicę łatwo można zaobserwować, gdy mamy do czynienia z cieciami tak różnymi pod względem lepkości jak woda czy płynny miód.

Ruch fragmentów cieczy podczas jej przepływu może mieć charakter ruchu burzliwego lub laminarnego/warstwowego. W tym pierwszym przypadku ruch cieczy jest niestabilny w czasie, gdyż tworzą się w nim przemieszczające się i nietrwale wiry. Dzięki tym wirom zachodzi intensywne mieszanie się różnych obszarów cieczy. W drugim przypadku wiry nie powstają, a sam przepływ odbywa się stabilnymi w czasie strugami. W przypadku płynięcia cieczy po płaskiej powierzchni, takie strugi mają kształt warstw równoległych do tej powierzchni.

Ruch laminarny cieczy pokazany na rys. 1 pozwala sformułować ważną zależność definiującą lepkość. Jeśli siła zewnętrzna działa na powierzchnię S , np. folii położonej na powierzchni cieczy, to zacznie ona poruszać się wraz z najwyższą warstwą cieczy z prędkością v_0 , a głębsze warstwy mają coraz mniejszą prędkość aż do wartości zerowej przy podłożu (patrz rys.1). Prędkość warstw cieczy jest wprost proporcjonalna do odległości od podłoża, więc mamy do czynienia ze stałym gradientem prędkości w kierunku pionowym $\Delta v/\Delta y$. Ma on wartość v_0/d , gdzie d jest grubością warstwy cieczy. Siła potrzebna do wywołania takiego ruchu cieczy wynosi

$$F = \eta \frac{\Delta v}{\Delta y} S, \quad (1)$$

gdzie η jest współczynnikiem lepkości dynamicznej cieczy, której jednostką jest $\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ czyli $\text{Pa}\cdot\text{s}$. Siła z jaką działa ciecz na przesuwaną powierzchnię S ma charakter sił tarcia, gdyż zawsze skierowana jest przeciwnie do prędkości tej powierzchni. Powstaje ona na skutek wzajemnego oddziaływania warstewek cieczy (np. A, B i C na rys. 1), na jakie dzielimy myślowo całą warstwę. Zawsze warstewka wolniejsza będzie spowalniała ruch szybszej (np. B spowalnia A) a sama ciągnie do przodu niższą, wolniejszą warstwę (np. B pociąga C).



Rys. 1. Rozkład prędkości w warstwie cieczy o grubości d na której górną powierzchnię S działa siła F .

Istnienie sił oporu między przesuwanymi się warstwami można wytłumaczyć analizując ruch cząsteczek cieczy. Mają one w cieczach dość dużą swobodę przemieszczania się w odróżnieniu od ciał stałych, gdzie jest on praktycznie niemożliwy. Wynika to z różnej budowy wewnętrznej tych faz, gdyż obydwa upakowania cząsteczek są niemal równie gęste, ale ich uporządkowanie jest bardzo różne – w ciałach stałych obejmuje całą objętość ciała, a w cieczach tylko najbliższe cząsteczki. Dlatego też tylko cząsteczki w cieczach mogą w czasie zderzeń z sąsiadami podczas drgań termicznych zmieniać swoje położenie, gdy między nieregularnie rozmieszczonymi cząsteczkami pojawia się puste miejsce do obsadzenia. Takie zmiany położenia prowadzą do chaotycznego ruchu cząsteczek w obrębie cieczy czyli ich dyfuzji, charakteryzowanej przez współczynnik dyfuzji D . Zależy on silnie od temperatury bezwzględnej T cieczy i wartości jej energii aktywacji E_a potrzebnej do wytworzenia miejsca, w które wejdzie dyfundująca cząstka, co wyraża zależność

$$D \propto T \exp(-E_a / kT) \quad (2)$$

gdzie k to stała Boltzmanna.

Na skutek takiego ruchu dyfuzyjnego cząsteczki z warstwy poruszającej się/płynącej wolniej mogą przejść do tej szybszej, np. z B do A na rys. 1. Tuż po przejściu mają mniejszą prędkość w kierunku przepływu. Żeby uzyskały prędkość równą tej, jaką mają jej nowi sąsiedzi z warstwy A, trzeba ich prędkość a więc i pęd w kierunku przepływu zwiększyć. Robi to siła zewnętrzna wymuszająca przepływ. Bezpośrednim dowodem na związek zjawiska lepkości i dyfuzji w cieczach jest równanie Einsteina-Stokesa

$$\frac{D\eta}{kT} = const, \quad (3)$$

Łącząc zależności 2 i 3 uzyskujemy

$$\eta = A \exp(E_a / kT), \quad (4)$$

gdzie A jest pewną stałą. Oznacza to, że wartość lepkości dynamicznej silnie rośnie wraz ze wzrostem E_a (zależy głównie od rodzaju cieczy a w mniejszym stopniu od ciśnienia w cieczy) i maleje ze wzrostem temperatury. Bardzo wyraźnie widać to dla cieczy, których energia aktywacji jest duża jak np. dla smoły, której lepkość zmienia się gwałtownie w przedziale temperatur np. od 0 °C do 100 °C.

Metoda pomiaru

Pomiar współczynnika lepkości dynamicznej można oprzeć na zjawisku oporu dynamicznego jaki wywiera ciecz na poruszające się w niej ciała. W metodzie Stokesa wykorzystuje się ciała w kształcie kuli o znanym promieniu r . Gdy taka kulka porusza się w cieczy z prędkością v na tyle małą, że ruch cieczy wokół kulki będzie laminarny, działa na nią siła oporu o wartości

$$\vec{F}_o = -6\pi\eta r \vec{v} \quad (5)$$

nazywana siłą Stokesa od nazwiska brytyjskiego odkrywcy tego prawa George'a Stokesa z połowy XIX w. Znak „-” w równaniu 5 oznacza, że siła oporu jest zawsze przeciwnie skierowana do prędkości kulki, co jest charakterystyczne dla sił tarcia. Z wzoru 5 wynika, że kulki o większym promieniu lub większej prędkości będą doznawały większego oporu ośrodka.

Żeby określić wartość F_o i z równania 5 obliczyć η , wykorzystuje się ruch kulek o gęstości znacznie większej od gęstości cieczy, do której są wrzucane. Jak pokazuje to rys. 2, na taką kulkę w cieczy działają trzy siły: ciężkości F_g , oporu F_o (siła Stokesa) i wyporu F_w . Początkowo siły te nie równoważą się, gdyż siła Stokesa jest zbyt mała ze względu na małą prędkość v , więc kulka porusza się ruchem przyspieszonym. Po krótkim czasie osiąga jednak taką prędkość, że siła wyporu i siła Stokesa równoważą ciężar, tzn.

$$F_o + F_w = F_g \quad (6)$$

i wtedy jej ruch staje się jednostajny. Z równania 6 możemy obliczyć F_o , gdyż pozostałe dwie siły zależą od łatwych do określenia wielkości: objętości kulki V i jej gęstości ρ_k oraz gęstości cieczy ρ_c . Siła ciężkości wynosi $F_g = mg = \rho_k Vg$, gdzie masa kulki m i przyspieszenie ziemskie $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Zgodnie z prawem Archimedesesa, siła wyporu cieczy jest równa $F_w = \rho_c Vg$. Wprowadzając wyrażenia na te dwie siły do przekształconego równania 6 w postaci $F_o = F_g - F_w$, otrzymujemy

$$F_o = Vg(\rho_k - \rho_c) \quad (7)$$

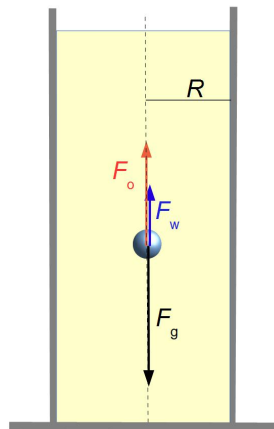
Po podstawieniu za objętość kuli $V = 4\pi r^3/3$ a za F_o siłę Stokesa daną zależnością 5, mamy równanie w postaci

$$6\pi\eta r v = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_k - \rho_c). \quad (8)$$

Uwzględniając, że prędkość ruchu kulki jest stosunkiem drogi S pokonanej przez nią w ruchu jednostajnym w czasie t czyli $v = S/t$, możemy już obliczyć współczynnik lepkości dynamicznej

$$\eta = \frac{2r^2 g(\rho_k - \rho_c)t}{9S}. \quad (9)$$

Przy założeniu, że gęstości kulki i cieczy są znane, obliczenie η z tego wzoru wymaga zmierzenia promienia kulki, długości drogi oraz czasu potrzebnego na jej przebycie.



Rys. 2. Siły działające na kulkę spadającą w cieczy wlanej do cylindra o promieniu R .

Istnieje też druga, dokładniejsza metoda pomiaru współczynnika lepkości, która tym różni się od poprzedniej, że wykorzystuje nieco inną postać równania 5. Uwzględnia ona fakt, że ruch kulki odbywa się w cieczy ograniczonej ściankami cylindra, a nie w nieograniczonej objętości cieczy. Trzeba więc przyjąć, że ciecz opływając kulkę musi mieć prędkość zerową przy ściankach cylindra, co utrudnia jej przepływ i zwiększa dlatego wartość siły oporu. Zakładając, że ruch kulki odbywa się wzdłuż osi cylindra o promieniu R , należy wprowadzić poprawkę do wzoru 5 zaproponowaną przez Ladenburga tak, że przyjmuje on postać

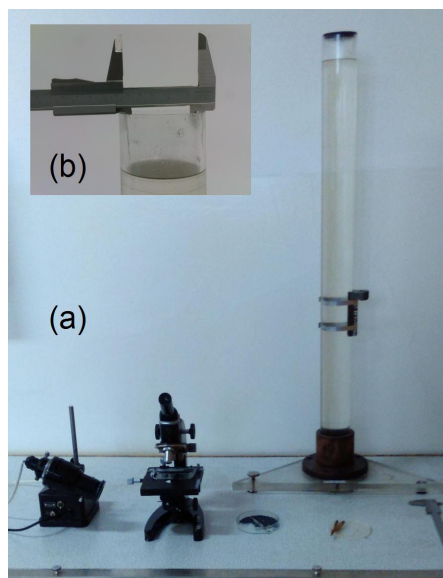
$$\vec{F}_o = -6\pi\eta r \vec{v} \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right). \quad (10)$$

Taka poprawka oznacza, że wzór do obliczania współczynnika lepkości przyjmuje teraz postać

$$\eta = \frac{2r^2 g(\rho_k - \rho_c)t}{9S \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right)}. \quad (11)$$

Oznacza to, że poza pomiarami r , t i S , należy jeszcze zmierzyć średnicę wewnętrzną cylindra R .

Wykonanie zadania



Rys. 3. a) Wygląd układu pomiarowego z przyrządami potrzebnymi do pomiaru: cylinder z badaną cieczą, szalka Petriego z kulkami i pęsetą (suchą) do manipulowania nimi, lampka mikroskopu, mikroskop ze szkiełkiem mikroskopowym z wgłębieniem, szalka z cieczą i pęsetą do zamoczenia kulek, suwmiarka, mikromierz, przymiar liniowy, stoper. b) W powiększeniu pokazany sposób pomiaru wewnętrznej średnicy cylindra.

METODA I (bez poprawki Ladenburga)

1. Skompletować zestaw przyrządów pokazany na rys. 3a. Ciecz do badania oraz rodzaj kulek wybiera prowadzący. UWAGA: ze względów technicznych, na początku semestru zimowego 2023-24 możliwe jest tylko badanie lepkości gliceryny z użyciem kulek szklanych.
2. Wybrać dowolną kulkę ze wskazanej szalki i zmierzyć jej średnicę mikromierzem.
3. Zmierzoną kulkę przenieść do szalki z cieczą. Korzystając z drugiej pęsety, zamoczyć całą powierzchnię kulki, aby wyeliminować ewentualne pęcherzyki powietrza doczepione do kulki.
4. Zamoczoną kulkę przenieść do górnego otworu cylindra i wrzucić na jego osi, w czym pomaga specjalny otworek w pokrywce.
5. Zmierzyć stoperem czas t spadania kulki na drodze między dwoma wybranymi liniami pomiarowymi zaznaczonymi na obwodzie cylindra w górnej i dolnej jego części.
6. Powtórzyć czynności od punktu 2 do 5 wybierając min. 8 kul, najlepiej różnej wielkości.
7. Zmierzyć przymiarem liniowym odległość S między wykorzystaną do pomiaru linią górną i dolną na cylindrze.
8. Odczytać na termometrze ustawionym na stoliku temperaturę powietrza w laboratorium i przyjąć ją jako temperaturę cieczy.
9. Wpisać uzyskane dane do tabeli pomiarowej. Na podstawie uzyskanych wartości pomiarów, ze wzoru 9 obliczyć szukaną wartość współczynnika lepkości η dla każdej użytej kulki i obliczyć jego wartość średnią $\bar{\eta}$.
10. Dyskusję niepewności pomiaru wykonać przyjmując, że η dane wzorem 9 jest funkcją trzech wielkości obarczonych niepewnością pomiarową: r , t , i S . Obliczenia najlepiej przeprowadzić dla tego pomiaru/ kulki, który dał wynik η najbardziej zbliżony do wartości średniej $\bar{\eta}$.

METODA II (z poprawką Ladenburga)

1. Wykonać czynności i pomiary identycznie jak w Metodzie I w punktach 1-9. Dodatkowo zmierzyć średnicę wewnętrzną $2R$ cylindra przy pomocy suwmiarki po zdjęciu pokrywy cylindra z cieczą (patrz rys. 3b). Żeby uwzględnić możliwość, że jej przekrój różni się nieco od kołowego, pomiar R wykonać kilkakrotnie (np. 3-4 razy) za każdym razem przykładając suwmiarkę pod różnymi kątami.
2. Dokonać obliczeń η dla każdej użytej kulki wykorzystując wartość średnią R i wzór 11.
3. Dyskusję niepewności pomiaru wykonać przyjmując, że η dane wzorem 11 jest funkcją czterech wielkości obarczonych niepewnością pomiarową: r , t , R i S . Obliczenia najlepiej przeprowadzić dla tego pomiaru/ kulki, który dał wynik η najbardziej zbliżony do wartości średniej $\bar{\eta}$.

W obliczeniach przyjąć wartości:

- $\rho_k = 2630 \text{ kg/m}^3$ dla kulek szklanych,
 $\rho_c = 1264 \text{ kg/m}^3$ dla gliceryny (15°C),
 1261 kg/m^3 dla gliceryny (20°C),
 1258 kg/m^3 dla gliceryny (25°C),

Tabela pomiarowa

Uwaga: w metodzie I kolumnę $2R$ pomijamy.

Rodzaj ciecchy	Lp.	$2r$ [mm]	r [mm]	t [s]	$2R$ [10^{-2} m]	S [m]	ρ_k [kg/m^3]	ρ_c [kg/m^3]	η [$\text{Pa}\cdot\text{s}$]	$\bar{\eta}$ [$\text{Pa}\cdot\text{s}$]
	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									

Zagadnienia do kolokwium:

1. Lepkość ciecchy – zjawisko i definicja współczynnika lepkości dynamicznej.
2. Ruch laminarny i burzliwy ciecchy.
3. Wyjaśnienie zjawiska lepkości na gruncie budowy wewnętrznej ciecchy.
4. Rola dyfuzji w zjawisku lepkości ciecchy.
5. Ruch kulki w cylindrze z cieczą z opisem działających na nią sił.
6. Prawo Stokesa bez i z poprawką Ladenburga.
7. Wyprowadzić wzór końcowy.
8. Wymienić etapy wykonywania ćwiczenia.

Literatura:

- J. Massalski, M. Massalska, *Fizyka dla inżynierów, Część I - Fizyka klasyczna*, (Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2005) rozdz. 8.
- M. A. Herman, A. Kalestyński, L. Widomski, *Podstawy fizyki* (PWN, Warszawa, 1995) rozdz. 15, §6.1.
- B. M. Jaworski, A. A. Piński, *Elementy fizyki*, Tom 1 (PWN, Warszawa, 1979) §11.7 i 11.8.

- H. Szydłowski, *Pracownia fizyczna*, (Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1997) rozdz. III 9.2.

Opiekun ćwiczenia: dr hab. Wiesław Polak