

---

Politechnika Lubelska



MECHANIKA

---

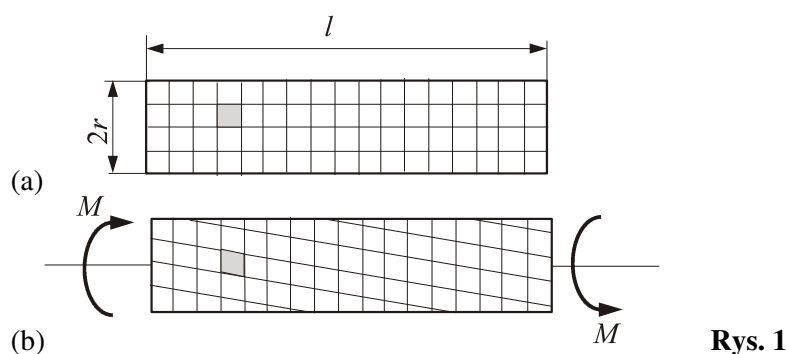
## Laboratorium wytrzymałości materiałów ...

### Ćwiczenie 4 - Swobodne skręcanie prętów kołowych

Przygotował: Andrzej Teter  
*(do użytku wewnętrznego)*

# Swobodne skręcanie prętów kołowych

Jednym z prostych przypadków wytrzymałości materiałów jest swobodne skręcanie. W celu opisu zjawisk zachodzących w tym przypadku przyjmujemy do analizy wał o długości  $l$  i przekroju okrągłym o promieniu  $r$ , na powierzchni którego narysowano siatkę kwadratową (rys. 1a).



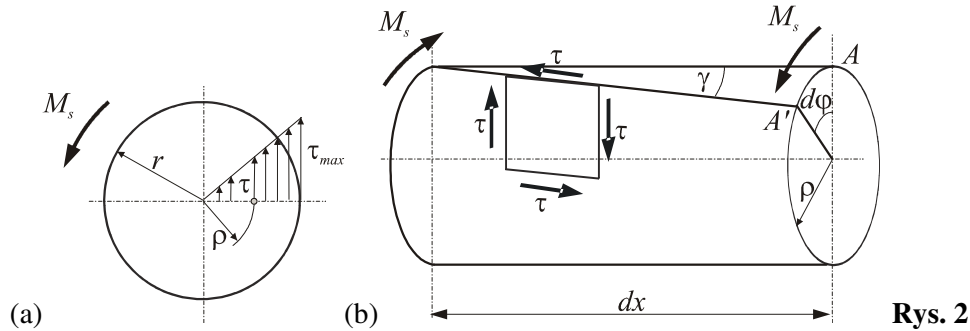
Jeżeli analizowany wał obciążyć na końcach dwoma momentami o równej wartości  $M$  lecz zwrotach przeciwnych i dodatkowo działających w płaszczyźnie prostopadłej do osi pręta to wszystkie siły wewnętrzne sprowadzają się do wewnętrznego momentu skręcającego o wartości  $M_s=M$ . Wynika to wprost z warunku równowagi. Na podstawie zmian siatki znajdującej się na powierzchni wału (rys. 1b) możemy stwierdzić że:

1. Tworzące, które były równoległe do osi pręta, po deformacji zmieniają się w linie śrubowe o kącie nachylenia  $\gamma$  jednakowym na całej długości pręta.
2. Przekroje końcowe pręta pozostają nadal płaskie, przy czym ani długość  $l$ , ani średnica pręta nie ulega zmianie.
3. Linie obwodowe pozostają nadal płaskie i zachowują kształt kołowy.
4. Narysowany na końcowym przekroju pręta promień obraca się o kąt  $\varphi$ , zwany **kątem skręcenia pręta**, pozostając nadal prostym.

Przedstawione obserwacje pozwalają przyjąć za obowiązującą hipotezę płaskich przekrojów. **Dodatkowo można przyjąć tezę, że stan naprężeń w pręcie skręcanym jest analogiczny do stanu czystego ścinania.** Naprężenia styczne  $\tau$  są prostopadłe do promieni pomyślanych w przekrojach poprzecznych pręta i zwiększają się proporcjonalnie: wartości zerowej w osi pręta do wartości maksymalnej  $\tau_{max}$  dla punktów położonych przy zewnętrznej powierzchni pręta (rys. 2a). Spełniona jest zależność:

$$\frac{\tau}{\tau_{\max}} = \frac{\rho}{r} \quad (1)$$

gdzie:  $\rho$  - dowolny promień,  $r$  - promień zewnętrzny.



**Rys. 2**

Korzystając z przeprowadzonych obserwacji można opisać stan odkształceń skręcanych prętów kołowych (rys. 2b). Opisując geometrię powierzchniowego wycinka wału o długości  $dx$  można wyprowadzić następującą zależność:

$$\gamma = \rho \cdot \frac{d\phi}{dx} \quad (2)$$

Kąt  $\gamma$  jest kątem odkształcenia postaciowego na zewnętrznej powierzchni pręta okrągłego o promieniu  $\rho$  i może zostać wyrażony przez naprężenie ścinające za pomocą prawa Hooke'a dla ścinania:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (3)$$

Współczynnik proporcjonalności  $G$  jest nazywany **modułem odkształcenia postaciowego** lub **modułem Kirchhoffa**. Podobnie jak moduł sprężystości podłużnej  $E$ , moduł odkształcenia postaciowego ma wymiar naprężeń [MPa]. Dowodzi się, że pomiędzy modułem ścinania  $G$ , modułem Younga  $E$  oraz liczbą Poissona  $\nu$  zachodzi związek:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

Na podstawie powyższych równań otrzymuje się zależność opisującą maksymalne naprężenia ścinające:

$$\tau_{\max} = G \frac{d\phi}{dx} r \quad (5)$$

Podstawiając (5) do (1) otrzymujemy zależność naprężeń stycznych  $\tau$  od promienia  $\rho$ :

$$\tau = G \frac{d\varphi}{dx} \rho \quad (6)$$

Zapisując warunki równowagi w postaci sumy momentów względem osi symetrii pręta dla wyodrębnionego elementu uzyskuje się zależność pomiędzy momentem skręcającym  $M_s$  i kątem skreńcenia  $\varphi$ . Siła tnąca działająca na element o powierzchni  $dF$  (rys. 2a) wynosi  $\tau \cdot dF$ , a moment tej siły względem osi pręta jest równy  $\tau \cdot \rho dF$ . Po zsumowaniu tego elementarnego momentu po całym polu przekroju poprzecznego uzyskuje się moment całkowity w przekroju pręta, który musi być zrównoważony przez moment zewnętrzny  $M=M_s$  czyli:

$$\int_F \rho \cdot \tau dF - M_s = 0 \quad (7)$$

Podstawiając (6) mamy:

$$\int_F \rho^2 \cdot G \frac{d\varphi}{dx} dF - M_s = 0 \quad (8)$$

Po wprowadzeniu oznaczenia:

$$I_o = \int_F \rho^2 dF \quad (9)$$

gdzie:  $I_o$  jest to **biegunowy moment bezwładności** kołowego przekroju poprzecznego otrzymujemy:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_s}{GI_o} \quad (10)$$

Dla koła o promieniu  $r$  biegunowy moment bezwładności wynosi:

$$I_o = \frac{\pi \cdot r^4}{2} \quad (11)$$

zaś dla rury o promieniu wewnętrznym  $r$  i zewnętrznym  $R$  moment ten wynosi:

$$I_o = \frac{\pi \cdot (R^4 - r^4)}{2} \quad (12)$$

Podstawiając (10) do (6) otrzymuje się:

$$\tau = \frac{M_s}{I_o} \cdot \rho \quad (13)$$

Jest to zależność naprężeń ścinających od odległości  $\rho$  od środka przekroju pręta. Ponieważ zarówno moment  $M_s$ , jak i biegunowy moment bezwładności  $I_o$  są stałe więc rozkład naprężeń tnących jest liniową funkcją odległości od środka

symetrii wałka. Największe naprężenia ścinające w obrębie przekroju poprzecznego pręta okrągłego występują dla  $\rho = r$  i wynoszą:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{I_o} r \quad (14)$$

lub

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_o} \quad (15)$$

gdzie:

$$W_o = \frac{I_o}{r} \quad (16)$$

nazywany jest **wskaźnikiem wytrzymałości na skręcanie**. Dla przekroju kołowego wynosi:

$$W_o = \frac{\pi \cdot r^3}{2} \quad (17)$$

zaś dla rury o promieniu wewnętrznym  $r$  i zewnętrznym  $R$  wskaźnik ten wynosi:

$$W_o = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2R} \quad (18)$$

Kąt skręcenia  $\varphi$  można wyznaczyć przez całkowanie wyrażenia (8):

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_s}{GI_o} dx \quad (19)$$

W przypadku wałka o stałym promieniu  $r$  i długości  $l$ , obciążonym stałym momentem  $M_s = \text{const}$  otrzymuje się całkowity kąt skręcenia:

$$\varphi = \frac{M_s l}{GI_o} \quad (20)$$

Ogólny warunek wytrzymałościowy pręta skręcanego ma postać:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{s\max}}{W_o} \leq k_s \quad (21)$$

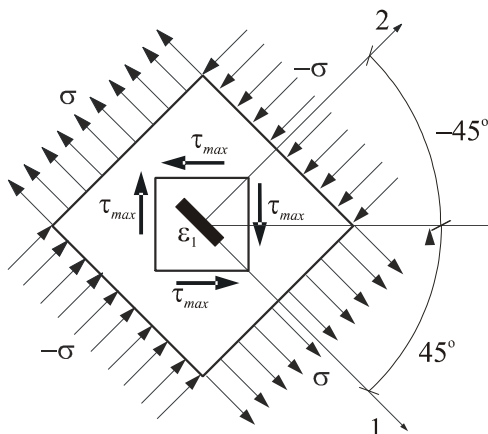
gdzie:  $k_s$  – naprężenia dopuszczalne na skręcanie, przyjmuje się, że  $k_s = k_b$ ,  $M_{s\max}$  – maksymalny moment skręcający. W przypadku skręcanych wałów należy również sprawdzić warunek sztywności:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_s}{GI_o} dx \leq \varphi_{dop} \quad (22)$$

gdzie:  $\varphi_{dop}$  – dopuszczalny kąt skręcenia, przyjmuje się  $\varphi_{dop} = 0,0087$  rad/m.

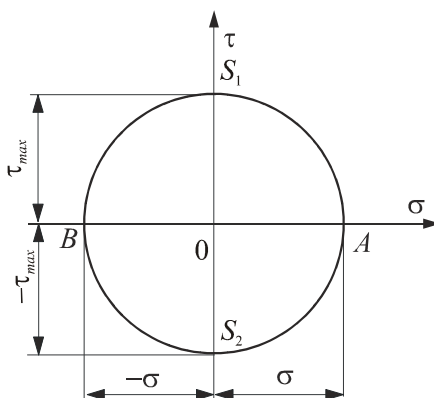
## Badania tensometryczne

Analogicznie jak w przypadku czystego zginania w badaniach doświadczalnych do pomiaru odkształceń zastosujemy tensometry oporowe. Budowa i działanie tensometrów oporowych opisano w rozdziale pt. *Czyste zginanie statycznie wyznaczalnej belki*.



Rys. 3

Zgodnie z przeprowadzonymi obserwacjami wiemy, że powierzchnia skręcanej rury poddana jest czystemu ścinaniu, które jest szczególnym przypadkiem płaskiego stanu naprężeń. W tym przypadku naprężenia działają w kierunkach głównych (1) i (2) równe co do wartości naprężenia normalne, ale o przeciwnych znakach:  $\sigma_y = -\sigma_x = \sigma$  i są obrócone o kąt  $45^\circ$  oraz  $-45^\circ$  (rys. 3). Koło Mohra dla czystego ścinania przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4

W celu wyznaczenia wartości naprężeń stycznych  $\tau_{max}$  występujących na powierzchni rury naklejamy tensometr pod kątem  $45^\circ$  do osi rury. Odkształcenia  $\epsilon_1$ , które mierzy ten tensometr możemy obliczyć z uogólnionego prawa Hooke'a dla płaskiego stanu naprężeń:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_1 - \nu \sigma_2) \quad (23)$$

Z koła Mohra możemy odczytać (rys. 4):

$$\sigma_1 = \tau_{\max} \quad \sigma_2 = -\tau_{\max} \quad (24)$$

Podstawiając (24) do (23) otrzymujemy:

$$\varepsilon_1 = \frac{\tau_{\max}}{E} \cdot (1 + \nu) \quad (25)$$

więc:

$$\tau_{\max} = \frac{\varepsilon_1 E}{(1 + \nu)} \quad (26)$$

Zależność (26) możemy wykorzystać do wyznaczenia modułu Kirchhoffa  $G$ . Podstawiamy (4) i otrzymujemy:

$$G = \frac{\tau_{\max}}{2\varepsilon_1} = \frac{M_s}{2\varepsilon_1 W_o} \quad (27)$$

**Politechnika Lubelska, Wydział Mechaniczny**  
**Katedra Mechaniki Stosowanej**  
**Laboratorium Wytrzymałości Materiałów**

<i>Imię i nazwisko</i>	<i>Grupa</i>	<i>Data wykonania</i>	<i>Prowadzący</i>	<i>Ocena</i>

## Laboratorium Wytrzymałości Materiałów

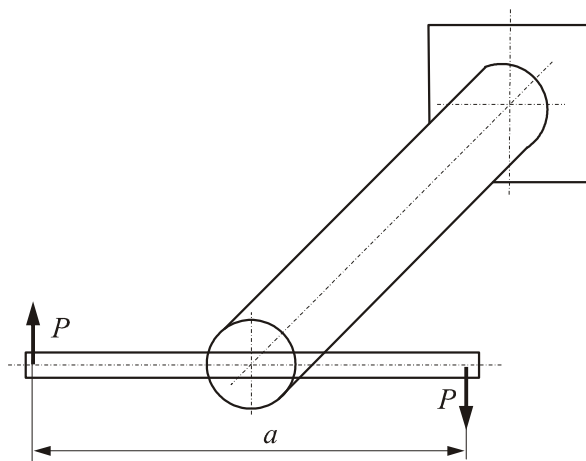
### Swobodne skręcanie prętów kołowych

#### 1. Cel ćwiczenia.

Celem ćwiczenia jest doświadczalne badanie z zastosowaniem tensometrów oporowych skręcania swobodnego rury oraz wyznaczenie moduły sprężystości postaciowej  $G$ .

#### 2. Opis stanowiska badawczego

Badania doświadczalne prowadzimy na stanowisku (rys. 1) składającym się z rury zamurowanej jednym końcem i obciążonej parą sił wywołujących skręcanie. Na powierzchni rury naklejono tensometry połączone z układem pomiarowym ESAM TRAVELLER i komputerem zbierającym wyniki pomiarów.



**Rys. 1**



### 3. Przebieg ćwiczenia

1. Dokonać pomiaru w kilku miejscach geometrii rury:  $r$  – średnica wewnętrzna,  $R$  – średnica zewnętrzna,  $a$  – odległość między siłami. Pomiar powtarzamy, a w sprawozdaniu zamieszczamy wartości średnie.
2. Zgodnie z wytycznymi prowadzącego przygotować układ pomiarowy.
3. Dokonać pomiarów odkształcenia dla wskazanych obciążeń.

### 4. Opracowanie wyników i wykonanie sprawozdania

W celu opracowania sprawozdania należy:

- a) Wszystkie wyniki pomiarów umieścić w sprawozdaniu.
- b) Naszkicować zarys stanowiska.
- c) Z badań doświadczalnych obliczyć naprężenia styczne  $\tau_{\max d}$  na zewnętrznych powierzchniach rury.
- d) Obliczyć teoretyczne wartości naprężenia stycznych  $\tau_{\max t}$  na zewnętrznych powierzchniach rury.
- e) Błąd popełniony obliczyć ze wzoru:

$$\delta\sigma = \frac{|\tau_{\max t} - \tau_{\max d}|}{\tau_{\max t}} \cdot 100\%$$

- f) Wyznaczyć wartość modułu Kirchhoffa  $G$  ze wzorów:

$$G = \frac{\tau_{\max}}{2\varepsilon_1}$$

$$G = \frac{M_s}{2\varepsilon_1 W_o}$$

- g) Błąd popełniony dla  $G$  obliczyć ze wzoru:

$$\delta G = \frac{\left| \frac{E}{2(1+\nu)} - G \right|}{\frac{E}{2(1+\nu)}} \cdot 100\%$$

- h) Otrzymane wartości naprężeń teoretycznych i doświadczalnych przenieść na wykres w funkcji momentu skręcającego.

**5. Wymiary stanowiska i inne dane:***Tabela 1*

Lp.	$r$ [...]	$R$ [...]	$a$ [...]	$\nu$ [...]	$E$ [...]	$I_o$ [...]	$W_o$ [...]
1							
2							
3							
Średnia							

**6. Wyniki pomiarów i obliczeń***Tabela 2*

Obciążenie $P$ [..]	Moment skręcający $M_s$ [...]	Odkształcenie względne $\varepsilon$ [...]	Naprężenie doświadczalne $\tau_{maxd}$ [...]	Naprężenie teoretyczne $\tau_{maxt}$ [...]	Błąd pomiaru

*Tabela 3*

Obciążenie $P$ [..]	Moment skręcający $M_s$ [...]	Moduł doświadczalny $G_d$ [...]	Moduł teoretyczny $G_t$ [...]	Błąd pomiaru

**Uwaga.** Podać wszystkie wzory, podstawienia i wyniki obliczeń teoretycznych i błędów.

---

**7. Wykres naprężeń stycznych:  $\tau_d$  i  $\tau_t$  w funkcji momentu skręcającego**

**8. Wnioski i uwagi końcowe**