
Politechnika Lubelska



MECHANIKA

Laboratorium wytrzymałości materiałów ...

Ćwiczenie 21 - Statycznie wyznaczalny przypadek osiowego rozciągania

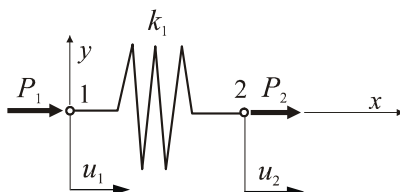
Przygotował: Andrzej Teter
(do użytku wewnętrznego)

Statycznie wyznaczalny przypadek osiowego rozciągania

Metoda elementów skończonych (w skrócie: **MES**) jest metodą numeryczną polegającą na zastąpieniu obiektu rzeczywistego modelem złożonym z małych elementów o skończonych wymiarach. Każdy element, w przyjętym układzie współrzędnych, ma określone tzw. **węzły**. Znając położenie węzłów oraz właściwości mechaniczne materiału można wyznaczyć ich przemieszczenia, odpowiadające obciążeniom działającym na element oraz zewnętrznym obciążeniom konstrukcji. Znając zależność odkształcenie – przemieszczenie można określić odkształcenia, a z zależności naprężenia – odkształcenia wynikają naprężenia. Elementy skończone mogą mieć różne kształty geometryczne. W dalszej części zajęto się najbardziej typowymi elementami jednowymiarowymi o jednym stopniu swobody w każdym węźle.

Jednowymiarowy element prętowy

Dla łatwiejszego zrozumienia metody na wstępie do rozważań przyjęto element jednowymiarowy o jednym stopniu swobody w każdym węźle. Jest to sprężyna o znanej sztywności k_1 obciążona siłami P_1 , P_2 przyłożonymi na końcach w tzw. **punktach węzłowych** 1, 2 (Rys. 1).



Rys. 1

Przemieszczenia węzłów 1 i 2 wzdłuż przyjętej osi x wynoszą odpowiednio: u_1 , u_2 . Siły konieczne do wywołania tych przemieszczeń można wyznaczyć na drodze bezpośredniej z zależności:

$$\begin{aligned} P_1 &= k_1(u_1 - u_2) = k_1u_1 - k_1u_2 \\ P_2 &= -k_1(u_1 - u_2) = -k_1u_1 + k_1u_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Zależność (1) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

lub w krótkiej formie:

$$\mathbf{P} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} \quad (3)$$

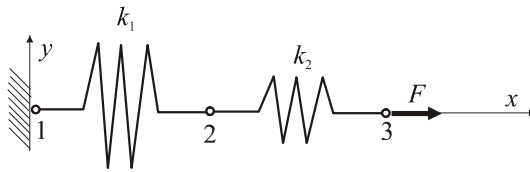
gdzie: $\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix}$ nazywamy **macierzą sztywności elementu**, która opi-

suje konieczne siły do wywołania założonych przemieszczeń. Wyrażenia (1) nie są niezależne, ponieważ zachodzi związek: $P_1 = -P_2$ to powoduje, że macierz sztywności elementu jest macierzą osobliwą i niemożliwe jest zapisanie macierzy odwrotnej. Znając przemieszczenie pierwszego punktu węzłowego np. $u_1 = \delta$ oraz siłę działającą w punkcie 2, P_2 z zależności (1b) można zapisać:

$$P_2 = -k_1\delta + k_1u_2 \quad (4)$$

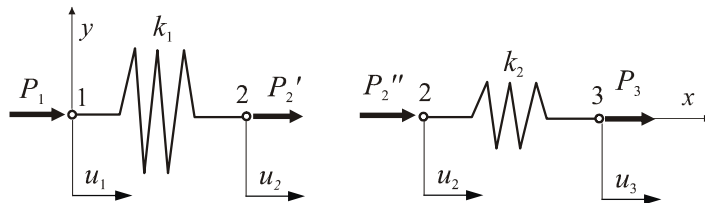
przekształcając:

$$u_2 = \frac{P_2}{k_1} + \delta \quad (5)$$



Rys. 2

Prezentowane rozwiązanie jest bardzo proste gdy układ jest jednoelementowy, ale staje się bezużyteczne w układach wieloelementowych. Aby lepiej przedstawić metodę MES zbudujemy układ składający się z dwóch sprężyn o sztywności k_1 oraz k_2 (rys. 2).



Rys. 3

Zgodnie z poprzednimi rozważaniami rozbijamy układ na dwa elementy (rys. 3) i zapisujemy zależności opisujące zależności sił i przemieszczeń w kolejnych węzłach. Z prostej analizy otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P_1 &= k_1u_1 - k_1u_2 \\ P_2 &= P_2' + P_2'' = -k_1u_1 + k_1u_2 + k_2u_2 - k_2u_3 \\ P_3 &= -k_2u_2 + k_2u_3 \end{aligned} \quad (6)$$

lub w zapisie macierzowym, zgodnie z (2) otrzymujemy:

$$\text{Element 1} \quad \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\text{Element 2} \quad \begin{bmatrix} P_2'' \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Całkowite siły w węzłach wynoszą: P_1 , $P_2 = P_2' + P_2''$, P_3 więc:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2' + P_2'' \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

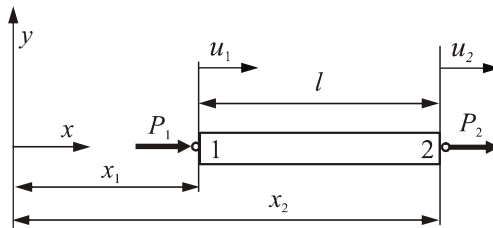
Wykonując działania: wyłączając wspólny czynnik \mathbf{u} i dodając macierze sztywności elementów otrzymujemy równanie macierzowe o postaci:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (10)$$

lub

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \quad (11)$$

gdzie: **macierz sił**: \mathbf{P} przedstawia siły działające w węzłach. W tym przypadku również **globalna macierz sztywności układu**: \mathbf{K} jest osobliwa, ponieważ zachodzi zależność pomiędzy siłami zewnętrznymi $P_1 + P_2 + P_3 = 0$. Analogiczne działania możemy prowadzić dla dowolnej liczby połączonych elementów.



Rys. 4

W dalszej części zajęto się prętem liniowo-sprężystym przedstawionym na rys. 4. W tym przypadku macierz sztywności zależy od właściwości mechanicznych: geometrii przekroju, długości i stałych materiałowych. W liniowej analizie jednowymiarowego elementu przemieszczenia dowolnego punktu można zapisać w postaci kombinacji liniowej:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (12)$$

gdzie: α_1 oraz α_2 są stałymi. Dla punktów węzłowych 1 oraz 2 mamy:

$$u_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 \quad u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 \quad (13)$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy wartości stałych α_1 oraz α_2 :

$$\alpha_1 = \frac{u_1 x_2 - u_2 x_1}{x_2 - x_1} \quad \alpha_2 = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \quad (14)$$

czyli:

$$u = \frac{1}{x_2 - x_1} [(u_1 x_2 - u_2 x_1) + (u_2 - u_1) \cdot x] \quad (15)$$

Ponieważ długość początkowa elementu wynosi: $l = x_2 - x_1$ to mamy:

$$u = \frac{1}{l} [(u_1 x_2 - u_2 x_1) + (u_2 - u_1) \cdot x] \quad (16)$$

W przypadku osiowego rozciągania odkształcenie obliczamy z zależności:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{lub} \quad \epsilon_x = \frac{u_2 - u_1}{l} \quad (17)$$

W zapisie macierzowym mamy:

$$\epsilon_x = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{lub} \quad \epsilon_x = \mathbf{B} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

gdzie: **macierz powiązań**: $\mathbf{B} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$ opisuje zależność pomiędzy odkształceniem i przemieszczeniem. Głównie zależy od położenia węzła elementu. W analizowanym przypadku obowiązuje prawo Hooke'a dla osiowego rozciągania w postaci:

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x \quad (19)$$

gdzie: E oznacza moduł Young'a dla materiału elementu. Podstawiając (18) do (19) otrzymano:

$$\sigma_x = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Z definicji naprężeń można zapisać zależność naprężeń i sił węzłowych 1 oraz 2:

$$P_1 = -\sigma_x \cdot F \quad \text{oraz} \quad P_2 = \sigma_x \cdot F \quad (21)$$

gdzie: F oznacza pole przekroju poprzecznego elementu. W zapisie macierzowym mamy:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot F \cdot \sigma_x \quad (22)$$

Podstawiając wyrażenia (20) mamy:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Powyższe równanie można zapisać w równoważnej postaci:

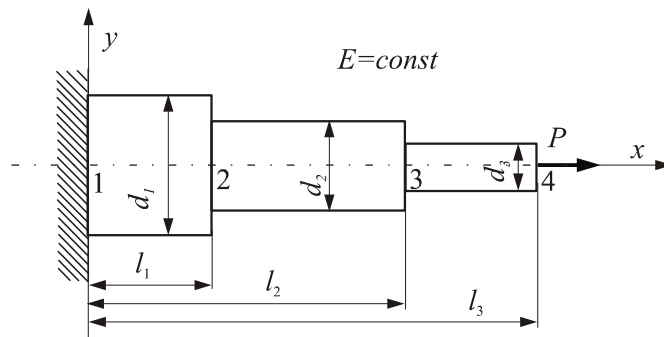
$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

gdzie: $k_1 = \frac{EF}{l}$

Analogiczne rozważanie jak dla dwóch połączonych sprężyn można przeprowadzić dla połączonych prętów.

Przypadek statycznie wyznaczalny – wał stopniowany

Szczegółowej analizie doświadczalnej i teoretycznej poddamy statycznie wyznaczalny, stopniowany wał poddany osiowemu rozciąganiu lub ścisnieniu pokazany na rys. 5. W celu wyznaczenia sił, naprężeń i całkowitego wydłużenia posłużymy się metodą superpozycji i MES. Po przyłożeniu siły P na całej długości pręta powstanie stała siła normalna o wartości $N=P$, wynika to wprost z warunku równowagi dowolnego wycinka wału. Naprężenia σ wyznaczamy z definicji:



Rys. 5

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad (25)$$

gdzie: F – pole przekroju poprzecznego. Całkowite wydłużenie wynosi:

$$\Delta l = \int_l \frac{N \cdot dx}{F E} = \int_l \frac{\sigma \cdot dx}{E} \quad (26)$$

Jeżeli założymy, że moduł Young'a $E = \text{const}$ to w analizowanym przypadku mamy:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \sum_i^3 \sigma_i \cdot l_i \quad (27)$$

gdzie: $i=3$ – liczba stopni na wałku. Wyznamy powyższe zależności metodą MES. Zgodnie ze wzorem (24) sztywności poszczególnych stopni wałka wynoszą:

$$k_1 = \frac{F_1 \cdot E}{l_1} \quad k_2 = \frac{F_2 \cdot E}{l_2} \quad k_3 = \frac{F_3 \cdot E}{l_3} \quad (28)$$

Dla kolejnych elementów zgodnie z zależnością (2) mamy:

$$\textbf{Element 1} \quad \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\textbf{Element 2} \quad \begin{bmatrix} P_2'' \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\textbf{Element 3} \quad \begin{bmatrix} P_3'' \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Całkowite siły w węzłach wynoszą: P_1 , $P_2 = P_2' + P_2''$, $P_3 = P_3' + P_3''$ P_4 więc:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2' + P_2'' \\ P_3' + P_3'' \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Wykonując działania: wyłączając wspólny czynnik \mathbf{u} i dodając macierze sztywności elementów, otrzymujemy równanie macierzowe o postaci:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (33)$$

lub

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} \quad (34)$$

Wprowadzamy dane układu: w zamurowaniu mamy nieznaną reakcję $R=P_1$ oraz przemieszczenie $u_1=0$. Znamy zewnętrzne obciążenia: $P_2=P_3=0$, $P_4=P$, wartości podstawiamy do równania (33) otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ 0 \\ 0 \\ P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (35)$$

Układ równań (35) można zapisać w postaci:

$$\begin{Bmatrix} \{R\} \\ \{q_F\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{u_F\} \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Oznaczmy:

$$\{R\} = \{P_1\} \quad \{0\} = \{0\} \quad \{q_F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad \{u_F\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

$$[K_{11}] = [k_1] \quad [K_{12}] = [-k_1 \ 0 \ 0]$$

$$[K_{21}] = \begin{bmatrix} -k_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [K_{22}] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Wykonujemy proste operacje na elementach macierzy i otrzymujemy dwa równania macierzowe:

$$\{R\} = [K_{11}] \cdot \{0\} + [K_{12}] \cdot \{u_F\} \quad (38)$$

$$\{q_F\} = [K_{21}] \cdot \{0\} + [K_{22}] \cdot \{u_F\} \quad (39)$$

czyli:

$$\{R\} = [K_{12}] \cdot \{u_F\} \quad (40)$$

$$\{q_F\} = [K_{22}] \cdot \{u_F\} \quad (41)$$

Rozwiązujemy równanie (41) mnożąc lewostronnie obie strony równania przez **macierz odwrotną** $[K_{22}]^{-1}$:

$$[K_{22}]^{-1} \{q_F\} = [K_{22}]^{-1} [K_{22}] \cdot \{u_F\} \quad (42)$$

Korzystając z właściwości $[K_{22}]^{-1} \cdot [K_{22}] = I$, gdzie I to **macierz jednostkowa** mamy:

$$[K_{22}]^{-1} \{q_F\} = [I] \cdot \{u_F\} \quad (43)$$

Ponieważ $[I] \cdot \{u_F\} = \{u_F\}$ ostatecznie otrzymujemy:

$$\{u_F\} = [K_{22}]^{-1} \{q_F\} \quad (44)$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} \quad (45)$$

Zaś reakcja w zamocowaniu wynosi:

$$\{R\} = [K_{12}] \cdot \{u_F\} \quad (46)$$

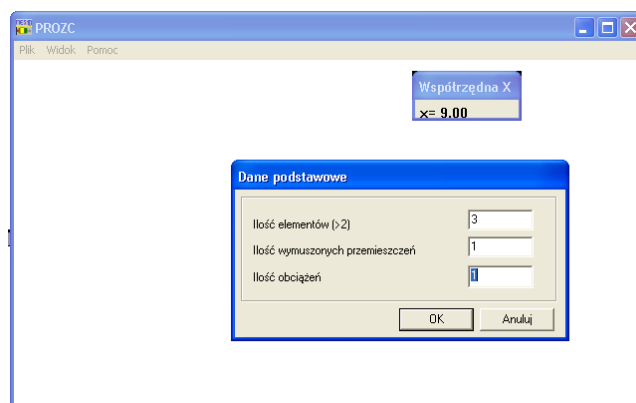
$$\{R\} = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = -k_1 \cdot u_2 \quad (47)$$

W przypadku programów komputerowych do rozwiązania układu (35) stosuje się inną procedurę polegającą na przemnożeniu macierzy sztywności układu \mathbf{K} przez dobraną macierz zerojedynkową. Dobór polega na tym, aby z macierzy sztywności \mathbf{K} wykreślić wiersze i kolumny o numerach wyzerowanych stopni swobody. W omawianym przypadku przemieszczenie $u_1=0$, więc z macierzy sztywności \mathbf{K} wykreślamy 1 kolumnę oraz 1 wiersz. Należy pamiętać, aby z wektorów sił \mathbf{P} i przemieszczeń \mathbf{u} wykreślić 1 wiersz. Otrzymujemy nowy układ równań o postaci:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

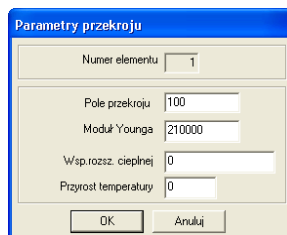
Otrzymujemy identyczne wyrażenie jak w zależności (41), dalsza procedura obliczeń jest taka sama.

Powyższe obliczenia możemy prowadzić na papierze, ale o wiele wygodniej jest zastosować program komputerowy. Popularność, jaką uzyskała metoda MES, wynika z jej uniwersalności i łatwości implementacji komputerowej. Znanym jest wiele komercyjnych programów do obliczeń MES, my jednakże wykorzystamy prosty program stworzony do rozwiązywania tylko takich przypadków. Autorem programu jest Waław Kuś, pracownik Katedry Wytrzymałości Materiałów i Metod Komputerowych Mechaniki, Politechniki Śląskiej. Stanowi on integralną część książki [2]. Można pobrać go bezpłatnie ze strony <http://dydaktyka.polsl.pl/mes/download.aspx> wraz z plikami pomocy i samouczkiem. Uruchamiamy plik **Prozc.exe**, w otwartym oknie z menu: **Plik** wybieramy polecenie **Nowy** (rys.6).



Rys. 6

W otwartym oknie (rys. 6) - **Dane podstawowe** - wpisujemy ilość elementów, która jest równa ilości stopni wałka – 3 oraz ilość obciążeń – 1, pozostałe wielkości bez zmian. Na koniec potwierdzamy wybór klawiszem **OK**. Otwiera się następne okno:



Rys. 7

W oknie **Parametry przekroju** (rys. 7) podajemy dane zgodnie z rysunkiem, wybór potwierdzamy klawiszem **OK**. Wprowadzając dane posługujemy się układem jednostek SI tzn. siły w [N], naprężenia w [MPa], zaś wszelkie wymiary w [mm]. Procedurę powtarzamy dla wszystkich przekrojów. W nowym oknie **Współrzędne węzłów** (rys. 8) wprowadzamy długości poszczególnych stopni podając współrzędne kolejnych węzłów (miejsc zmiany średnicy). Należy pamiętać, że współrzędne x muszą być dodatnie.

Rys. 8

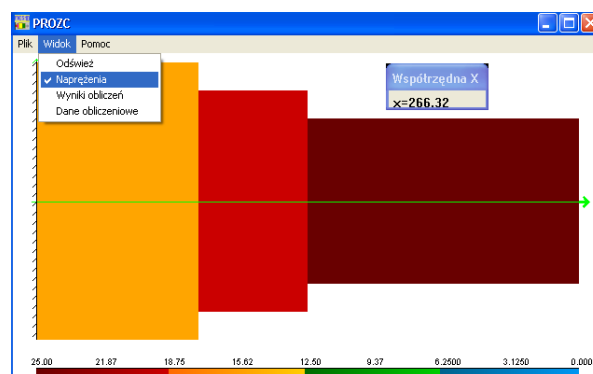
W następnym etapie wskazujemy miejsce zamurowania, w naszym przypadku początek układu współrzędnych, czyli węzeł 1 (rys. 9).

Rys. 9

Zakładamy zamurowanie, więc przemieszczenie tego węzła wynosi 0, jeżeli podparcie przyjmujemy dodatnie to wartość ta jest różna od zera. W następnym oknie (rys. 10) wprowadzamy do układu obciążenie: na końcu, w węźle 4, działa siła np. $P=1500$ N. Mamy, więc:

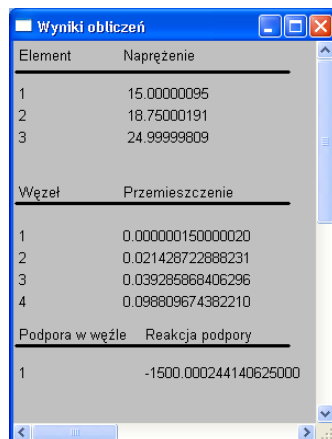
Rys. 10

Program prowadzi obliczenia i po chwili możemy przeglądać wyniki. Z menu **Widok** wybieramy **Naprężenia**, na ekranie pojawiają się wyniki obliczeń (rys. 11):



Rys. 11

Szczegółowe wyniki znajdują się w menu **Widok/Wyniki obliczeń**: wartości naprężeń w poszczególnych stopniach wału, przemieszczenie kolejnych węzłów i reakcja podpory. Całkowite wydłużenie pręta $\Delta l = u_4$ (rys. 12).



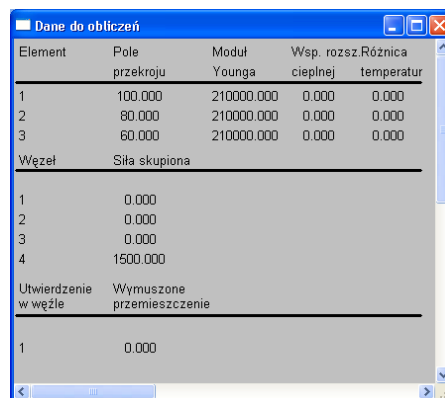
Element	Napężenie
1	15.00000095
2	18.75000191
3	24.99999809

Węzeł	Przemieszczenie
1	0.000000150000020
2	0.021428722888231
3	0.039285868406296
4	0.098809674382210

Podpora w węźle	Reakcja podpory
1	-1500.000244140625000

Rys. 12

Warto jeszcze sprawdzić, czy dane są dobrze wprowadzone. Wybieramy z menu **Widok/Dane do obliczeń** (rys. 13):



Element	Pole przekroju	Moduł Younga	Wsp. rozsz. cieplnej	Różnica temperatur
1	100.000	210000.000	0.000	0.000
2	80.000	210000.000	0.000	0.000
3	60.000	210000.000	0.000	0.000

Węzeł	Siła skupiona
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	1500.000

Utwierdzenie w węźle	Wymuszone przemieszczenie
1	0.000

Rys. 13

Jeżeli dane są dobrze wprowadzone, wyniki możemy zapisać na dysku lub kontynuować obliczenia innego obciążenia lub całkowicie inny przykład.

**Politechnika Lubelska, Wydział Mechaniczny
Katedra Mechaniki Stosowanej
Laboratorium Wytrzymałości Materiałów**

<i>Imię i nazwisko</i>	<i>Grupa</i>	<i>Data wykonania</i>	<i>Prowadzący</i>	<i>Ocena</i>

Laboratorium Wytrzymałości Materiałów

Statycznie wyznaczalny przypadek osiowego rozciągania

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wizualizacja zjawisk zachodzących podczas obciążania statycznie wyznaczalnego, stopniowanego pręta pracującego w osiowym rozciąganiu lub ściskaniu. Porównanie dla zadanego przypadku wartości wydłużenia przy narastającym obciążeniu otrzymanych na drodze badań doświadczalnych oraz obliczeń metodą superpozycji i MES.

2. Opis stanowiska badawczego

Badania doświadczalne stopniowanego wałka pracującego w osiowym rozciąganiu lub ściskaniu wykonywane są na stanowisku badawczym składającym się ze zrywarki Z100 firmy Zwick oraz zestawu komputerowego. Dodatkowo do pomiarów próbki na stanowisku znajdują się przyrządy pomiarowe: suwmiarka oraz śruba mikrometryczna.

3. Przebieg ćwiczenia

1. Szkicujemy zarys analizowanego pręta i wymiarujemy go. Pomiary powtarzamy, a w sprawozdaniu zamieszczamy wartości średnie.
2. Zmierzone dane umieszczamy w tabeli 1.
3. Próbkę mocujemy w szczękach maszyny wytrzymałościowej i mierzymy dla zadanych sił wydłużenie całkowite wałka. Wyniki wpisujemy do tabeli 2.
4. Z wykorzystaniem komputera metodą MES sprawdzamy otrzymane wyniki. Wydruki wprowadzonych danych i wyniki obliczeń należy dołączyć do sprawozdania.

4. Opracowanie wyników i wykonanie sprawozdania

W celu przygotowania sprawozdania należy:

- a) Narysować zwymiarowaną próbkę. Dołączyć uwagi dotyczące stanu próbki i dokładności jej wykonania.
- b) Ze zmierzonych danych dla podanej przez prowadzącego siły P obliczyć: naprężenia σ we wszystkich stopniach i narysować wykres naprężeń $\sigma=f(x)$. Metodą superpozycji obliczyć teoretyczną wartość całkowitego wydłużenia wałka Δl_t .
- c) Policzyc błąd popełniony przy wyznaczaniu całkowitego wydłużenia:

$$\delta(\Delta l) = \frac{|\Delta l_d - \Delta l_t|}{\Delta l_t} \cdot 100\%$$

gdzie Δl_d - wartość doświadczalna całkowitego wydłużenia wałka.

- d) Z danych doświadczalnych narysować wykres zależności całkowitego wydłużenia od przyłożonej siły.
- e) Otrzymane wyniki teoretyczne i doświadczalne porównać z wynikami obliczonymi metodą MES. Dołączyć wydruki obliczeń.
- f) Osoby chętne mogą obliczenia MES wykonać na papierze bez używania programów komputerowych.

5. Schemat próbki

6. Wymiary i inne dane:

Tabela 1

Lp.	l_1	l_2	l_3	d_1	d_2	d_3	E
	[...]	[..]	[...]	[..]	[...]	[...]	[...]
1							
2							
3							

9. Wykres zależności całkowitego wydłużenia od przyłożonej siły

10. Wykres naprężeń $\sigma=f(x)$

11. Wnioski i uwagi końcowe.