
Politechnika Lubelska



MECHANIKA

Laboratorium wytrzymałości materiałów ...

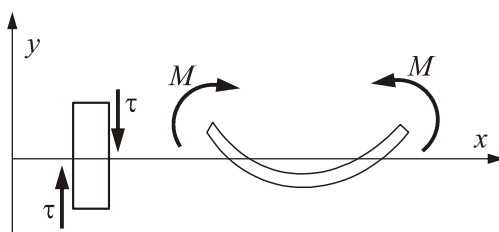
Ćwiczenie 3 - Czyste zginanie statycznie wyznaczalnej belki

Przygotował: Andrzej Teter
(do użytku wewnętrznego)

Czyste zginanie statycznie wyznaczalnej belki

Siły wewnętrzne

Siły zapewniające spójność obciążonego elementu są nazywane **siłami wewnętrznymi**. Siły te mają charakter oddziaływań wewnętrznych i można je ujawnić wyłącznie po myślowym przecięciu pręta dowolną płaszczyzną. Procedurę tę nazywamy **metodą przecięć**. Po przecięciu pręta rozdzielone jego części uważa się za niezależne. Siły wewnętrzne działające w płaszczyźnie myślowego przekroju są zawsze skierowane przeciwnie względem siebie, zgodnie z III zasadą Newtona. Prawa część pręta działa na część lewą dokładnie, w taki sam sposób, jak część lewa oddziałuje na prawą, ale z przeciwnym znakiem. W ogólnym przypadku siły wewnętrzne rozłożone na powierzchni przekroju sprowadzamy do siły wypadkowej **F** i momentu wypadkowego **M** przyłożonych do środków ciężkości przekrojów. Graficzne przedstawienie zmienności sił wewnętrznych na długości pręta nazywa się **wykresem sił wewnętrznych**. W przypadku czystego zginania jedyną niezerową składową sił wewnętrznych jest moment gnący. Przy sporządzaniu wykresów sił wewnętrznych obowiązuje umowa znakowa. W naszym przypadku znaki dodatnie sił wewnętrznych ustalamy zgodnie z rys. 1.



Rys. 1

W celu zbudowania wykresów sił wewnętrznych na wstępie układ uwalniamy od więzów i wyznaczamy reakcje podpór z równań równowagi zapisanych dla całego układu. Dla płaskiego układu sił działających w płaszczyźnie xy mamy:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{io} = 0 \quad (1)$$

gdzie: P_x – rzuty sił na przyjętą oś x , P_y – rzuty sił na przyjętą oś y , M_o – moment sił względem dowolnego punktu płaszczyzny xy .

Przyjmujemy dowolny układ współrzędnych, przy czym oś x zawsze skierowana jest wzdłuż długości analizowanego elementu. Dzielimy belkę na przedziały, w których osobno buduje się wykresy sił wewnętrznych. W każdym przedziale siły wewnętrzne są opisane jedną funkcją typu np. $M=f(x)$. Granicę przedziału wyznacza tak zwany **punkt charakterystyczny**. **Punkty charakterystyczne** są to: początek i koniec pręta, punkty przyłożenia więzów, punkty przyłożenia sił i momentów skupionych, punkty stanowiące początek i koniec obciążenia ciągłego, punkty, w których łączą się pręty o różnych krzywiznach. W każdym przedziale belkę przecinamy (zgodnie z metodą przecięć), rozdzielając ją na dwie części. Jedną z nich myślowo odrzucamy, a jej oddziaływanie zastępuje działaniem wypadkowych sił wewnętrznych przyłożonych w środkach ciężkości analizowanych elementów. Można odrzucić dowolną część. W ogólnym przypadku w przekrojach poprzecznych belki występują trzy składowe siły wewnętrznych: moment zginający M_g , siła tnąca T oraz siła normalna N . W przypadku czystego zginania $T=N=0$. Przyłożone siły wewnętrzne zapewniają równowagę obu części belki. W celu ich wyznaczenia zapisuje się warunki równowagi, ale tylko dla rozpatrywanej części belki. Identyczny wynik otrzymamy redukując wszystkie siły zewnętrzne z odrzuconej części do środka ciężkości. Aby zbudować **wykres sił wewnętrznych** na osi odciętych przyjmuje się współrzędną położenia x , zaś na osi rzędnych kolejno odpowiednią siłę wewnętrzną np. M_g . Po przyjęciu odpowiedniej podziałki dla sił odkłada się obliczone uprzednio wartości i łączy ze sobą odcinkami krzywych opisanych odpowiednimi funkcjami: $M_g = f(x)$. Wykresy należy kreskować prostopadłe do osi odniesienia, tzn. zgodnie z kierunkiem odkładania przedstawionych na wykresie wartości. Na zakreskowanych polach zaznacza się również znaki sił wewnętrznych zgodnie z przyjętą umową. Otrzymane wykresy sił wewnętrznych dodatkowo spełniają analityczne warunek [9,12,20]:

$$\frac{dT(x)}{dx} = \pm q \qquad \frac{dM_g(x)}{dx} = \pm T(x) \qquad (2)$$

gdzie: q – intensywność obciążenia ciągłego. Znaki (\pm) wynikają z umowy znakowej i przyjętego układu współrzędnych.

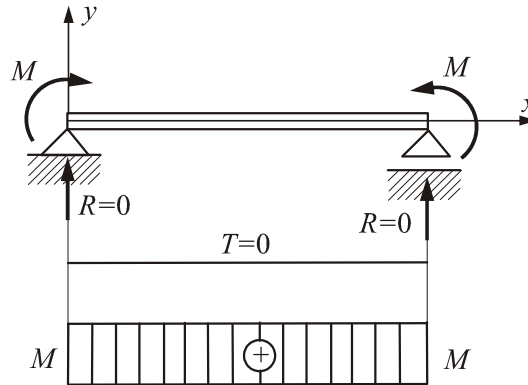
Czyste zginanie

Czyste zginanie jest to szczególny przypadek zginania, gdy w belce występuje wyłącznie moment gnący. W tym przypadku wartość momentu gnącego jest stały, a siła tnąca nie występuje (rys.2).

W celu określenia zależności pomiędzy naprężeniami i odkształceniami przy czystym zginaniu przyjmuje się następujące założenia upraszczające:

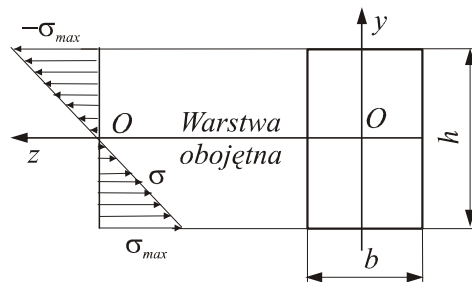
1. Obciążenia działają w płaszczyźnie symetrii belki zwanej **płaszczyzną zginania**.
2. Przekroje płaskie prostopadłe do osi podłużnej belki pozostają płaskimi i prostopadłymi do osi po zgięciu belki (tzw. **hipoteza Bernoulliego**).

3. Włókna, równoległe do osi belki przed ugięciem, pozostają równoległe również do ugiętej osi i nie oddziałują na siebie w kierunku prostopadłym do osi belki.



Rys. 2

Na podstawie tych założeń można udowodnić, że wzdłużne odkształcenia względem osi x w zginanej belce zmieniają się liniowo wzdłuż wysokości belki od wartości minimalnych do wartości maksymalnych (rys.3). Włókna podłużne, których odkształcenia względne są równe zero, leżą w płaszczyźnie nazywanej **warstwą obojętną**. Włókna podłużne po stronie wypukłej belki ulegają wydłużeniu, a włókna po stronie wklęsłej ulegają skróceniu. Naprężenia po stronie wklęsłej są naprężeniami ściskającymi, a naprężenia po stronie wypukłej są naprężeniami rozciągającymi. Doświadczenia wykazują, że deformacje włókien w kierunku bocznym są takie same jak przy prostym rozciąganiu lub ściskaniu.



Rys. 3

Dlatego naprężenie normalne w każdym włóknie jest wprost proporcjonalne do jego odkształcenia podłużnego. Zapisując prawo Hooke'a dla jednoosiowego stanu naprężenia otrzymuje się:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E = E \cdot \frac{y}{\rho} \quad (3)$$

gdzie: σ - naprężenie normalne wywołane zginaniem, ε - odkształcenie względne, E - moduł Younga, y - odległość włókien od warstwy obojętnej, ρ - krzywiz-

zna warstwy obojętnej. Ze związku (3) wynika, że naprężenia normalne przy czystym zginaniu mają kierunek prostopadły do przekroju poprzecznego belki i zmieniają się liniowo wraz z odległością y od warstwy obojętnej. Położenie osi obojętnej z w przekroju poprzecznym można wyznaczyć z warunku równowagi. Skąd otrzymujemy warunki:

$$\int_F y \cdot dF = 0 \quad (4)$$

$$\int_F yz \cdot dF = 0 \quad (5)$$

Całka ze wzoru (4) jest nazywana **momentem statycznym** pola przekroju poprzecznego F względem płaszczyzny xz . Aby spełnić powyższy warunek oś y musi przechodzić przez środek ciężkości przekroju poprzecznego belki. Jest to więc **oś główna**. Całka (5) jest nazywana **momentem dewiacyjnym** I_{yz} pola przekroju poprzecznego względem płaszczyzny zy . Z tego warunku wynika, że oś y jest osią symetrii przekroju poprzecznego belki, a więc osie y i z są głównymi, centralnymi osiami bezwładności przekroju poprzecznego belki. Wartość momentu gnącego M_g możemy wyznaczyć z równania:

$$\frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = M_g \quad (6)$$

Całka ze wzoru (6) jest **momentem bezwładności** I_z przekroju poprzecznego belki względem płaszczyzny xz . Powyższe wyrażenie (6) można zapisać w postaci:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_g}{EI_z} \quad (7)$$

Iloczyn EI_z w powyższym wyrażeniu jest nazywany **sztywnością belki na zginanie**. Po podstawieniu wyrażenia określającego krzywiznę (7) do wyrażenia (3) otrzymuje się:

$$\sigma = \frac{M_g}{I_z} y \quad (8)$$

Z zależności (8) wynika, że maksymalne naprężenia w belce występują we włóknach najbardziej oddalonych od osi płaszczyzny xz . Po podstawieniu $|y| = y_{\max}$ do wzoru (8) otrzymuje się:

$$\sigma = \pm \frac{M_g}{W_z} \quad (9)$$

gdzie:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} \quad (10)$$

jest nazywany **wskaźnikiem wytrzymałości na zginanie** przekroju poprzecznego belki. Znak we wzorze (9) określamy z umowy znakowej. Jeżeli naprężenia powodują wydłużenie włókien to przyjmujemy znak (+), gdy zaś skrócenie znak (-). Podczas projektowania belek zadanie praktycznie ogranicza się do wyboru kształtu przekroju poprzecznego belki i takiego zwymiarowania go, aby rzeczywiste naprężenie maksymalne w belce nie przekroczyło naprężeń dopuszczalnych:

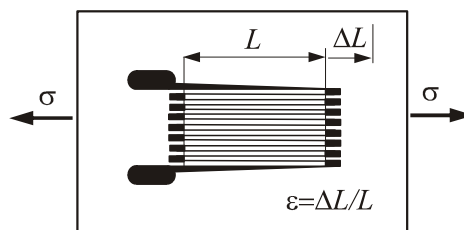
$$\sigma_{\max} = \left| \frac{M_{g \max}}{W_z} \right| \leq k_{rc} \quad (11)$$

gdzie: σ_{\max} - maksymalne naprężenia zginające w belce, k_{rc} - naprężenia dopuszczalne na rozciąganie lub na ściskanie. Zależność (11) nazywamy **warunkiem wytrzymałościowym na zginanie**.

Przy konstruowaniu belek należy dążyć do tego, aby wskaźnik wytrzymałości miał maksymalną wartość przy najmniejszej powierzchni przekroju poprzecznego, co przyczynia się do uzyskania minimalnego ciężaru belki. Zwiększenie wskaźnika wytrzymałości wymaga zwiększenia momentu bezwładności, który ze swej strony wzrasta, gdy większe części przekroju są skupione w skrajnych odległościach od osi obojętnej (np. przekrój dwuteowy).

Badania tensometryczne

W badaniach doświadczalnych do pomiaru odkształceń zastosujemy najbardziej dostępne czujniki w postaci tensometrów oporowych. Są one powszechnie stosowane w praktyce laboratoryjnej ze względu na ich dokładność oraz dostępność. Posiadają inne zalety: mogą mierzyć obciążenia statyczne i dynamiczne, układy w ruchu jednocześnie w wielu punktach, mają pomijalny ciężar, dają bezpośredni pomiar. Tensometry mierzą odkształcenie wzdłuż ustalonego kierunku. Można je stosować na powierzchni każdego ciała, niezależnie od sposobu podparcia i obciążenia elementu. Swobodna powierzchnia ciała zawsze pracuje w płaskim stanie naprężenia. W przypadku czystego zginania belki mogą to być tensometry pojedyncze (rys.4), ponieważ znamy kierunki naprężeń głównych.



Rys. 4

Pojedynczy tensometr oporowy zbudowany jest z drutu oporowego pociętego na kawałki o jednakowej długości L (jest to tak zwana **baza tensometru**). Druty są od siebie odizolowane i połączone szeregowo. Dodatkowo w celu zabezpieczenia

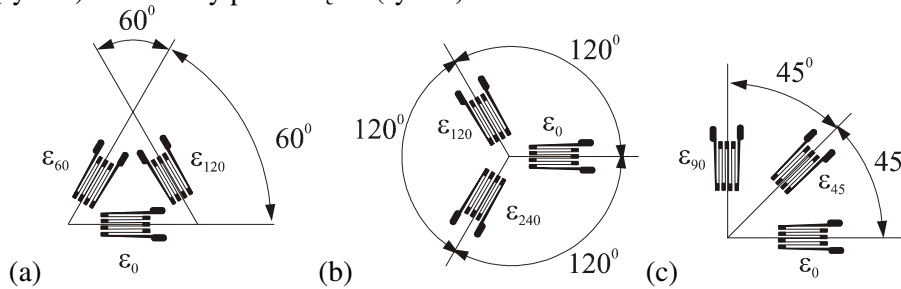
przed działaniem otoczenia są oklejone z obu stron elastycznym izolatorem. Tensometr na trwale, specjalnym klejem, mocujemy na powierzchni badanego elementu. Na skutek działającego obciążenia element odkształca się, a wraz z nim przyklejony tensometr. Aby zbadać wielkość odkształcenia tensometru mierzymy zmianę jego oporu przed i po obciążeniu. Znając jego charakterystykę możemy zmierzyć odkształcenie elementu. Charakterystyka tensometru, czyli zależność jego odkształcenia w funkcji zmiany oporu, podawana jest przez producenta i w zakresie pomiarowym jest najczęściej liniowa:

$$\varepsilon = k \cdot \frac{\Delta R}{R} \quad (12)$$

gdzie: k – stała tensometru, R – opór tensometru. Znając odkształcenie z prawa Hooke’a dla jednowymiarowego rozciągania wyznaczmy naprężenie:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (13)$$

W ogólnym przypadku, gdy nie potrafimy wskazać kierunków głównych naprężeń, do jednoznacznego opisu stanu naprężeń w punkcie potrzebujemy trzech pojedynczych tensometrów. W praktyce są one ze sobą zespolone i tworzą jeden element nazywany **rozetą tensometryczną**. Rozróżniamy różne typy rozet, jednak najpopularniejsze są rozety typu delta o kącie 60° (rys.5a) lub 120° (rys.5b) oraz rozety prostokątne (rys.5c).



Rys. 5

Wartości naprężeń głównych wyznaczamy z zależności:

a) dla rozety delta o kącie 60° (rys.5a):

$$\sigma_1 = \frac{E(\varepsilon_0 + \varepsilon_{60} + \varepsilon_{120})}{3(1-\nu)} \pm \frac{E \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot (1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{60})^2 + (\varepsilon_{60} - \varepsilon_{120})^2 + (\varepsilon_{120} - \varepsilon_0)^2} \quad (14)$$

b) dla rozety delta o kącie 120° (rys.5b):

$$\sigma_1 = \frac{E(\varepsilon_0 + \varepsilon_{120} + \varepsilon_{240})}{3(1-\nu)} \pm \frac{E \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot (1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{120})^2 + (\varepsilon_{120} - \varepsilon_{240})^2 + (\varepsilon_{240} - \varepsilon_0)^2} \quad (15)$$

c) dla rozety prostokątnej (rys.5c):

$$\sigma_1 = \frac{E(\varepsilon_0 + \varepsilon_{90})}{2(1-\nu)} \pm \frac{E}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{90})^2 + (2\varepsilon_{45} - \varepsilon_0 - \varepsilon_{90})^2} \quad (16)$$

Politechnika Lubelska, Wydział Mechaniczny
Katedra Mechaniki Stosowanej
Laboratorium Wytrzymałości Materiałów

<i>Imię i nazwisko</i>	<i>Grupa</i>	<i>Data wykonania</i>	<i>Prowadzący</i>	<i>Ocena</i>

Laboratorium Wytrzymałości Materiałów

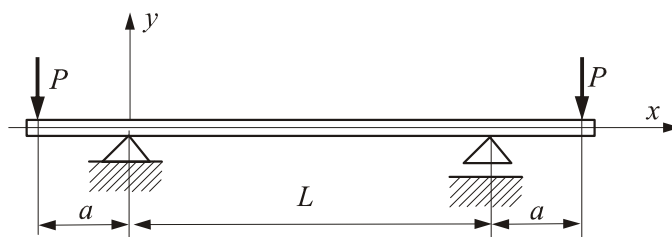
Czyste zginanie statycznie wyznaczalnej belki

1. Cel ćwiczenia.

Celem ćwiczenia jest doświadczalne badanie z zastosowaniem tensometrów oporowych statycznie wyznaczalnej, swobodnie podpartej belki obciążonej pionowymi siłami skupionymi.

2. Opis stanowiska badawczego

Badania doświadczalne prowadzimy na stanowisku (rys. 1) składającym się z belki stalowej o stałej sztywności na zginanie. Belka jest swobodnie podparta i obciążona na obu końcach szalkami z odważnikami o ciężarze P każdy. Rozstaw podpór wynosi L , zaś szalki z odważnikami zawieszono w odległości a od podpór. Na powierzchni górnej i dolnej belki naklejono tensometry połączone z układem pomiarowym ESAM TRAVELLER i komputerem zbierającym pomiary.



Rys. 1

3. Przebieg ćwiczenia

1. Dokonać pomiaru w kilku miejscach geometrii belki: L - długość, b - szerokość, h - wysokość, a - odległość obciążeń. Pomiary powtarzamy, a w sprawozdaniu zamieszczamy wartości średnie.
2. Sprawdzić czy belka znajduje się symetrycznie na podporach.
3. Zgodnie z wytycznymi prowadzącego przygotować układ pomiarowy.
4. Dokonać pomiarów odkształcenia dla wskazanych obciążeń.

4. Opracowanie wyników i wykonanie sprawozdania

- 1) W celu opracowania sprawozdania należy:
 - a) Wszystkie wyniki pomiarów umieścić w sprawozdaniu.
 - b) Naszkicować zarys belki, wyznaczyć reakcje i narysować wykresy sił wewnętrznych dla omawianej belki.
 - c) Z badań doświadczalnych obliczyć naprężenia normalne σ_d na zewnętrznych powierzchniach belki.
 - d) Obliczyć teoretyczne wartości naprężenia normalne σ_t na zewnętrznych powierzchniach belki.
 - e) Błąd popełniony wyznaczyć ze wzoru:

$$\delta\sigma = \frac{|\sigma_t - \sigma_d|}{\sigma_t} \cdot 100\%$$

- f) Otrzymane wartości naprężeń teoretycznych i doświadczalnych przebieść na wykres momentu gnącego w funkcji odkształceń względnych.

5. Wykresy sił wewnętrznych

6. Wymiary stanowiska i inne dane

Tabela 1

Lp.	L [...]	b [...]	h [...]	E [...]	I [...]	a [...]	W_z [...]
1							
2							
3							
Średnia							

7. Wyniki pomiarów i obliczeń

(a) **Tensometr 1** – naklejony na górnej powierzchni belki:

Tabela 2

Obciążenie P [..]	Odkształcenie względne ε [...]	Naprężenie doświadczalne σ_d [...]	Naprężenie teoretyczne σ_t [...]	Błąd pomiaru $\delta y = \frac{ \sigma_d - \sigma_t }{\sigma_t} \cdot 100\%$

(a) **Tensometr 2** – naklejony na dolnej powierzchni belki:

Tabela 3

Obciążenie P [..]	Odkształcenie względne ε [...]	Naprężenie doświadczalne σ_d [...]	Naprężenie teoretyczne σ_t [...]	Błąd pomiaru $\delta y = \frac{ \sigma_d - \sigma_t }{\sigma_t} \cdot 100\%$

Uwaga. Podać wszystkie wzory, podstawienia i wyniki obliczeń teoretycznych i błędów.

8. Wykres momentów gnących w funkcji odkształceń względnych

9. Wnioski i uwagi końcowe