

---

Politechnika Lubelska



MECHANIKA

---

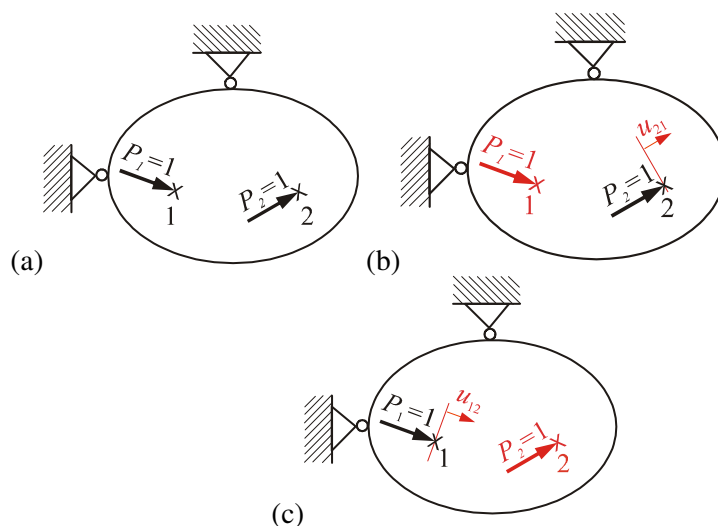
## Laboratorium wytrzymałości materiałów ...

Ćwiczenie 20 - Wyznaczanie linii ugięcia  
belki z zastosowaniem twierdzenia  
o wzajemności przemieszczeń

Przygotował: Andrzej Teter  
*(do użytku wewnętrznego)*

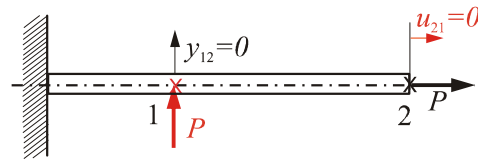
# Wyznaczanie linii ugięcia belki z zastosowaniem twierdzenia o wzajemności przemieszczeń

W 1864 roku James Clark Maxwell (1831-1879) sformułował następujące twierdzenie: „Jeżeli na układ liniowo-sprężysty działają dwie identyczne, co do wartości siły, to przemieszczenie odpowiadające pierwszej sile, lecz wywołane przez drugą, jest równe przemieszczeniu odpowiadającemu drugiej, lecz spowodowanej pierwszą siłą”. Należy podkreślić, że przemieszczenie jest definiowane jako przesunięcie punktu przyłożenia siły w kierunku jej działania. W mechanice ciała odkształcalnego nazwane twierdzeniem o wzajemności przemieszczeń lub twierdzeniem Maxwella.



Rys. 1

W praktyce oznacza to, że dla analizowanej konstrukcji (rys.1) wybieramy dwa dowolne punkty: (1) i (2), w miejscach dostępnych do pomiaru przemieszczeń (rys. 1a). Przykładamy dowolną siłę  $P_1$  w punkcie (1) i badamy przemieszczenie punktu (2) w kierunku działania siły, które oznaczamy np.  $u_{21}$  (rys. 1b). Po czym przykładamy siłę  $P_2$  w punkcie (2) i badamy przemieszczenie punktu (1), które oznaczamy np.  $u_{12}$  (rys. 1c). Jeżeli siły są sobie równe  $P_1=P_2=1$ , to na podstawie twierdzenia Maxwella stwierdzamy, że  $u_{21}=u_{12}$ . Najłatwiej sprawdzić to, gdy belka jest jednocześnie rozciągana i zginana tak jak na rys. 2.

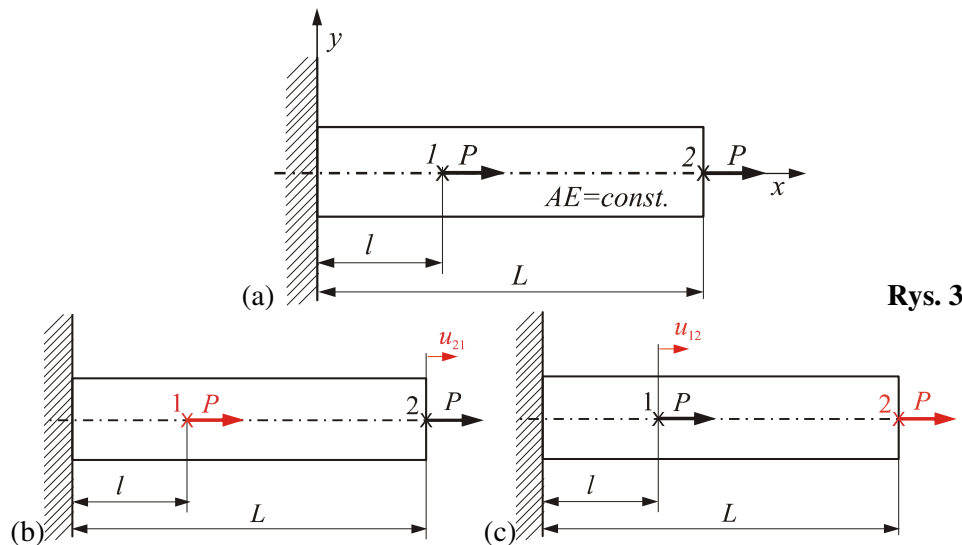


Rys.2

Badamy wariant I, gdy działa siła rozciągająca w punkcie (2). Przykładamy siłę zginającą w punkcie (1) i stwierdzamy doświadczalnie, że wydłużenie  $u_{21}=0$ . W wariantie II odwracamy kolejność: działa siła zginająca w punkcie (1) i przykładamy siłę rozciągającą w punkcie (2), stwierdzamy, że przemieszczenie  $y_{12}=0$ . Tym samym mamy:  $u_{21}=y_{12}$  itd. Analogiczne rozważania można prowadzić dla elementu skręcanego i rozciąganego lub zginanego.

Twierdzenie o wzajemności przemieszczeń ma również zastosowanie, gdy jedno obciążenie jest siłą, a drugie momentem lub gdy obydwie obciążenia są momentami. Możemy go stosować do konstrukcji dowolnego typu: kratownicy, belki, ramy, korpusu itp. Ograniczeniem jest to, aby układ był liniowo-sprężysty tzn. materiał musi spełniać prawo Hooke'a, przemieszczenia muszą być małe. W takim przypadku obowiązuje zasada superpozycji.

Prawdziwość twierdzenia Maxwella łatwo sprawdzić na innym przykładzie: pręta rozciąganego dwoma siłami  $P$  (rys. 3).



Rys. 3

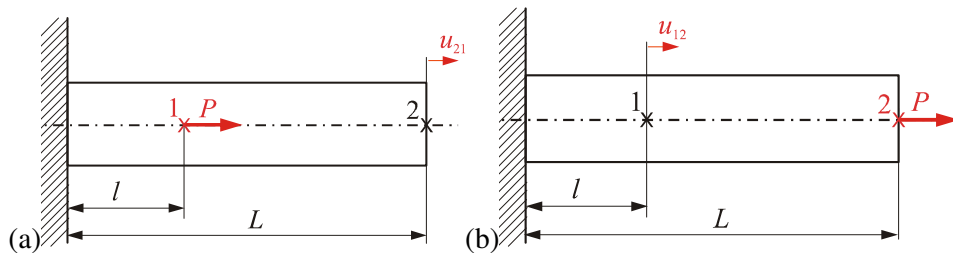
W rozpatrywanym przypadku (rys. 3a) pryzmatycznego pręta o polu przekroju poprzecznego  $A$  siły są przyłożone w punktach np. (1)  $x=l$ , (2)  $x=L$ . W pierwszej wersji obliczeń przykładamy siłę w punkcie (1) i liczymy przemieszczenie  $u_{21}$  punktu przyłożenia drugiej siły  $P$  (punkt (2)), które wywoła przyłożona siła (rys. 3b). Stosując prawo Hooke'a:

$$u_{21} = \frac{P \cdot l}{EA} \quad (1)$$

Zmieniamy kolejność: przykładamy siłę  $P$  w punkcie (2) i liczymy przemieszczenie  $u_{12}$  punktu (1) (rys. 3c), stosując prawo Hooke'a:

$$u_{12} = \frac{P \cdot l}{EA} \quad (2)$$

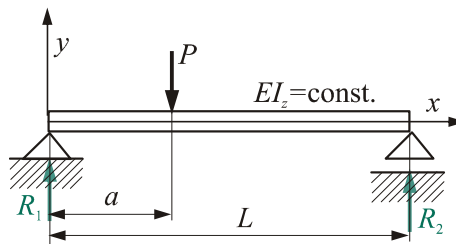
Jak widać  $u_{21}=u_{12}$ , co potwierdza prawdziwość twierdzenia Maxwella. Identyczne wartości przemieszczeń otrzymamy licząc układ nieobciążony (rys. 4), który obciążymy przykładając siłę w punkcie (1) i liczymy przemieszczenie punktu (2), a następnie przykładamy siłę  $P$  w punkcie (2) i liczymy przemieszczenie punktu (1).



**Rys. 4**

Analogiczne rozważania łatwo można powtórzyć dla skręcania pręta momentem skupionym  $M_s$ . Należy pamiętać, że w tym przypadku przemieszczenie będzie kątem skręcenia. Dużo bardziej złożony jest przypadek zginania. Wybierzmy przęśło swobodnie podparte o długości  $L$  i obciążone pionową siłą  $P$  przyłożoną w dowolnym punkcie (1) odległym o  $a$  od podpory (rys. 5). Zakładamy, że sztywność na zginanie jest stała  $EI = \text{const.}$ . Reakcje w podporach mają wartość:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{L-a}{L} \cdot P \\ R_2 = \frac{a}{L} \cdot P \end{cases} \quad (3)$$



**Rys. 5**

W celu określenia ugięcia w dowolnym punkcie musimy wyznaczyć równanie linii ugięcia. W przypadku układu wieloprzędziowego stosujemy metodę Czebyszewa [1-4]. Równanie linii ugięcia wyrażone jest równaniem różniczkowym:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_g}{EI_z} \quad (4)$$

Moment gnący  $M_g$  w równaniu (4) ma znak ( $\pm$ ) zgodny z umową przyjętą dla momentów gnących. Rozwiązanie powyższego równania różniczkowego polega na dwukrotnym scałkowaniu i wyznaczeniu stałych całkowania z warunków brzegowych. W ogólnym przypadku równanie różniczkowe linii ugięcia należy rozwiązać w każdym przedziale zmienności sił wewnętrznych. Obliczenia upraszczają się stosując procedurę Clebscha, która pozwala automatycznie spełnić warunki ciągłości układu. W analizowanym przypadku mamy dwa przedziały zmienności momentu gnącego: I -  $x \in \langle 0, a \rangle$  oraz II -  $x \in \langle a, L \rangle$ . W skrótovej formie różniczkowe równanie linii ugięcia możemy zapisać:

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = P \cdot \frac{L-a}{L} \cdot x \Big|_I - P \cdot (x-a) \Big|_{II} \quad (5)$$

Pamiętamy, że obowiązuje umowa znakowa dla dodatnich sił wewnętrznych przedstawiona na rys. 7.1. Pierwsze całkowanie:

$$EI_z \frac{dy}{dx} = C + P \cdot \frac{L-a}{L} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_I - P \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_{II} \quad (6)$$

Drugie całkowanie:

$$EI_z y = D + C \cdot x + P \cdot \frac{L-a}{L} \cdot \frac{x^3}{6} \Big|_I - P \cdot \frac{(x-a)^3}{6} \Big|_{II} \quad (7)$$

Stałe całkowania  $C$  i  $D$  wyznaczamy z warunków początkowych: 1) dla  $x=0$ ,  $y=0$  oraz 2) dla  $x=L$ ,  $y=0$ . Z pierwszego warunku wynika, że  $D=0$ , z drugiego zaś:

$$C = -P \cdot \frac{(L-a) \cdot (2L-a) \cdot a}{6 \cdot L} \quad (8)$$

Podstawiając stałe całkowania do równania (7) otrzymujemy równanie linii ugięcia dla analizowanej belki:

$$EI_z y = -P \cdot \frac{(L-a) \cdot (2L-a) \cdot a}{6 \cdot L} \cdot x + P \cdot \frac{L-a}{L} \cdot \frac{x^3}{6} \Big|_I - P \cdot \frac{(x-a)^3}{6} \Big|_{II} \quad (9)$$

Sprawdźmy twierdzenie Maxwella dla punktów: (1)  $x=L/3$  oraz (2)  $x=L/2$  (rys. 6). Na wstępie przykładamy siłę w punkcie (1), więc  $a=L/3$  i mierzymy ugięcie w punkcie (2)  $y_{21}$  dla  $x=L/2$  (rys. 6a). Podstawiamy dane do równania (9), pamiętając, o tym że ( $a=L/3$ ), więc przedziały są określone: I -  $x \in \langle 0, L/3 \rangle$ , II -  $x \in \langle L/3, L \rangle$  oraz  $x=L/2$  należy do II przedziału:

$$EI_z y_{21}|_{x=L/2} = -P \cdot \frac{(L-L/3) \cdot (2L-L/3) \cdot L/3}{6 \cdot L} \cdot \frac{L}{2} + P \cdot \frac{L-L/3}{L} \cdot \frac{(L/2)^3}{6} - P \cdot \frac{(L/2-L/3)^3}{6} \quad (10)$$

Po obliczeniach otrzymujemy:

$$EI_z y_{21}|_{x=L/2} = -0,017746913 \cdot PL^3 \quad (11)$$

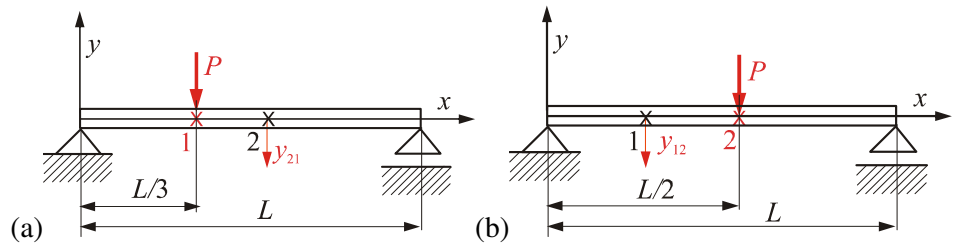
Następnie przykładamy siłę w punkcie (2), więc  $a=L/2$  i mierzymy ugięcie w punkcie (1)  $y_{12}$  dla  $x=L/3$  (rys. 6b). Podstawiamy dane do równania (9), pamiętając, o tym że ( $a=L/2$ ), więc przedziały są określone: I -  $x \in <0, L/2>$ , II -  $x \in (L/2, L>$  oraz  $x=L/3$  należy do I przedziału:

$$EI_z y_{12}|_{x=L/3} = -P \cdot \frac{(L-L/2) \cdot (2L-L/2) \cdot L/2}{6 \cdot L} \cdot \frac{L}{3} + P \cdot \frac{L-L/2}{L} \cdot \frac{(L/3)^3}{6} \quad (12)$$

Po obliczeniach otrzymujemy:

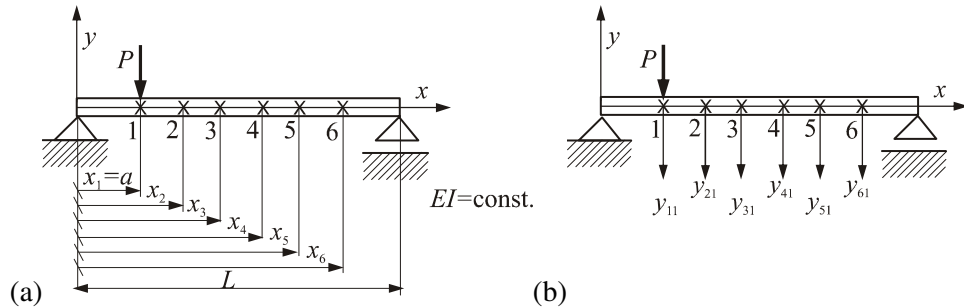
$$EI_z y_{12}|_{x=L/3} = -0,017746913 \cdot PL^3 \quad (13)$$

Ostatecznie otrzymujemy:  $y_{21}=y_{12}$ , co potwierdza nasze oczekiwania.



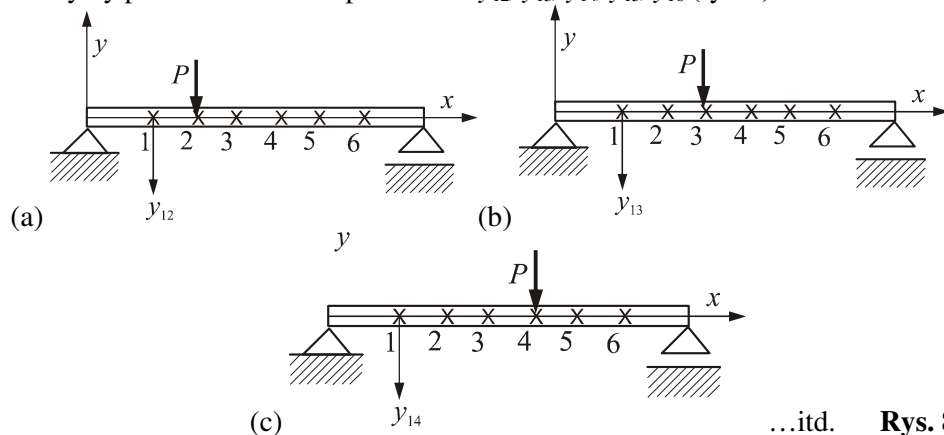
**Rys. 6**

Twierdzenie Maxwella możemy wykorzystać do doświadczalnego wyznaczenia linii ugięcia w przypadku pręta swobodnie podpieranego obciążonego pionową siłą  $P$  przyłożoną w dowolnym miejscu.



**Rys. 7**

Jeżeli ograniczymy pomiar przemieszczeń dla kilku punktów np. 6, to musimy w każdym punkcie umieścić czujnik mierzący przemieszczenie (rys. 7). Stosując twierdzenie o wzajemności przemieszczeń możemy postępować inaczej. Umieszczamy jeden czujnik przemieszczenia np. w punkcie 1 i mierzymy ugięcie w tym samym punkcie, mamy  $y_{11}$ . Przesuwamy siłę do kolejnych punktów i czujnikiem mierzymy przemieszczenie odpowiednio:  $y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}, y_{16}$  (rys. 8).

...itd. **Rys. 8**

Ponieważ wartość siły  $P = \text{const}$ , zgodnie z twierdzeniem Maxwella mamy:  $y_{12} = y_{21}, y_{13} = y_{31}, y_{14} = y_{41}, y_{15} = y_{51}, y_{16} = y_{61}$ . Co oznacza, że mamy kolejno ugięcia w punktach 1, 2, 3, 4, 5, 6 wywołane działaniem siły  $P$  przyłożonej w punkcie (1). Wykorzystując jeden czujnik wyznaczamy ugięcie w dowolnej liczbie punktów.

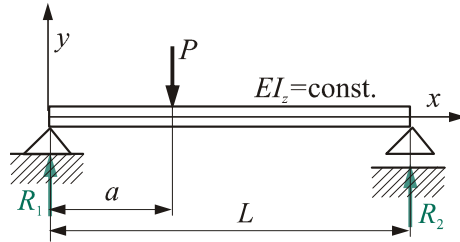
## Strzałką ugięcia

**Strzałką ugięcia** dla zginanej konstrukcji nazywamy maksymalne jej ugięcie. Wyznaczamy ją szukając lokalnego ekstremum funkcji opisującej linię ugięcia belki  $y=f(x)$  według wzoru:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad (10.1)$$

Jest to równoznaczne z tym, że kąt obrotu  $\vartheta = dy/dx$  w miejscu największego ugięcia jest równy zero. Dodatkowo należy sprawdzić ugięcia na krańcach przedziałów. Do szczegółowych rozważań przyjęto przęsło swobodnie podparte o długości  $L$  i obciążone pionową siłą  $P$  przyłożoną w dowolnym punkcie (1) odległym o  $a$  od podpory (rys. 10.1). Zakładamy, że sztywność na zginanie jest stała  $EI_z = \text{const}$ . Reakcje w podporach mają wartość:

$$\begin{cases} R_1 = \frac{L-a}{L} \cdot P \\ R_2 = \frac{a}{L} \cdot P \end{cases} \quad (10.2)$$



Rys. 10.1

W celu określenia ugięcia w dowolnym punkcie wyznaczamy ściśle równanie linii ugięcia stosując metodę Clebscha [6,9,12,20]. W analizowanym przypadku mamy dwa przedziały zmienności momentu gnącego: I -  $x \in \langle 0, a \rangle$  oraz II -  $x \in \langle a, L \rangle$ . W skróconej formie różniczkowe równanie linii ugięcia możemy zapisać:

$$EI_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = P \cdot \frac{L-a}{L} \cdot x \Big|_I - P \cdot (x-a) \Big|_{II} \quad (10.3)$$

Po dwukrotnym całkowaniu otrzymujemy:

$$EI_z y = D + C \cdot x + P \cdot \frac{L-a}{L} \cdot \frac{x^3}{6} \Big|_I - P \cdot \frac{(x-a)^3}{6} \Big|_{II} \quad (10.4)$$

Stałe całkowania  $C$  i  $D$  wyznaczamy z warunków początkowych: 1) dla  $x=0$ ,  $y=0$  oraz 2) dla  $x=L$ ,  $y=0$ . Z pierwszego warunku wynika, że  $D=0$ , z drugiego zaś:

$$C = -P \cdot \frac{(L-a) \cdot (2L-a) \cdot a}{6 \cdot L} \quad (10.5)$$

Podstawiając stałe całkowania do równania (10.4) otrzymujemy równanie linii ugięcia dla analizowanej belki:

$$EI_z y = -P \cdot \frac{(L-a) \cdot (2L-a) \cdot a}{6 \cdot L} \cdot x + P \cdot \frac{L-a}{L} \cdot \frac{x^3}{6} \Big|_I - P \cdot \frac{(x-a)^3}{6} \Big|_{II} \quad (10.6)$$

Wyrażenie (10.6) określa ugięcia wszystkich punktów belki, aby wyznaczyć strzałkę ugięcia korzystamy z warunku (10.1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{EI_z} \left[ -\frac{(L-a) \cdot (2L-a) \cdot a}{6 \cdot L} + \frac{L-a}{L} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_I - \frac{(x-a)^2}{2} \Big|_{II} \right] \quad (10.7)$$



W całym pierwszym przedziale  $x \in \langle 0, a \rangle$  pochodna  $(dy/dx) < 0$ , oznacza to, że w całym przedziale nie ma miejsca zerowego:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{P(L-a) \cdot (2L-a) \cdot a}{6 \cdot EI_z L} < 0 \quad (10.8)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = -\frac{P \cdot (L-a)^2 \cdot a}{3 \cdot EI_z L} < 0 \quad (10.9)$$

W drugim przedziale  $x \in \langle a, L \rangle$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = -\frac{P \cdot (L-a)^2 \cdot a}{3 \cdot EI_z L} < 0 \quad (10.10)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=L} = \frac{P \cdot (L^2 - a^2) \cdot a}{6 \cdot EI_z L} > 0 \quad (10.11)$$

Zmiana znaku pochodnej  $(dy/dx)$  potwierdza, że w tym przedziale znajduje się minimum lokalne. Podstawiamy wyrażenie na ugięcie w drugim przedziale dla równania (10.1):

$$-\frac{(L-a) \cdot (2L-a) \cdot a}{6 \cdot L} + \frac{L-a}{L} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{(x-a)^2}{2} = 0 \quad (10.12)$$

Rozwiązując równanie (10.12) wyznaczamy współrzędną  $x$ , opisującą miejsce gdzie ugięcie osiąga ekstremum lokalne (rys. 10.2). Łatwo sprawdzić, że:

$$x_1 = L - \sqrt{\frac{(2L-a) \cdot a}{3}} \quad \text{dla} \quad a \leq 0,5L \text{ (rys. 10.2a)} \quad (10.13)$$

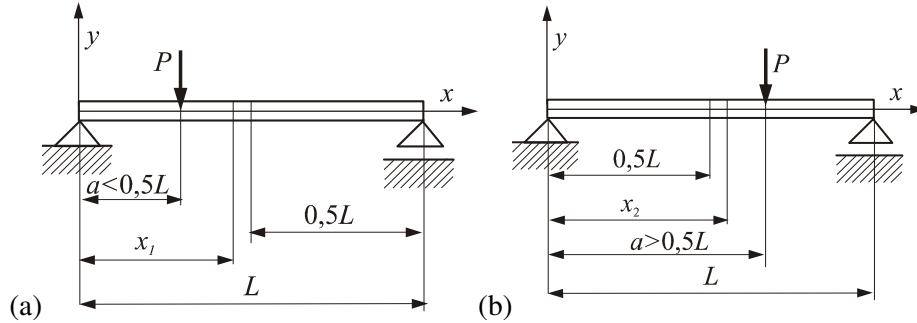
zaś dla  $a > 0,5L$  mamy:

$$-\frac{(L-a) \cdot (2L-a) \cdot a}{6 \cdot L} + \frac{L-a}{L} \cdot \frac{x_2^2}{2} = 0 \quad (10.14)$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{(2L-a) \cdot a}{3}} \quad \text{dla} \quad a > 0,5L \text{ (rys. 10.2b)} \quad (10.15)$$

Warto zauważyć, że  $a \rightarrow L$  (rys. 10.2b):

$$\lim_{a \rightarrow L} \sqrt{\frac{(2L-a) \cdot a}{3}} = \frac{L}{\sqrt{3}} = 0,577L$$

**Rys. 10.2**

Zaś dla  $a \rightarrow 0$  (rys. 10.2a)  $x \rightarrow L - 0,577L = 0,423L$ , co oznacza, że we wszystkich rozpatrywanych przypadkach strzałka ugięcia znajduje się w przedziale:  $x \in < 0,423L; 0,577L >$ . Podstawiając wartość (10.13) do wzoru (10.6) wyznaczamy ścisłą wartość strzałki ugięcia:

$$y_{\max} = y \Big|_{x=L-\sqrt{\frac{(2L-a) \cdot a}{3}}} \quad \text{dla} \quad a \leq 0,5L \quad (\text{rys. 10.2a}) \quad (10.16)$$

$$y_{\max} = -\frac{P}{6L \cdot EI_z} \left[ \begin{aligned} &(L-a) \cdot (2L-a) \cdot a \cdot \left( L - \sqrt{\frac{(2L-a) \cdot a}{3}} \right) + \\ &+ (L-a) \left( L - \sqrt{\frac{(2L-a) \cdot a}{3}} \right)^2 - \left( L - \sqrt{\frac{(2L-a) \cdot a}{3}} - a \right)^3 \end{aligned} \right] \quad (10.17)$$

zaś dla  $a > 0,5L$  mamy:

$$y_{\max} = y \Big|_{x=\sqrt{\frac{(2L-a) \cdot a}{3}}} = -\frac{P \cdot (L-a) \cdot L^2 \sqrt{3}}{27EI_z} \sqrt{\left( 1 - \frac{(L-a)^2}{L^2} \right)^3} \quad (10.18)$$

Jeżeli  $a=L/2$  to otrzymamy:

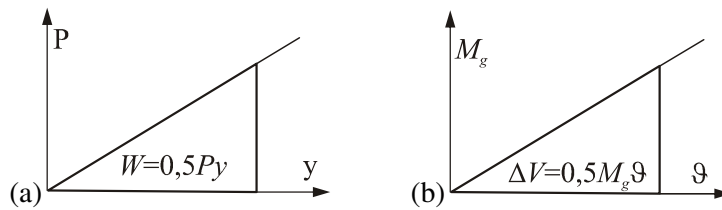
$$y_{\max} = y \Big|_{x=0,5L} = -\frac{P \cdot L^3}{48EI_z} \quad (10.19)$$

Przedstawiona metoda Clebscha jest metodą dokładną, ale w przypadku belek wieloprzęsłowych wyznaczenie strzałki ugięcia wymaga bardzo skomplikowanych i pracochłonnych rachunków. W celu zgrubnego oszacowania strzałki ugięcia możemy sięgnąć do metod przybliżonych, które zapisują linię ugięcia we wszystkich przedziałach jedną ciągłą funkcją. Do obliczeń praktycznie są przyjmowane dowolne funkcje, które powinny spełniać warunki podparcia belki i dodatkowo staramy się dopasować funkcje do znanych wartości sił, momentów i przemieszczeń. Linię ugięcia dla analizowanej belki (rys. 10.1) możemy na przykład opisać funkcją harmoniczną:

$$y = y_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{L} \quad (10.20)$$

Warunki podparcia: dla  $x=0, y=0$  oraz dla  $x=L, y=0$  są spełnione. Automatycznie są spełnione również warunki swobodnego brzegu:

$$M_g \Big|_{x=0} = EI_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad M_g \Big|_{x=L} = EI_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0, \quad (10.21)$$



Rys. 10.3

W celu wyznaczenia amplitudy ugięcia  $y_1$  stosujemy najogólniejszą zasadę mechaniki, zasadę zachowania energii:

$$W = \Delta V \quad (10.22)$$

Pracę sił zewnętrznych  $W$  (rys. 10.3a), w przypadku gdy siła  $P$  narasta od 0 do pełnej wartości  $P$ , wyznaczamy ze wzoru:

$$W = \frac{1}{2} P \cdot y \Big|_{x=a} \quad (10.23)$$

Zmiana energii wewnętrznej (rys. 10.3b) wywołana zginaniem wynosi:

$$\Delta V = \frac{1}{2} M_g \cdot \vartheta \quad (10.24)$$

Z ogólnego równania linii ugięcia otrzymujemy:

$$EI_z \frac{d^2 y}{dx^2} = EI_z \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = EI_z \frac{d\vartheta}{dx} = M_g \quad (10.25)$$

Przekształcając (10.25) otrzymujemy:

$$EI\vartheta = \int_L M_g dx \quad (10.26)$$

Podstawiając (10.26) do (10.24):

$$\Delta V = \int_L \frac{M_g^2 dx}{2EI_z} \quad (10.27)$$

Z zasady zachowania energii otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} P y|_{x=a} = \int_L \frac{M_g^2 dx}{2EI_z} \quad (10.28)$$

Z równania linii ugięcia  $M_g$  wyrażony jest wzorem (10.25). Podstawiając do (10.28):

$$\frac{1}{2} P y|_{x=a} = \int_L \frac{EI_z \cdot \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx}{2} \quad (10.29)$$

W analizowanym przypadku:  $EI = \text{const}$  oraz  $y = y_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{L}$ , zaś:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y_1 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (10.30)$$

Podstawiając do (10.29) powyższe wyrażenie otrzymujemy:

$$P \cdot y_1 \sin \frac{\pi a}{L} = EI_z \int_L y_1^2 \cdot \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx \quad (10.31)$$

Przekształcając, ostatecznie mamy:

$$y_1 = \frac{2PL^3 \sin \frac{\pi a}{L}}{\pi^4 EI_z} \quad (10.32)$$

Jeżeli przyjąć  $a=L/2$  to:

$$y_1 = \frac{2PL^3}{\pi^4 EI} = \frac{PL^3}{48,7 \cdot EI_z} \quad (10.33)$$

Strzałka ugięcia:

$$y_{\max} = y|_{x=0,5L} = \frac{PL^3}{48,7 \cdot EI_z} \quad (10.34)$$

jest bardzo blisko dokładnego rozwiązania (10.19). Zmiana znaku związana jest z przyjętym układem współrzędnych. Identyczne wyniki otrzymamy, gdy zbadamy zmianę energii wewnętrznej wywołaną zginaniem i pracę sił zewnętrznych spowodowaną małą zmianą amplitudy przemieszczenia  $dy_1$ . Z (10.20) (10.23) mamy:

$$dy = dy_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{L} \quad (10.35)$$

$$dW = P \cdot dy|_{x=a} \quad (10.36)$$

zaś:

$$d(\Delta V) = \frac{\partial(\Delta V)}{\partial y_1} \cdot dy_1$$

$$d(\Delta V) = \frac{\partial}{\partial y_1} \int_L \frac{EI_z \cdot \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2}{2} dx \cdot dy_1 = dy_1 \cdot EI_z \cdot \int_L \left[ \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) \right] dx \quad (10.37)$$

Ponieważ:

$$\frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = - \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{L}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y_1 \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (10.38)$$

Otrzymujemy:

$$P \cdot dy_1 \sin \frac{\pi a}{L} = dy_1 \cdot EI_z \int_L y_1 \cdot \left( \frac{\pi}{L} \right)^4 \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx \quad (10.39)$$

Dzieląc przez małą wielkość  $dy_1$  otrzymujemy identyczne wyrażenie jak (10.32). Czy otrzymany wynik przybliżony może być dokładniejszy? Tak, jeżeli zastosujemy krzywe wieloparametrowe np.:

$$y = \sum_{i=1}^n \left( y_i \cdot \sin \frac{i\pi x}{L} \right) \quad (10.40)$$

Aby wyznaczyć wszystkie współczynniki  $y_i$  należy stosować zasadę energii zaburzając kolejno wszystkie amplitudy składowe  $dy_i$  w zależności (10.40). Otrzymujemy układ liniowy z niewiadomymi współczynnikami:  $y_i$ .

W obliczeniach praktycznych bardzo często linie ugięcia dla belek opisuje się wielomianami. W omawianym przypadku belki w postaci przęsła od funkcji wymagamy spełnienia warunków podparcia belki oraz dodatkowo warunków dla swobodnych brzegów. Mamy więc cztery warunki:

$$y|_{x=0} = 0 \quad y|_{x=L} = 0$$

$$M_g|_{x=0} = EI_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0 \quad M_g|_{x=L} = EI_z \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (10.41)$$

aby je spełnić przyjmujemy wielomian 4 stopnia i obliczamy pochodne:

$$y = y_o + y_1 x + y_2 x^2 + y_3 x^3 + y_4 x^4 \quad (10.42)$$

$$\frac{dy}{dx} = y_1 + 2y_2 x + 3y_3 x^2 + 4y_4 x^3 \quad (10.43)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2y_2 + 6y_3 x + 12y_4 x^2 \quad (10.44)$$

Podstawiamy powyższy wielomian (10.42) i jego pochodne do warunków (10.44) wyznaczamy stałe  $y_o, y_1, y_2, y_3, y_4$ :

$$\begin{aligned} y_o &= 0 & y_o + y_1 L + y_2 L^2 + y_3 L^3 + y_4 L^4 &= 0 \\ y_2 &= 0 & 2y_2 + 6y_3 L + 12y_4 L^2 &= 0 \end{aligned} \quad (10.45)$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy:

$$y_o = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = -2y_1 / L^2 \quad y_4 = y_1 / L^3 \quad (10.46)$$

Podstawiając otrzymane rozwiązania do wielomianu aproksymacyjnego (10.42) otrzymujemy:

$$y = y_1 x - \frac{2y_1}{L^2} \cdot x^3 + \frac{y_1}{L^3} \cdot x^4 \quad (10.47)$$

oraz:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{12y_1}{L^2} \cdot x + 12 \frac{y_1}{L^3} \cdot x^2 \quad (10.48)$$

Podstawiając do (10.29) powyższe wyrażenie otrzymujemy:

$$P \cdot y_1 \left( x - \frac{2 \cdot a^3}{L^2} + \frac{a^4}{L^3} \right) = EI_z \int_L \left( -\frac{12y_1}{L^2} \cdot x + 12 \frac{y_1}{L^3} \cdot x^2 \right)^2 dx \quad (10.49)$$

Przekształcając dalej mamy:

$$P \cdot y_1 \left( x - \frac{2 \cdot a^3}{L^2} + \frac{a^4}{L^3} \right) = \frac{144 y_1^2 EI_z}{L^4} \int_L \left( -x + \frac{x^2}{L} \right)^2 dx \quad (10.50)$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$y_1 = \frac{\left( x - \frac{2 \cdot a^3}{L^2} + \frac{a^4}{L^3} \right) \cdot PL^4}{144 \cdot EI_z \int_L \left( -x + \frac{x^2}{L} \right)^2 dx} = \frac{30 \cdot \left( x - \frac{2 \cdot a^3}{L^2} + \frac{a^4}{L^3} \right) \cdot PL^4}{144 \cdot EI_z} \quad (10.51)$$

Jeżeli przyjąć  $a=L/2$  to:

$$y_1|_{a=0,5L} = \frac{25PL^4}{384EI_z} \quad (10.52)$$

Strzałka ugięcia:

$$y_{\max} = y|_{x=0,5L} = \frac{25PL^3}{384EI_z} \cdot \frac{5}{16} = \frac{PL^3}{49,152 \cdot EI_z} \quad (10.53)$$

jest to dobre przybliżenie rozwiązania ścisłego (10.19), ale gorsze niż przybliżenie sinusoidą (10.34). W przypadku innych belek warunki (10.41), które musi spełnić wielomian będą inne. Dla przykładu belki wspornikowej zamocowanej na końcu  $x=0$  i długości  $L$  mają one postać:

$$\begin{aligned} y|_{x=0} &= 0 & \frac{dy}{dx}|_{x=0} &= 0 \\ T|_{x=L} = \frac{dM_g}{dx}|_{x=L} &= EI_z \cdot \frac{d^3y}{dx^3}|_{x=L} = 0 & M_g|_{x=L} = EI_z \cdot \frac{d^2y}{dx^2}|_{x=L} &= 0 \end{aligned} \quad (10.54)$$

**Politechnika Lubelska, Wydział Mechaniczny  
Katedra Mechaniki Stosowanej  
Laboratorium Wytrzymałości Materiałów**

<i>Imię i nazwisko</i>	<i>Grupa</i>	<i>Data wykonania</i>	<i>Prowadzący</i>	<i>Ocena</i>

## Laboratorium Wytrzymałości Materiałów

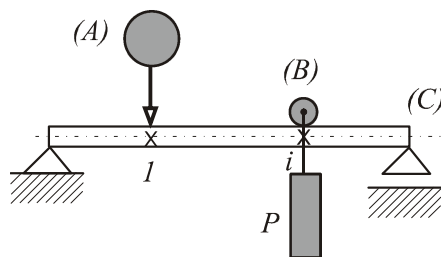
*Wyznaczanie linii ugięcia belki z zastosowaniem twierdzenia o wzajemności przemieszczeń*

### 1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest doświadczalne sprawdzenie twierdzenia o wzajemności przemieszczeń (twierdzenie Maxwella) oraz doświadczalne wyznaczenie linii ugięcia swobodnie podpartego przęsła obciążonego pionową siłą skupioną.

### 2. Schemat i opis stanowiska

Badania doświadczalne prowadzimy na stanowisku (rys. 1) składającym się z belki (C) stalowej o stałej sztywności na zginanie. Belka jest swobodnie podparta na końcach i obciążona w wybranym punkcie odważnikiem zawieszonym na wieszaku (B). Wieszak oparty na rolce może przemieszczać się wzdłuż belki. W innym punkcie na statywie magnetycznym zamocowano czujnik przemieszczenia (A).

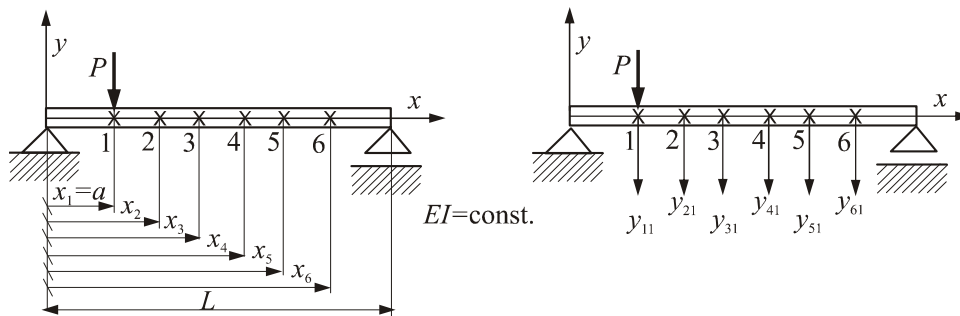


**Rys. 1**

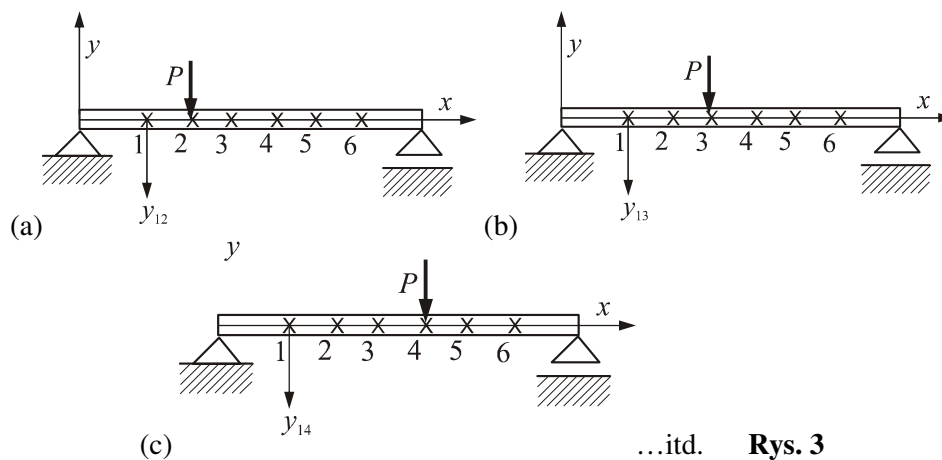
### 3. Przebieg ćwiczenia

1. Dokonać pomiaru w kilku miejscach geometrii belki:  $L$  - długość,  $b$  - szerokość,  $h$  - wysokość. Pomiary powtarzamy, a w sprawozdaniu zamieszczamy wartości średnie.
2. Na powierzchni belki zaznaczyć, w podanych przez prowadzącego miejscach, punkty pomiarowe od 1 do 6 (rys. 2).

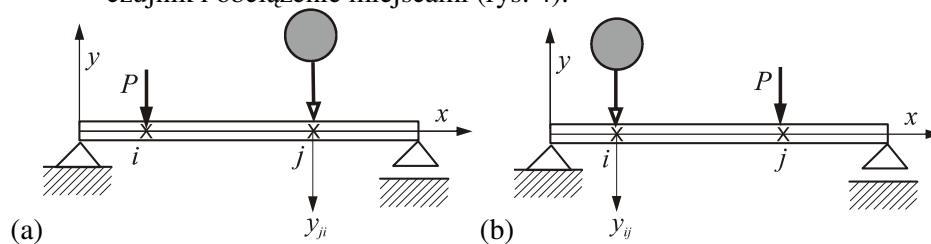




Rys. 2

...itd. **Rys. 3**

3. W punkcie 1 umieścić czujnik przemieszczeń i wyzerować go.
4. Szalkę z zadaniem obciążeniem umieszczamy kolejno w punktach 2, 3, 4, 5, 6 i z czujnika odczytujemy przemieszczenia punktu 1 (rys. 3).
5. Pomiar można powtórzyć, aby sprawdzić dokładność pomiarów. W sprawozdaniu zamieszczamy wartości średnie z pomiarów dla kolejnych punktów.
6. W celu doświadczalnego potwierdzenia twierdzenia Maxwella dla wybranych par punktów i dla różnych sił mierzymy ugięcia zmieniając czujnik i obciążenie miejscami (rys. 4).



Rys. 4

#### 4. Opracowanie wyników i wykonanie sprawozdania

- 1) W celu obliczenia i wykreślenia linii ugięcia belki należy:
  - a) Dla przyjętego układu współrzędnych określić współrzędne punktów pomiarowych 1,2,3,4,5,6,... – określić odpowiednio współrzędne:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots$  (rys. 8a). Obliczyć teoretyczne wartości przemieszczenia  $y_{i1}$  (rys. 8b) dla punktów pomiarowych  $i=1,2,3,4,5,6, \dots$ . Aby wyznaczyć przemieszczenie  $y_{11}$  podstawić:  $a=x_1$  oraz  $x=x_1$ . Analogicznie  $y_{21}$ , podstawić:  $a=x_1, x=x_2$ . Pozostałe  $y_{i1} - a=x_1, x=x_i$ . Wyniki wpisujemy do tabeli.
  - b) Błąd popełniony obliczyć ze wzoru:

$$\delta y = \frac{|y_t - y_d|}{y_t} \cdot 100\%$$

gdzie:  $y_t$  – przemieszczenie wyznaczone ze wzoru (9),  $y_d$  – przemieszczenie zmierzone doświadczalnie.

- c) Otrzymane wartości przemieszczeń teoretycznych i doświadczalnych przenosimy na wykres.
- 2) W celu doświadczalnego potwierdzenia twierdzenia Maxwella dla wybranych par punktów i dla różnych sił należy zmierzyć ugięcia zmieniając czujnik i obciążenie miejscami (rys. 4). Błąd popełniony obliczyć ze wzoru:

$$\delta y_{ij} = \frac{|y_{ij} - y_{ji}|}{y_{ij}} \cdot 100\%$$

#### 5. Wymiary stanowiska i inne dane:

Tabela 1

Lp.	$L$	$b$	$h$	$E$	$I$	$a$	$P$
	[...]	[..]	[...]	[..]	[...]	[...]	[...]
1							
2							
3							
Średnia							

#### 6. Przyjęte punkty pomiarowe:

Tabela 2

Punkt pomiarowy	1	2	3	4	5	6	...
Odległość $x_i$ [...]							

**7. Wyniki pomiarów i obliczeń dla linii ugięcia belki:***Tabela 3*

Lp	Przemieszczenie doświadczalne $y_{li}$ [...]	Przemieszczenie teoretyczne $y_{il}$ [...]	Błąd pomiaru $\delta_y = \frac{ y_{li} - y_{il} }{y_{il}} \cdot 100\%$
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Zgodnie z twierdzeniem Maxwella:  $y_{li}=y_{il}$  dla  $i=1,2,3,4,5,6...$

**Uwaga.** Podać wszystkie wzory, podstawienia i wyniki obliczeń teoretycznych i błędów.

**8. Wykres teoretyczny i doświadczalny linii ugięcia belki.**

**9. Wyniki pomiarów dla doświadczalnego potwierdzenia twierdzenia Maxwella:**

*Tabela 4*

Wartości ( $i, j$ )	Przemieszczenie Wariant 1: $y_{ij} [\dots]$	Przemieszczenie Wariant 2: $y_{ji} [\dots]$	Błąd pomiaru $\delta_y = \frac{ y_{ij} - y_{ji} }{y_{ji}} \cdot 100\%$
(1,2)			
(1,3)			
itd...			

**Wariant 1:** czujnik przemieszczeń znajduje się w punkcie  $i$ , zaś siła  $P$  w punkcie  $j$ .

**Wariant 2:** czujnik przemieszczeń znajduje się w punkcie  $j$ , zaś siła  $P$  w punkcie  $i$ .

**10. Wnioski i uwagi końcowe.**