

---

Politechnika Lubelska



MECHANIKA

---

## Laboratorium wytrzymałości materiałów ...

Ćwiczenie 22 - Wyznaczanie momentu  
bezwładności przekroju zginanej belki  
z definicji i wzoru Geigera

Przygotował: Andrzej Teter  
*(do użytku wewnętrznego)*

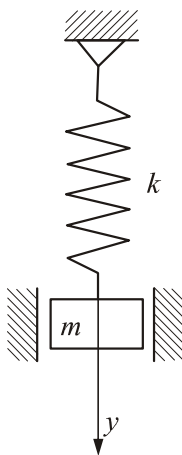
# Wyznaczanie momentu bezwładności przekroju zginanej belki z definicji i wzoru Geigera

---

## Metoda Geigera

Do wyznaczenia sztywności układu mechanicznego możemy zastosować znany z mechaniki wzór Geigera. Dla najprostszego mechanicznego układu drgającego o 1 stopniu swobody zbudowanego ze sprężyny o sztywności  $k$  i masy skupionej  $m$  (rys. 1) równanie ruchu postępowego ma postać:

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0 \quad (1)$$



Rys. 1

lub

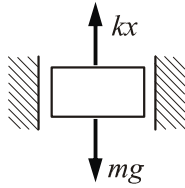
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad \text{gdzie} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

gdzie:  $y$  – ugięcie,  $t$  – czas,  $\omega$  – częstość kołowa drgań własnych. W położeniu równowagi (rys. 2) siła ciężkości jest równoważona przez siłę sprężystości. Możemy zapisać warunek:

$$\sum P_{iy} = -ky_{st} + mg = 0 \quad (3)$$

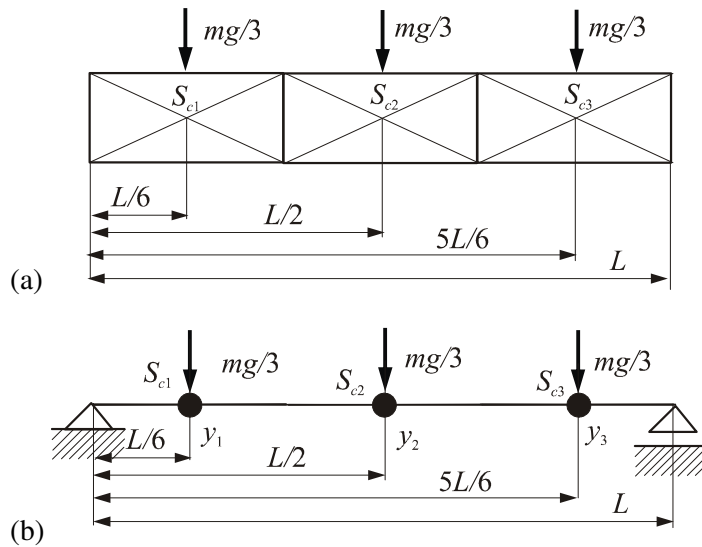
gdzie:  $y_{st}$  – ugięcie statyczne wywołane ciężarem  $Q=mg$ . Przekształcając zależność (3) otrzymujemy:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{y_{st}}} \quad (4)$$



Rys. 2

tzw. **wzór Geigera**. Równanie (4) jest dokładne tylko dla układów o 1 stopniu swobody, ale można go uogólnić na konstrukcje ciągłe takie jak rozpatrywana belka. Cała procedura polega na tym, że masę ciągłą dzieli się na kilka mas skupionych. Na rys. 3 przedstawiono jednorodną pręgę o długości  $L$  podzieloną na trzy równe elementy o ciężarze  $mg/3$  każdy. Cały ciężar elementu umieszcza się w odpowiadającym środku ciężkości (rys. 3a). W ten sposób element ciągły został zdyskretyzowany (rys. 3b).



Rys. 3

W miejscach przyłożenia zredukowanych sił ciężkości określa się powstające przemieszczenia statyczne:  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ . Wzór (4) dla układu dyskretnego ma postać:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sum k_i}{\sum m_i}} = \sqrt{\frac{g}{\sum (y_i)_{st}}} \quad (5)$$

**Ugięcie statyczne**  $y_i$  określamy w ten sposób, że jest to **przemieszczenie punktu przyłożenia ciężaru**  $Q_i = m_i g$  **wywołane przez ten ciężar**. W skrajnym przypadku możemy cały ciężar podzielić na wiele skończenie małych ciężarów  $dq$ :

$$dq = \frac{mg}{L} \cdot dx = q \cdot dx \quad (6)$$

W tym przypadku skupiony mały ciężar  $dq$  przyłożony w punkcie  $x$  powoduje ugięcie statyczne:

$$y_{st} = \frac{dq \cdot x^2 (L-x)^2}{3EI_z L} = \frac{q \cdot x^2 (L-x)^2}{3EI_z L} \cdot dx \quad (7)$$

A więc mamy:

$$\sum (y_i)_{st} = \int_L \frac{q \cdot x^2 (L-x)^2}{3EI_z L} \cdot dx = \frac{qL^4}{90EI_z} \quad (8)$$

zaś:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\sum (y_i)_{st}}} = \sqrt{\frac{90EI_z \cdot g}{qL^4}} = 9,487 \sqrt{\frac{EI_z}{mL^3}} \quad (9)$$

Warto wiedzieć, że ściśle rozwiązanie dla postaci podstawowej drgań własnych zginanej belki w teorii drgań ma postać:

$$\omega = \pi^2 \sqrt{\frac{EI_z}{mL^3}} = 9,8696 \sqrt{\frac{EI_z}{mL^3}} \quad (10)$$

Drugą skrajnością jest przypadek, gdy układ ciągły podzielimy na jeden element o ciężarze  $Q = mg$  przyłożony w punkcie o największym ugięciu. W analizowanym przypadku belki mamy:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{\max}}} \quad (11)$$

Ponieważ strzałka ugięcia przesuła obciążonego w środku siłą  $Q$  wynosi:

$$y_{\max} = \frac{QL^3}{48EI_z} \quad (12)$$

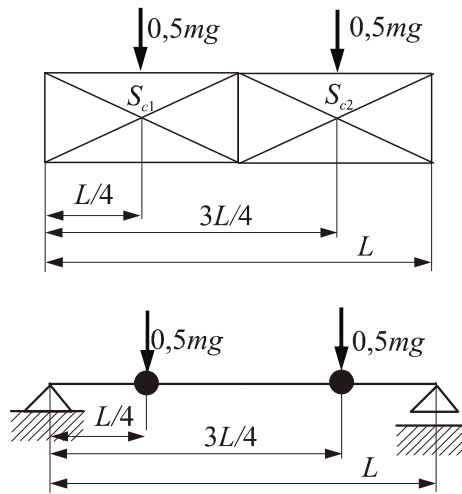
Otrzymujemy przybliżoną wartość:

$$\omega = \sqrt{\frac{48EI_z}{mL^3}} = 6,93 \sqrt{\frac{EI_z}{mL^3}} \quad (13)$$

Błąd oszacowania wynosi:

$$\delta\omega = \left| \frac{6,93 - 9,8696}{9,8696} \right| \cdot 100\% = 30\% \quad (14)$$

Wyniki poprawimy dzieląc belkę na  $n=2, 3, 4, 5\ldots$  mas lub dostrajając układ poprzez korekcję masy. Dla przykładu sprawdzimy wyniki dla podziału belki na dwie części (rys. 4).



**Rys. 4**

W tym przypadku skupiony ciężar  $0,5mg$  przyłożony w punkcie  $x=L/4$  powoduje ugięcie statyczne, które obliczymy podstawiając dane do równania linii ugięcia (9.9):

$$(y_1)_{st} \Big|_{\substack{x=0,25L \\ a=0,25L \\ P=0,5mg}} = \frac{3mgL^3}{512EI_z} \quad (15)$$

Analogicznie liczymy dla drugiej części belki:

$$(y_2)_{st} \Big|_{\substack{x=0,75L \\ a=0,75L \\ P=0,5mg}} = \frac{3mgL^3}{512EI_z} \quad (16)$$

Podstawiamy (15) oraz (16) do warunku (5) otrzymujemy:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\sum (y_i)_{st}}} = \sqrt{\frac{g}{(y_1)_{st} + (y_2)_{st}}} = \sqrt{\frac{256EI_z}{3mL^3}} = 9,24 \sqrt{\frac{EI_z}{mL^3}} \quad (17)$$

W tym przypadku błąd oszacowania wynosi:

$$\delta\omega = \left| \frac{9,24 - 9,8696}{9,8696} \right| \cdot 100\% = 6,4\% \quad (18)$$

Kolejne przybliżenie dla podziału belki na trzy części (rys. 3):

$$(y_1)_{st} \Big|_{\substack{x=L/6 \\ a=L/6 \\ P=mg/3}} = \frac{mg}{3} \cdot \frac{L^3}{EI_z} \cdot \frac{50}{7776} \quad (19)$$

$$(y_2)_{st} \Big|_{\substack{x=L/2 \\ a=L/2 \\ P=mg/3}} = \frac{mg}{3} \cdot \frac{L^3}{EI_z} \cdot \frac{1}{48} \quad (20)$$

$$(y_3)_{st} \Big|_{\substack{x=5L/6 \\ a=5L/6 \\ P=mg/3}} = \frac{mg}{3} \cdot \frac{L^3}{EI_z} \cdot \frac{50}{7776} \quad (21)$$

Podstawiamy (19), (20), (21) do warunku (5) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum (y_i)_{st} &= (y_1)_{st} + (y_2)_{st} + (y_3)_{st} \\ \sum (y_i)_{st} &= \frac{mg}{3} \cdot \frac{L^3}{EI_z} \cdot \frac{50}{7776} + \frac{mg}{3} \cdot \frac{L^3}{EI_z} \cdot \frac{1}{48} + \frac{mg}{3} \cdot \frac{L^3}{EI_z} \cdot \frac{50}{7776} \\ \sum (y_i)_{st} &= 0,01123 \cdot \frac{mgL^3}{EI} \end{aligned} \quad (22)$$

oraz:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\sum (y_i)_{st}}} = \sqrt{\frac{EI_z}{0,01123 \cdot mL^3}} = 9,436 \sqrt{\frac{EI_z}{mL^3}} \quad (23)$$

W tym przypadku błąd oszacowania wynosi:

$$\delta\omega = \left| \frac{9,436 - 9,8696}{9,8696} \right| \cdot 100\% = 4,4\% \quad (24)$$

Przy podziale na 3 części otrzymujemy praktycznie identyczny wynik jak przy podziale na skończenie wiele mas (9). Dalszy podział praktycznie nie wpływa na poprawę wyników.

W celu wyznaczenia sztywności układu porównamy częstości kołowe drgań własnych otrzymane z rozwiązania ścisłego (10) i z wzorem Geigera (5):

$$\pi^2 \sqrt{\frac{EI_z}{mL^3}} = \sqrt{\frac{g}{\sum (y_i)_{st}}} \quad (25)$$

Przekształcając:

$$\pi^4 \cdot \frac{EI_z}{mL^3} = \frac{g}{\sum (y_i)_{st}} \quad (26)$$

$$EI_z = \frac{gL^3}{\pi^4 \sum (y_i)_{st}} \quad (27)$$

Dla ustalonej w badaniach doświadczalnych wartości modułu Younga  $E$  mamy:

$$I_z = \frac{gL^3}{\pi^4 E \sum (y_i)_{st}} \quad (28)$$

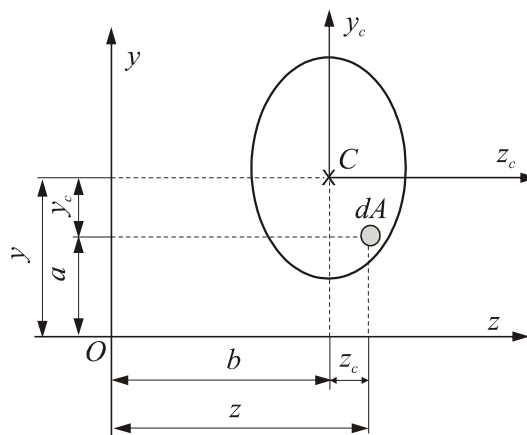
## Momenty bezwładności

Wartości momentów bezwładności przekroju poprzecznego możemy obliczyć wprost z definicji: **momentem bezwładności** pola figury względem dowolnej osi nazywa się całkę powierzchniową liczoną z iloczynu kwadratu odległości  $r$  elementu od tej osi i pola elementu  $dA$ :

$$I = \int_A r^2 dA \quad (29)$$

Dla przyjętego układu współrzędnych  $xy$  (rys. 5) moment bezwładności pola figury względem  $z$  można wyrazić zależnością:

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad (30)$$



Rys. 5

Jeżeli figurę płaską o polu  $A$  można podzielić na  $n$  figur prostych o odpowiednich polach  $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ , (pola „pełne” mają znak plus, zaś „puste” - minus) obliczenie momentów bezwładności można przeprowadzić całkowaniem kolejno dla każdego pola:

$$I_z = \int_A y^2 dA = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} y^2 dA = \sum_{i=1}^n I_{zi} \quad (31)$$

**Moment bezwładności figury złożonej równa się sumie momentów bezwładności figur składowych dla przyjętej osi.** Powyższa procedura obliczeniowa bardzo upraszcza i przyspiesza obliczenia momentów bezwładności figur płaskich pod warunkiem, że można podzielić je na proste części, dla których znane są momenty bezwładności figur składowych. Uproszczenie polega na tym, że zamiast liczyć całki liczy się prostą sumę szeregów.

### Twierdzenie Steinera

Aby wyznaczyć zależność zachodzącą pomiędzy momentami bezwładności względem osi równoległych, przyjmuje się do rozważań figurę o polu  $A$  oraz dwa dowolne, ale wzajemnie równoległe układy osi współrzędnych:  $zy$ ,  $z_c y_c$  (rys. 5). Wprowadzając zależności pomiędzy współrzędnymi:

$$z = z_c + b \quad y = y_c + a \quad (32)$$

Podstawiając (32) do (30) otrzymuje się:

$$I_z = \int_A (y_c + a)^2 dA = \int_A y_c^2 dA + 2a \int_A y_c dA + a^2 \int_A dA \quad (33)$$

Przekształcając:

$$I_z = I_{z_c} + 2aS_{z_c} + a^2 A \quad (34)$$

gdzie:  $I_{z_c}$  - moment bezwładności pola figury względem osi  $z_1$ ,  $S_{z_c}$  - moment statyczny względem osi  $z_c$ . W przypadku, gdy początek układu współrzędnych jest środkiem ciężkości figury to  $S_{z_c}=0$ . **Momenty statyczne względem osi centralnych są równe zeru.** Zależność (23) upraszcza się więc do postaci:

$$I_z = I_{z_c} + a^2 A \quad (35)$$

Podane wyżej zależności wyrażają **twierdzenie Steinera**: moment bezwładności figury płaskiej względem osi odległej od środka ciężkości o  $a$  jest równy momentowi bezwładności względem osi równoległej przechodzącej przez środek ciężkości, zwiększonemu o iloczyn całej powierzchni figury przez kwadrat odległości  $a$  ( $A a^2$ ).

### Główne momenty bezwładności. Główne osie bezwładności

Można sformułować następujące definicje:

1. **Głównymi osiami bezwładności** pola figury płaskiej nazywa się takie dwie osie, względem których osiowe momenty bezwładności osiągają

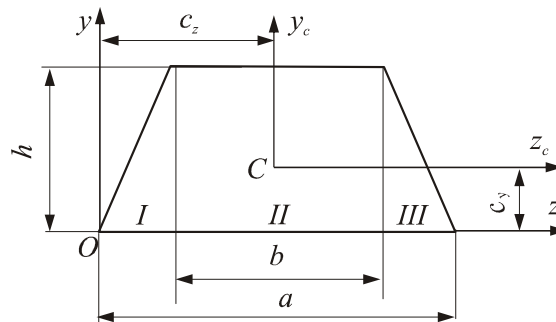


ekstremalne wartości, zaś moment dewiacji względem tych osi jest równy zero.

2. **Głównymi momentami bezwładności** pola figury płaskiej nazywa się momenty bezwładności względem głównych osi bezwładności.
3. Jeśli obie główne osie bezwładności figury płaskiej przechodzą przez środek ciężkości figury, to nazywa się je **głównymi centralnymi osiami bezwładności**.

### Główny centralny moment bezwładności trapezu

Szczegółowe obliczenia wartości głównego centralnego momentu bezwładności względem osi  $z_c$  prześledzimy dla przekroju poprzecznego w kształcie trapezu. Zarys i dane wymiary przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6

Tabela 1

Numer pola	$A_i$	$y_{ci}$	$y_{ci}A_i$
I	$\frac{1}{2} \cdot \frac{a-b}{2} h$	$\frac{h}{3}$	$\frac{a-b}{12} h$
II	$bh$	$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^2}{2}$
III	$\frac{1}{2} \cdot \frac{a-b}{2} h$	$\frac{h}{3}$	$\frac{a-b}{12} h$
<b>SUMA</b>	$\frac{h}{2}(a+b)$		$\frac{a-b}{6} h + \frac{bh^2}{2}$

Pole powierzchni podzielono na 3 figury: prostokąt – (II), oraz dwa trójkąty - (I), (III). Ponieważ analizowany trapez posiada pionową oś symetrii, więc współrzędna środka ciężkości  $c_z=0,5a$ . Drugą współrzędną określono z zależności:

$$c_y = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ci} A_i}{A} \quad (36)$$

Dla ułatwienia obliczeń zestawiono tabelę 1. Podstawiając do (36) wyznaczone wielkości, ostatecznie otrzymano:

$$c_y = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ci} A_i}{A} = \frac{\frac{a-b}{6} h + \frac{bh^2}{2}}{\frac{h}{2}(a+b)} = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)} \quad (37)$$

W celu obliczenia momentu bezwładności trapezu względem osi  $z_c$  należy skorzystać z własności momentów bezwładności. Można je sumować, pod warunkiem, że momenty figur składowych obliczono względem tej samej osi. W tym celu kolejno dla każdej z wyodrębnionych figur należy zastosować twierdzenie Steinera, tak aby wyznaczyć składowe momenty bezwładności względem osi  $z_c$ :

#### Figura (I) i (III)

Dla obu trójkątów moment bezwładności względem osi centralnej (przechodzącej przez środek ciężkości trójkątów) równoległej do osi  $z_c$  wynosi:

$$\frac{1}{36} \cdot \frac{h(a-b)}{2} h^3 \quad (38)$$

zaś odległość między tymi osiami:

$$\frac{h(a+2b)}{3(a+b)} - \frac{h}{2} = \frac{hb}{3(a+b)} \quad (39)$$

Wstawiając te wielkości do twierdzenia Steinera otrzymano:

$$I_{z_c}^{(I)} = I_{z_c}^{(III)} = \frac{(a-b)h^3}{72} + \frac{(a-b)h}{2} \left( \frac{hb}{3(a+b)} \right)^2 \quad (40)$$

#### Figura (II)

Dla prostokąta moment bezwładności względem osi centralnej równoległej do  $z_c$  wynosi:  $bh^3/12$  zaś odległość między osiami:

$$\frac{h}{2} - \frac{h(a+2b)}{3(a+b)} = \frac{h(a-b)}{6(a+b)} \quad (41)$$

Wstawiając te wielkości do twierdzenia Steinera otrzymano:

$$I_{z_c}^{(II)} = \frac{bh^3}{12} + bh \left( \frac{h(a-b)}{6(a+b)} \right)^2 \quad (42)$$

Centralny moment bezwładności względem osi Ox dla trapezu wynosi:

$$I_{zc} = I_{zc}^{(I)} + I_{zc}^{(II)} + I_{zc}^{(III)} \quad (43)$$

Po podstawieniu wyznaczonych wartości i wykonaniu koniecznych przekształceń ostatecznie otrzymano:

$$I_{zc} = \frac{h^3}{36} \left( \frac{a^2 + 4ab + b^2}{a + b} \right) \quad (44)$$

**Politechnika Lubelska, Wydział Mechaniczny**  
**Katedra Mechaniki Stosowanej**  
**Laboratorium Wytrzymałości Materiałów**

<i>Imię i nazwisko</i>	<i>Grupa</i>	<i>Data wykonania</i>	<i>Prowadzący</i>	<i>Ocena</i>

## Laboratorium Wytrzymałości Materiałów

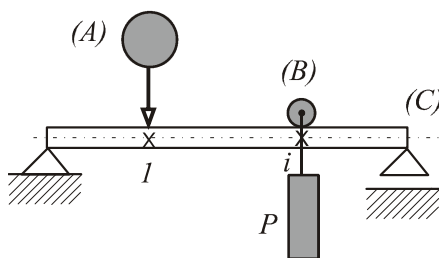
*Wyznaczanie momentu bezwładności przekroju zginanej belki z definicji i metodą Geigera*

### 1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest doświadczalne wyznaczenie momentu bezwładności przekroju belki zginanej metodą Geigera oraz porównanie otrzymanych wyników z obliczeniami teoretycznymi.

### 2. Schemat i opis stanowiska

Badania doświadczalne prowadzimy na stanowisku (rys. 1) składającym się z belki (C) stalowej o stałej sztywności na zginanie  $EI = \text{const.}$  Belka jest swobodnie podparta na końcach i obciążona w wybranym punkcie odważnikiem zawieszonym na wieszaku (B). Wieszak oparty na rolce może przemieszczać się wzdłuż belki. W innym punkcie na statywie magnetycznym zamocowano czujnik przemieszczenia (A).



**Rys. 1**

### 3. Przebieg ćwiczenia

1. Szkicujemy zarys przekroju poprzecznego belki i jednoznacznie wyznaczamy go. W tabeli zbieramy konieczne wymiary. Dodatkowo belkę

ważymy. Pomiar powtarzamy, a w sprawozdaniu zamieszczamy wartości średnie.

2. Na powierzchni belki zaznaczamy jej środek i oznaczamy go (1).
3. W punkcie (1) umieszczamy czujnik przemieszczeń i zerujemy go.
4. Szalkę z dowolnym obciążeniem  $P$  umieszczamy możliwie blisko punktu (1) i z czujnika odczytujemy przemieszczenia punktu (1) -  $y_1$ .
5. Pomiar zgodnie z zaleceniami prowadzącego powtarzamy, dzieląc belkę na 2, 3, ... części. W kolejnych punktach (1), (2), (3)... powtarzamy czynności 3 i 4.
6. Otrzymane ugięcia dzielimy przez wartość obciążenia  $P_i$  wyznaczamy jednostkowe ugięcie odpowiadające jednostkowemu obciążeniu.

#### 4. Opracowanie wyników i wykonanie sprawozdania

- 1) W celu wyznaczenia sztywności układu należy:
  - a) **I przypadek** – cała masa belki znajduje się w środku rozpiętości. Wyznaczyć statyczne ugięcie tego punktu wywołane przez ciężar  $P$  -  $y_1(P)$  i obliczyć ugięcie statyczne wywołane ciężarem belki  $Q=m \cdot g$  według wzoru  $y_1 = m g \cdot y_1(P) / P$ .
  - b) Podstawić do wzoru (17) wartość ugięcia  $y_1$ :

$$EI_z = \frac{PL^3}{\pi^4 y_1}$$

Dla ustalonej w badaniach doświadczalnych wartości modułu Young'a  $E$  mamy:

$$I_z = \frac{PL^3}{E\pi^4 y_1}$$

- c) **II przypadek** - całą masę belki podzielić na 2 równe masy:  $m_1=m_2=m/2$ . Masa 1 -  $x_1=0,25L$ , masa 2 -  $x_2=0,75L$ . W punktach (1) (2) należy wyznaczyć statyczne ugięcie:  $y_i(P)$  dla  $i=1,2$ . Dodatkowo obliczyć ugięcie statyczne wywołane ciężarem belki  $Q_i=m_i \cdot g$  według wzoru  $y_i = m_i g \cdot y_i(P) / P$ .
- d) Podstawić wyznaczone wartości:

$$I_z = \frac{gmL^3}{\pi^4 E \sum y_i} = \frac{2PL^3}{\pi^4 E \sum y_i(P)}$$

- e) **III przypadek** - całą masę belki podzielić na 3 równe masy:  $m_i=m/3$ . Znajduje się one odpowiednio: masa 1 -  $x_1=L/6$ , masa 2 -  $x_2=0,5L$ , masa 3 -  $x_3=5L/6$ . We wszystkich punktach wyznaczyć statyczne ugięcie:  $y_i(P)$  dla  $i=1,2,3$ . Dodatkowo obliczyć statyczne ugięcie wywołane ciężarem belki  $Q_i=m_i \cdot g$ :  $y_i = m_i g \cdot y_i(P) / P$ .

- f) Podstawić powyższe wartości:

$$I_z = \frac{gL^3}{\pi^4 E \sum y_i} = \frac{3PL^3}{\pi^4 E \sum y_i(P)}$$

- g) Jeżeli podział był inny to należy korzystać z zależności:

$$I_z = \frac{gL^3}{\pi^4 E \sum y_i} = \frac{m \cdot PL^3}{\pi^4 E \sum m_i y_i(P)}$$

- h) W przypadku podziału belki na większą ilość części należy postępować identycznie jak w przypadku II, punkty: (c), (d).  
 i) Z definicji momentu bezwładności dla zadanej geometrii obliczyć wartość teoretyczną głównego, centralnego momentu bezwładności belki. Należy pamiętać, że wynik ten będzie również obarczony niedokładnością. Wynika ona z błędów pomiaru wielkości geometrycznych i zaokrągleń w czasie samych obliczeń.  
 j) Błąd popełniony obliczyć ze wzoru:

$$\delta I = \frac{|I_t - I_d|}{I_t} \cdot 100\%$$

gdzie:  $I_t$  – teoretyczny główny, centralny moment bezwładności belki,  
 $I_d$  – wartość doświadczalna. Błąd należy liczyć oddzielnie dla kolejnych podziałów.

## 5. Szkic przekroju poprzecznego belki z dokładnym wymiarowaniem:

## 6. Pozostałe dane:

Tabela 1

Lp.	$L$	$m$	$E$	$P$	$g$
	[...]	[..]	[...]	[..]	[...]
1					

**7. Przyjęte punkty pomiarowe:***Tabela 2*

	Wariant I	Wariant II		Wariant III		
Punkt pomiarowy	1	1	2	1	2	3
Współrzędne punktów $x_i$ [...]						
Ugięcia $y_i(P)$ [...]						

**8. Wyniki obliczeń:***Tabela 3*

Wariant obliczeń	Moment bezwładności doświadczalny $I_d$ [...]	Moment bezwładności teoretyczny $I_t$ [...]	Błąd pomiaru $\delta_y = \frac{ I_d - I_t }{I_t} \cdot 100\%$
I			
II			
III			

**Uwaga.** Podać wszystkie wzory, podstawienia i wyniki obliczeń teoretycznych i błędów.

**9. Wnioski i uwagi końcowe.**