



KATEDRA MECHANIKI STOSOWANEJ
Wydział Mechaniczny
POLITECHNIKA LUBELSKA

INSTRUKCJA DO ĆWICZENIA NR 2

PRZEDMIOT	MECHANIKA TECHNICZNA
TEMAT	Wyznaczenie położenie środka ciężkości układu mechanicznego
OPRACOWAŁ	Dr inż. K. Kęćik

1. CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie położenie środka ciężkości (SC) bryły metodą analityczną.

2. PODSTAWY TEORETYCZNE

2.1 Przestrzenny układ sił równoległych

Przekroje poprzeczne prętów, wałów i belek – figury płaskie, charakteryzujące się następującymi wielkościami:

- polem powierzchni przekroju: A [mm^2],
- położeniem środka ciężkości przekroju określonym przez współrzędne: x_c , y_c , z_c ,
- momentami statycznymi S_x , S_y [mm^3],
- geometrycznymi momentami bezwładności J_0 [mm^4].

W tym ćwiczeniu zajmiemy się pojęciem momentu statycznego oraz środka ciężkości.

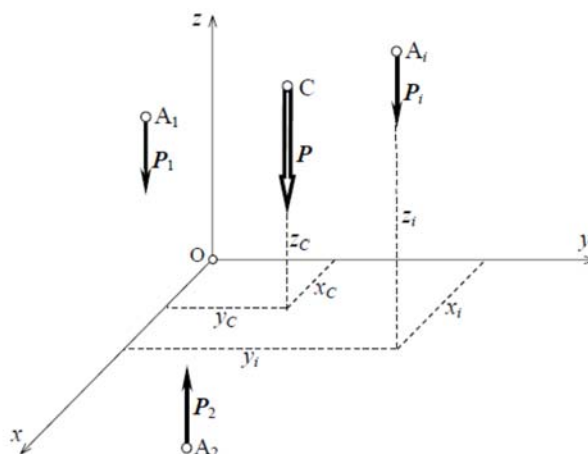
Przestrzenny układ sił równoległych tworzą siły o równoległych kierunkach działania. Wypadkową takiego układu znajdujemy sumując wszystkie siły składowe

$$P = \sum_{i=1}^n P_i, \quad (1)$$

natomiast *punkt przyłożenia* wypadkowej jest wyznaczany na podstawie równań:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n P_i x_i}{\sum_{i=1}^n P_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n P_i y_i}{\sum_{i=1}^n P_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n P_i z_i}{\sum_{i=1}^n P_i} \quad (2)$$

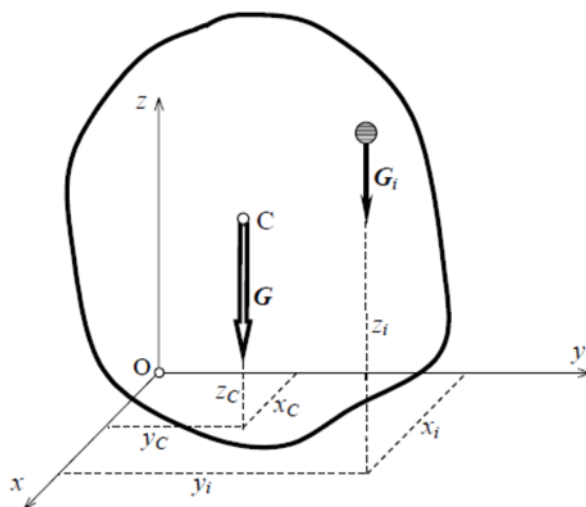
gdzie: P_i to moduł i -tej siły składowej; x_i, y_i, z_i to współrzędne punktu zaczepienia i -tej siły składowej. Punkt C, przez który przechodzi wypadkowa układu sił równoległych jest nazywany *środkiem sił równoległych*.



Rysunek 1. Środek sił równoległych

2.2 Środek ciężkości i moment statyczny

Podstawowym układem sił równoległych jest **układ sił ciężkości**. Środek sił równoległych w odniesieniu do sił ciężkości jest nazywany *środkiem ciężkości*. Pojęcie środka ciężkości jest bardzo często mylone z pojęciem środka masy ciała. Środek ciężkości ciała lub układu ciał jest punktem, w którym przyłożona jest wypadkowa siła ciężkości danego ciała. Natomiast środek masy ciała lub układu ciał jest punktem, w którym skupiona jest cała masa w opisie układu, jako masy punktowej. Dla ciała znajdującego się w jednorodnym polu grawitacyjnym środek ciężkości pokrywa się ze środkiem masy.



Rysunek 2. Środek ciężkości.

Po podzieleniu całej bryły na n elementarnych objętości o znanym ciężarze każdego z elementów, położenie środka ciężkości jest wyznaczone przez następujące współrzędne:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i x_i}{\sum_{i=1}^n G_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i y_i}{\sum_{i=1}^n G_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i z_i}{\sum_{i=1}^n G_i} \quad (3)$$

gdzie:

$G = \sum_{i=1}^n G_i$ jest ciężarem całej bryły, a x_i, y_i, z_i to współrzędne położenia i -tej objętości o ciężarze elementarnym G_i .

Dla ciał jednorodnych ich masa właściwa (gęstość) jak również ciężar właściwy to wielkości stałe. Po podstawieniu: $m = \rho V$ i $dm = \rho dV$, gdzie ρ to gęstość materiału bryły, dV to objętość jej nieskończenie małego elementu, a V to objętość całkowita, otrzymuje się wzory na środek masy (ciężkości) bryły przestrzennej w postaci:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i x_i}{\sum_{i=1}^n V_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i y_i}{\sum_{i=1}^n V_i}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n V_i z_i}{\sum_{i=1}^n V_i} \quad (4)$$

Dla figury płaskiej współrzędne środka ciężkości wynoszą:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}, \quad (5)$$

gdzie, F_i oznacza i -te pole figury.

Przy wyznaczaniu położenia środka masy ciał złożonych dzieli się je na ciała podstawowe, których położenia środków mas są znane, a następnie wykorzystuje się odpowiednie formuły definiujące momenty statyczne poszczególnych ciał podstawowych.

Sumy iloczynów występujące we wzorach na środki ciężkości (5) są definiowane, jako **momenty statyczne** figur składowych względem osi odpowiednio y i x . Momentami statycznymi względem tych samych osi są także iloczyny $x_c F$ i $y_c F$; równość odpowiednich momentów statycznych umożliwia wyprowadzenie podanych wzorów na położenie środ-

ka masy figury złożonej. W zależności od położenia przekroju względem osi układu współrzędnych momenty statyczne **mogą przyjmować wartości dodatnie i ujemne**.

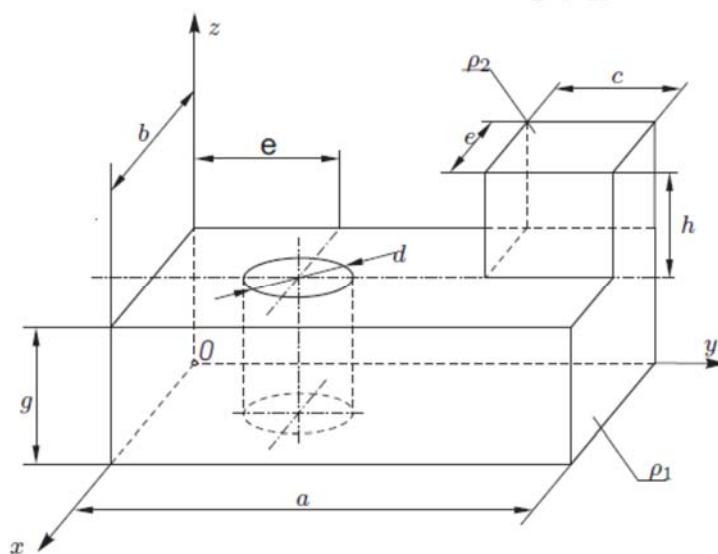
Przy wyznaczaniu położenia środków ciężkości ciał jednorodnych przydatne są poniższe twierdzenia:

- *jeśli ciało ma płaszczyznę symetrii, to środek ciężkości leży w tej płaszczyźnie,*
- *jeśli ciało ma dwie płaszczyzny symetrii, to środek ciężkości leży na linii ich przecięcia.*
- *jeśli ciało ma trzy płaszczyzny symetrii, to środek ciężkości leży w punkcie przecięcia się tych płaszczyzn,*
- *moment statyczny dowolnego ciała względem płaszczyzny przechodzącej przez środek ciężkości tego ciała jest równy zero.*

3. SCHEMAT I WYPOSAŻENIE STANOWISKA

Wypożyczenie stanowiska stanowią:

- Bryła aluminiowa



- Suwmiarka
- Waga

4. PRZEBIEG ĆWICZENIA I OPRACOWANIE WYNIKÓW

1. Dokonać pomiarów całej bryły. Wyniki wpisać do Tabeli 1.
2. Wyznaczyć ciężar całej bryły (znając gęstość aluminium $\rho=2729 \text{ kg/m}^3$).
3. Określić współrzędne środka ciężkości dla całej bryły
4. Wyznaczyć błąd dokładności wyliczenia środka ciężkości, jedną ze znanych metod do analizy błędów

Tabela 1. Zestawienie danych do obliczeń.

$a =$	[mm]	$b =$	[mm]	$c =$	[mm]
$d =$	[mm]	$e =$	[mm]	$g =$	[mm]
$h =$	[mm]	$\rho_1 =$	[kg/m ³]	$\rho_2 =$	[kg/m ³]

Położenie środka masy	$x_c =$	[mm]
	$y_c =$	[mm]
	$z_c =$	[mm]
Masa	m	[kg]

5. SPRAWOZDANIE

W sprawozdaniu należy zamieścić następujące części:

- Nagłówek (tytuł, nr ćwiczenia itd.).
- Cel ćwiczenia.
- Schemat bryły wraz z wymiarami
- Wyliczone współrzędne x_c , y_c i z_c oraz masa m .
- Analiza błędów (dowolną metodą).
- Wnioski.