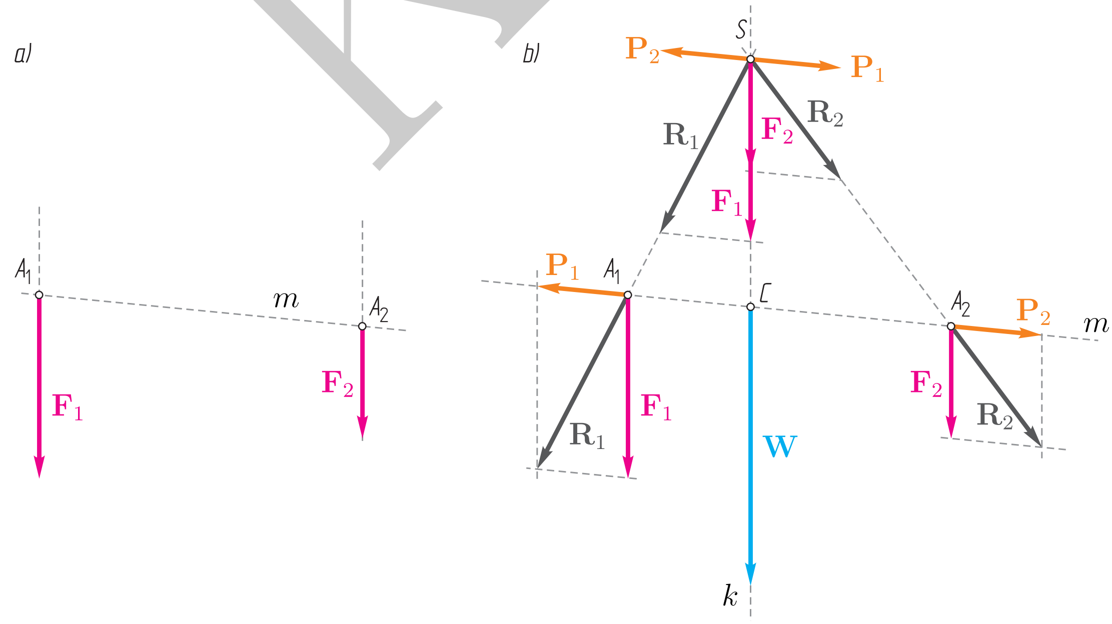
KATEDRA MECHANIKI STOSOWANEJ	Politechnika Lubelska Katedra Mechaniki Stosowanej
25	Laboratorium Mechaniki **Wypadkowa sił równoległych. Środek ciężkości**
Opracował	dr hab. inż. Jarosław Latalski, prof. PL

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się studentów z podstawowymi cechami geometrycznymi figur płaskich oraz teoretyczne i doświadczalne wyznaczenie położenia środka ciężkości figury płaskiej.

2. Wprowadzenie

Pierwszy aksjomat statyki (tzw. zasada równoległoboku) mówiący o wypadkowej dwu sił działających w tym samym punkcie stanowi jedną z podstawowych zasad statyki. Reguła ta jednak nie pozwala na wyznaczenie wypadkowej dwu sił równoległych, ponieważ kierunki działania tych sił się nie przecinają (tym samym siły te nie mogą mieć wspólnego punktu przyłożenia – Rysunek 1a).



Rysunek 1. Konstrukcja geometryczna poszukiwania wypadkowej dwu sił równoległych

Chcąc wyznaczyć wypadkową dwu sił równoległych należy do punktów ich przyłożenia dodać dwie równe co do wartości i przeciwnie skierowane siły $\mathbf{P}_1$ i $\mathbf{P}_2$ (Rysunek 1b). Siły takie możemy dodać nie zmieniając pierwotnych warunków obciążenia układu, ponieważ stanowią one układ dwu sił równoważących się (tzw. układ zerowy). Wykonując sumowanie wektorów w punktach A_1 i A_2 otrzymujemy dwie siły wypadkowe $\mathbf{R}_1$ i $\mathbf{R}_2$, które nie są wzajemnie równoległe. Siły te można zatem przesunąć wzdłuż kierunków ich działania do wspólnego punktu przecięcia S. W kolejnym etapie od tak powstałego układu sił odejmujemy układ sił $\mathbf{P}_1$ i $\mathbf{P}_2$ (lub dodajemy te siły, ale ze znakiem przeciwnym jak przedstawiono na schemacie). W efekcie dla sił w punkcie S zachodzą zależności

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{P}_1 = \mathbf{F}_1 \qquad \mathbf{R}_2 + \mathbf{P}_2 = \mathbf{F}_2 \tag{1}$$

Ostatecznie powstaje zatem układ dwu sił o wartościach F_1 i F_2 przyłożonych w punkcie S i działających wzdłuż wspólnego kierunku k. Wypadkową tych sił jest siła $\mathbf{W}$ o wartości równej sumie algebraicznej wartości wektorów $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$. Oczywiście wektor $\mathbf{W}$ można dowolnie przesuwać wzdłuż kierunku jego działania – np. do punktu C będącego przecięciem kierunku k i prostej m łączącej punkty A_1 i A_2. Punkt ten jest nazywany środkiem sił równoległych. Ścisłe jego położenie można wyznaczyć z podobieństwa trójkątów

$$\Delta A_1CS \sim \Delta\mathbf{P}_1\mathbf{F}_1\mathbf{R}_1 \qquad \Delta A_2CS \sim \Delta\mathbf{P}_2\mathbf{F}_2\mathbf{R}_2 \tag{2}$$

$$\frac{A_1C}{CS} = \frac{P_1}{F_1} \quad \text{oraz} \quad \frac{A_2C}{CS} = \frac{P_2}{F_2} \tag{3}$$

Przekształcając powyższe zależności otrzymujemy

$$F_1 \cdot A_1C = F_2 \cdot A_2C \tag{4}$$

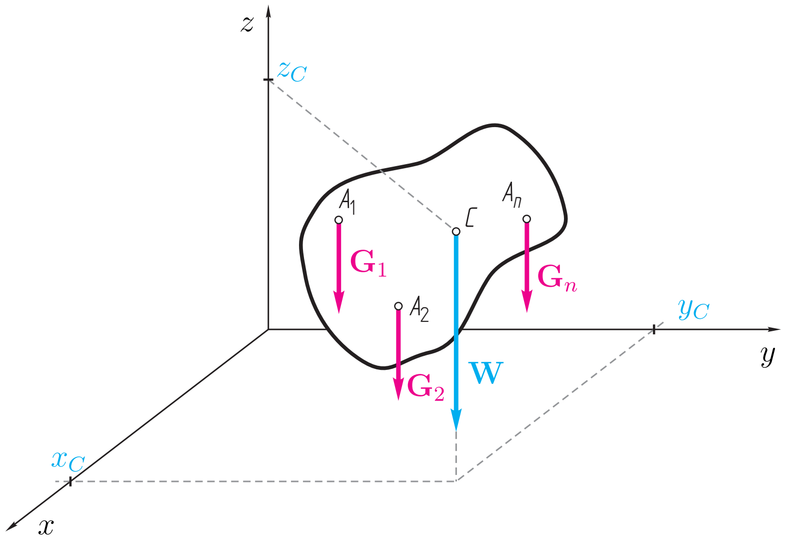
Punkt C leży zatem w takim miejscu (na takiej prostej), względem którego momenty sił $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$ się równoważą. Natomiast wartość siły wypadkowej $\mathbf{W}$ jest sumą algebraiczną sił składowych $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$.

Konstrukcja powyższa ma istotne znaczenie przy wyznaczaniu położenia środka ciężkości brył i figur płaskich. Każdy nieskończenie mały wycinek takiego ciała można bowiem traktować jako punkt materialny, w którym przyłożona jest siła skupiona $\mathbf{G}_i$ o wartości odpowiadającej ciężarowi (bądź polu powierzchni jeśli rozważamy figury płaskie) tego wycinka – patrz Rysunek 2.

W odniesieniu do sił ciężkości środek sił równoległych jest nazywany środkiem ciężkości ciała. Współrzędne tego punktu określają zależności:

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} G_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} G_i} \qquad y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} G_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} G_i} \qquad z_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} G_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} G_i} \tag{5}$$

gdzie G_i to wartość i-tej siły składowej, zaś x_i, y_i i z_i to współrzędne punktu przyłożenia tej siły w obranym układzie współrzędnych (xyz). Wzory te można łatwo wyprowadzić bazując na ustaleniach wynikających bezpośrednio z zależności (4).



Rysunek 2. Środek sił równoległych w odniesieniu do sił ciężkości

Dla materiałów jednorodnych masa właściwa (gęstość ρ) jak również ciężar właściwy ciała są wielkościami stałymi ($\rho = \text{const}$). Wykorzystując ogólną zależność $G = mg = \rho g V$ powyższe wzory można zapisać w nieco innej postaci

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} V_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} V_i} \qquad y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} V_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} V_i} \qquad z_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} V_i z_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} V_i} \tag{6}$$

gdzie V_i to wydzielone objętości i-tej części składowej bryły. W odniesieniu do figur płaskich wzory są analogiczne, przy czym objętość V_i wycinka bryły jest zastępowana przez pole A_i powierzchni wycinka figury. Ponadto, z oczywistych względów nie występuje trzecia zależność

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i} \qquad y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i} \tag{7}$$

Przedstawione powyżej wzory (5) do (7) pozwalają wyznaczać położenie środka ciężkości ciała o ile znane są współrzędne x_i, y_i i z_i działania wszystkich sił cząstkowych $\mathbf{G}_i$ (lub współrzędne środków figur cząstkowych). W praktyce można bowiem podzielić skomplikowany kształt bryły/figury płaskiej na prostsze elementy, dla których położenie środków ciężkości jest znane. Przykładowo, figurę płaską można próbować podzielić na prostokąty, trójkąty, koła i półkola, gdyż dla każdej z tych figur znane jest '*a priori*' położenie jej środka ciężkości.

W przypadkach bardziej złożonych kształtów wprowadza się podział ciała na nieskończenie małe wycinki. Z matematycznego punktu widzenia oznacza to, że sumowanie algebraiczne w powyższych zależnościach jest zastępowane przez operację całkowania po objętości bryły bądź polu powierzchni wycinka. W takim przypadku otrzymamy dla brył

$$x_C = \frac{\int_V x\,\mathrm{d}V}{V} \qquad y_C = \frac{\int_V y\,\mathrm{d}V}{V} \qquad z_C = \frac{\int_V z\,\mathrm{d}V}{V} \tag{8}$$

oraz dla figur płaskich

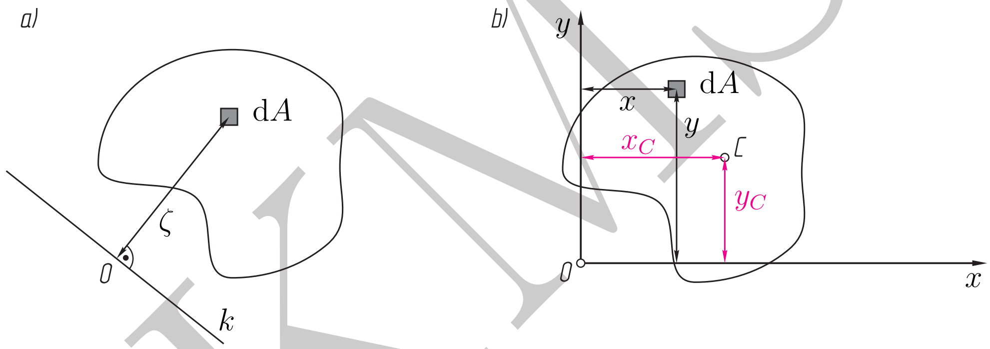
$$x_C = \frac{\int_A x\,\mathrm{d}A}{A} \qquad y_C = \frac{\int_A y\,\mathrm{d}A}{A} \tag{9}$$

Wielkości V i A oznaczają odpowiednio całkowitą objętość i całkowite pole powierzchni bryrły/figury.

Występującą w licznikach powyższej zależności wielkość nazywamy momentem statycznym figury względem osi. Wielkość tę definiujemy jako (patrz Rysunek 3a)

$$S_k = \int_A \zeta\,\mathrm{d}A \tag{10}$$

a jednostką w układzie SI jest m^3.



Rysunek 3. Interpretacja definicji momentu statycznego figury płaskiej względem osi

W związku z tym wzory (9) można zapisać w skróconej formie (patrz także Rysunek 3b)

$$x_C = \frac{S_y}{A} \qquad y_C = \frac{S_x}{A} \tag{11}$$

Z powyższych zależności wynika, że jeśli oś obranego układu współrzędnych przechodzi przez środek ciężkości figury to moment statyczny figury względem tej osi jest równy 0 – przykładowo jeśli oś x przechodzi przez punkt C to $y_C = 0 \Rightarrow S_x = 0$). Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne – jeśli moment statyczny figury względem dowolnej osi jest równy zero to oś ta przechodzi przez środek ciężkości tej figury. Taką oś nazywamy osią centralną.

Należy zaznaczyć, że w zależności od położenia figury względem obranego układu współrzędnych momenty statyczne S_x i S_y mogą przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne.

Pojęcie środka ciężkości jest bardzo często mylone z pojęciem środka masy ciała. Środek ciężkości ciała lub układu ciał jest punktem, w którym przyłożona jest wypadkowa siła ciężkości danego ciała. Natomiast środek masy ciała lub układu ciał jest punktem, w którym skupiona jest cała masa w opisie układu reprezentowanego przez punkt. Oczywiście w przypadku jednorodnego pola grawitacyjnego środek ciężkości pokrywa się ze środkiem masy, natomiast w polu niejednorodnym są to różne punkty.

Przy wyznaczaniu położenia środków ciężkości ciał jednorodnych przydatne mogą być poniższe twierdzenia:

— jeśli ciało ma płaszczyznę symetrii, to środek ciężkości leży w tej płaszczyźnie,
— jeśli ciało ma dwie płaszczyzny symetrii, to środek ciężkości leży na linii ich przecięcia,
— jeśli ciało ma trzy płaszczyzny symetrii, to środek ciężkości leży w punkcie przecięcia się tych płaszczyzn.

3. Przebieg ćwiczenia

1. Sporządzić zgodnie z wymogami rysunku technicznego schemat figury otrzymanej od prowadzącego zajęcia
2. Wyznaczyć teoretyczne położenie środka ciężkości figury w obranym układzie współrzędnych
3. Zgłosić wynik prowadzącemu zajęcia
4. Korzystając z przygotowanych otworów zawiesić model figury na iglicy stojaka i oznaczyć przebieg linii pionowej. Zmienić punkt zawieszenia i powtórzyć próbę
5. Nanieść na przygotowany schemat figury płaskiej przebiegi wyznaczonych eksperymentalnie linii pionowych
6. Porównać uzyskany wynik eksperymentu z wartościami wyznaczonymi teoretycznie

4. Przygotowanie sprawozdania

Prawidłowo wykonane sprawozdanie powinno zawierać:

1. Stronę tytułową
2. Cel ćwiczenia
3. Szkic stanowiska laboratoryjnego oraz dokładny schemat modelu figury
4. Szczegółowe obliczenia teoretyczne położenia środka ciężkości badanej figury
5. Obliczenia wartości błędów wyniku teoretycznego położenia środka ciężkości
6. Porównanie wartości x_C i y_c z doświadczenia i z obliczeń teoretycznych
7. Wnioski

5. Pytania kontrolne

1. Co to jest środek sił równoległych?
2. Omówić sposób wyznaczania wypadkowej dwu sił równoległych.
3. Omówić cechy siły wypadkowej dwu sił równoległych – punkt przyłożenie, kierunek, wartość i zwrot.
4. Podać wzory określające położenie środka ciężkości bryły regularnej i o nieregularnych kształtach.
5. Podać wzory określające położenie środka ciężkości figury płaskiej regularnej i o nieregularnych kształtach.
6. Omówić pojęcie momentu statycznego figury płaskiej względem osi.
7. Co to jest oś centralna figury płaskiej?
8. Związek pomiędzy położeniem osi układu współrzędnych a wartością momentu statycznego figury względem tej osi.
9. Wyjaśnić różnice pomiędzy pojęciami środek ciężkości a środek masy.

6. Literatura

1. Leyko J.: *Mechanika ogólna* tom 1. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
2. Królikowski W., Rubinowicz W.: *Mechanika teoretyczna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
3. Niezgodziński T.: *Mechanika ogólna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
4. Morin D.: *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, Cambridge 2019.
5. Kibble T.W.B., Berkshire F.H.: *Classical Mechanics* ed. V$^{\text{th}}$. Imperial College Press, London 2004.