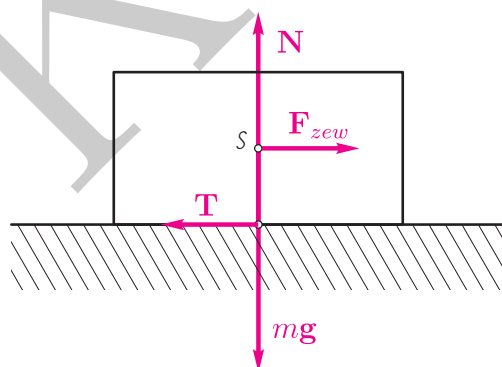
	Politechnika Lubelska Katedra Mechaniki Stosowanej
24	Laboratorium Mechaniki Wyznaczanie współczynnika tarcia cięgien
Opracował	dr hab. inż. Jarosław Latański, prof. PL

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się studentów ze zjawiskiem drgań własnych tłumionych oraz doświadczalne wyznaczenie wartości kinematycznego współczynnika tarcia cięgien.

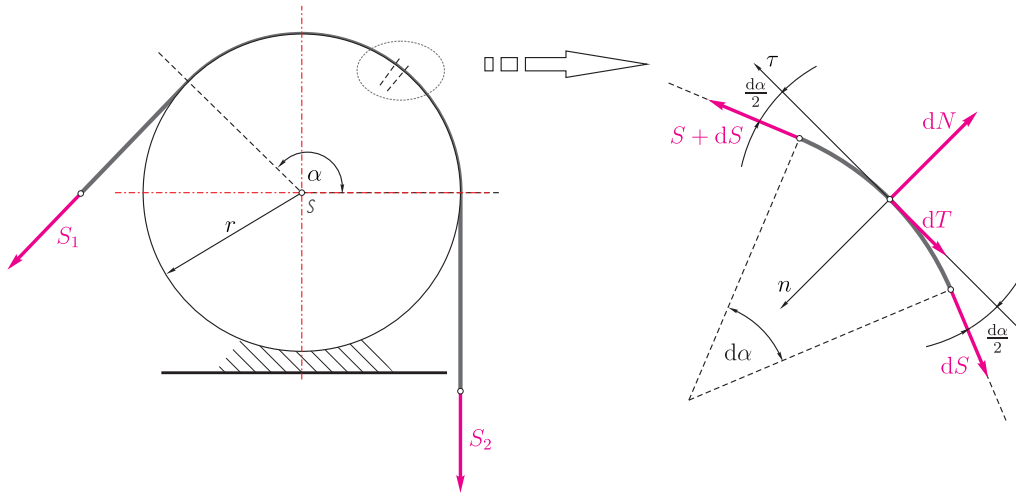
2. Podstawy teoretyczne

Tarciem nazywa się całokształt zjawisk występujących między stykającymi się ciałami stałymi. Przyczyną powstawania tarcia jest chropowatość powierzchni kontaktu. Siła reakcji \mathbf{R} wzajemnego oddziaływania między tymi powierzchniami daje się najczęściej zredukować do dwu składowych – składowej normalnej (prostopadłej) \mathbf{N} do powierzchni i składowej stycznej \mathbf{T} nazywanej zwyczajowo siłą tarcia ($\mathbf{R} = \mathbf{N} + \mathbf{T}$). Jeśli ciała przemieszczają się względem siebie to mówimy o tarciu kinetycznym, natomiast w warunkach spoczynku występuje tarcie statyczne.



Rysunek 1. Układ sił działających na ciało w warunkach tarcia

Jednym ze szczególnych przypadków zjawiska tarcia jest tarcie cięgien. Zachodzi ono między powierzchniami krzywoliniowymi (cylindrycznymi) a ciałami wiotkimi na nie nawiniętymi jak liny, taśmy, sznury, pasy itp. Siły tego typu występują np. w hamulcach taśmowych czy też w przekładniach pasowych; ich działanie sprowadza się do ograniczenia bądź niedopuszczenia do wzajemnego poślizgu koła i pasa. Należy zaznaczyć, że



Rysunek 2. Układ sił działających na cięgno opasane wokół nieruchomej powierzchni walcowej

w przypadku zjawiska tarcia cięgien zarówno składowa normalna reakcji podłoża N jak i składowa styczna T nie są stałe wzdłuż łuku przylegania cięgna. Tym samym siły występujące na obu końcach cięgna są różne $S_1 \neq S_2$ (Rysunek 2). Zależność między nimi określa wzór L. Eulera

$$S_1 = S_2 e^{\mu\alpha} \quad (1)$$

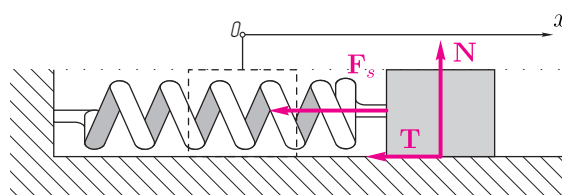
gdzie μ oznacza współczynnik tarcia między powierzchnią walcową a cięgnem, zaś α jest kątem opasania, tj. kątem środkowym opartym na fragmencie obwodu koła, na którym następuje kontakt z cięgnem. Wartość tego kąta jest wyrażana w zależności (1) w mierze łukowej.

Wzór powyższy jest słuszny przy założeniu, że tarcie jest w pełni rozwinięte, tzn. jeśli siła oddziaływania na cięgno przekroczy wartość S_1 to równowaga układu nie zostanie utrzymana i nastąpi poślizg cięgna po powierzchni.

Z inżynierskiego punktu widzenia tarcie powoduje kilka istotnych skutków – m.in. opór względnego przemieszczania i zużywanie trących się ciał. W szczególności w połączeniach ruchowych siła tarcia jest czynnikiem szkodliwym, gdyż powoduje straty energii. Z energetycznego bowiem punktu widzenia zjawisko tarcia jest procesem dysypatywnym, tzn. takim w którym następuje przemiana energii kinetycznej lub pracy sił utrzymującej trące się ciała w ruchu ustalonym w inne formy energii np. ciepłą. Ilość traczonej w ten sposób energii może być podstawą do określenia wartości współczynnika tarcia.

Przeanalizujemy w tym celu zjawisko drgań własnych tłumionych i elementarny układ mechaniczny składający się ze sprężyny o sztywności k i ciała o masie m poruszającego się po poziomej, chropowatej powierzchni. W tym przypadku na ciało to wzdłuż kierunku jego ruchu działa siła proporcjonalna do wychylenia F_s (siła restytucyjna) oraz siła oporu T (Rysunek 3). Spośród najczęściej stosowanych modeli opisów siły tłumienia, do najprostszych należy model, w którym przyjmuje się, że tłumienie jest proporcjonalne

do prędkości ruchu $v(t) = \dot{x}(t)$. Ten typ tłumienia nazywamy tłumieniem wiskotycznym. Założenie to daje zadowalającą dokładność wyników w przypadku niewielkich prędkości ruchu, z jakimi mamy do czynienia przy rozpatrywaniu małych drgań sprężystych.



Rysunek 3. Elementarny układ drgający

Układając równanie ruchu klocka otrzymuje się

$$m\ddot{x} = -T - F_s \quad (2)$$

Przyjmując, że siła sprężystości F_s jest wprost proporcjonalna do wychylenia x , a siła oporów T zależy liniowo od prędkości otrzymujemy ogólną postać równania ruchu drgającego z tłumieniem wiskotycznym:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3)$$

gdzie c oznacza współczynnik tłumienia wiskotycznego (kg/s), zaś k jest stałą sztywności sprężyny (N/m). W powyższym zapisie przyjęto notację $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ i $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$.

Po obustronnym podzieleniu przez masę otrzymujemy postać:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4)$$

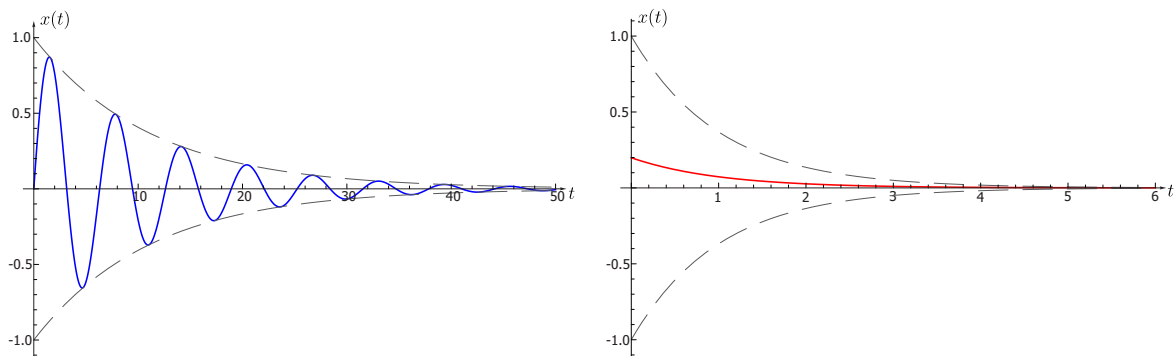
gdzie ω_0 oznacza częstość drgań własnych układu (rad/sek), zaś n jest współczynnikiem tłumienia (1/sek). W zależności od wzajemnych relacji wartości stałych n i ω_0 wyróżnia się trzy możliwe przypadki:

- tłumienie podkrytyczne gdy $n^2 < \omega_0^2$
- tłumienie nadkrytyczne gdy $n^2 > \omega_0^2$
- tłumienie krytyczne gdy $n^2 = \omega_0^2$

W przypadku tłumienia podkrytycznego układ wykonuje oscylacje o stałej częstości ω_1 , ale malejącej w czasie amplitudzie. Przykładowy przebieg w czasie tego typu drgań przedstawiono na Rysunku 4a. W dwu pozostałych przypadkach tłumienie w układzie jest na tyle duże, że układ nie wykonuje drgań, tzn. z niezerowego położenia początkowego powraca bezpośrednio do położenia równowagi – Rysunek 4b.

W interesującym nas przypadku drgań z tłumieniem podkrytycznym rozwiązanie ogólne równania różniczkowego ruchu ma postać:

$$x(t) = e^{-nt}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t) \quad (5)$$



Rysunek 4. Przykładowy przebieg czasowy drgań tłumionych: (a) podkrytycznie, (b) nadkrytycznie

gdzie ω_1 oznacza częstość drgań tłumionych

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - n^2} \quad (6)$$

Przyjmując, że w chwili początkowej $t = 0$ położenie i prędkość początkowa wynosiły odpowiednio $x_0 = x(t = 0)$ i $v_0 = \dot{x}_0 = \dot{x}(t = 0)$ stałe C_1 i C_2 przyjmują wartości:

$$C_1 = x_0 \quad C_2 = \frac{nx_0 + v_0}{\omega_1} \quad (7)$$

Podane rozwiązanie $x(t) = e^{-nt}(C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \sin \omega_1 t)$ może zostać przekształcone i zapisane w nieco innej postaci:

$$x(t) = A_0 e^{-nt} \sin(\omega_1 t + \varphi) \quad (8)$$

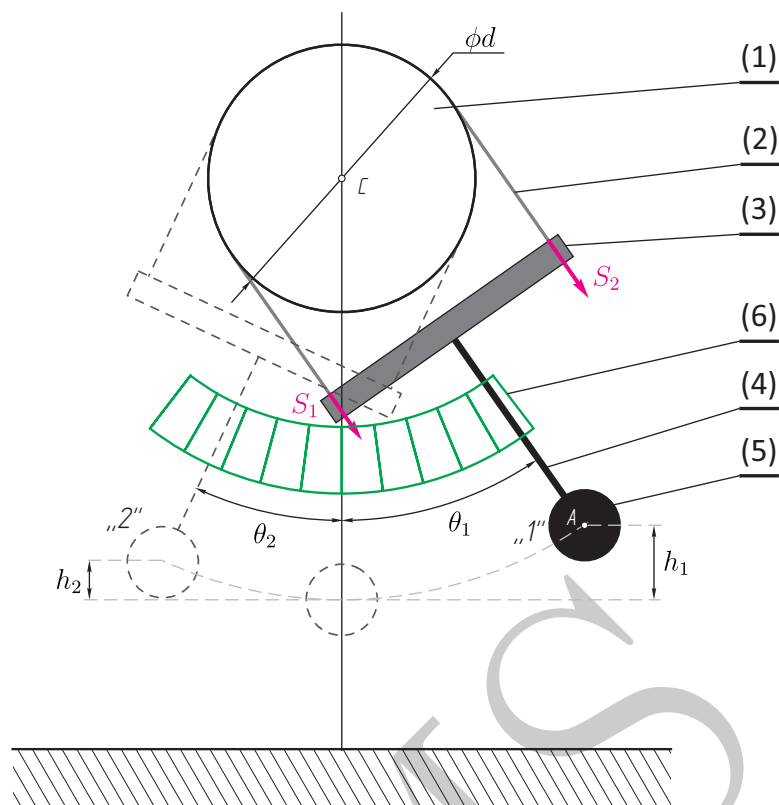
gdzie

$$A_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{nx_0 + v_0}{\omega_1}\right)^2} \quad \tan \varphi = \frac{x_0 \omega_1}{nx_0 + \dot{x}_0} \quad (9)$$

Z przekształconego równania wynika, że wraz z upływem czasu t wychylenie $x(t)$ dąży do zera; oznacza to, że drgania tłumione zanikają całkowicie po nieskończenie długim okresie. Mimo że drgania te są nieokresowe, kolejne maksymalne odchylenia oraz kolejne położenie środkowe uzyskiwane są po takich samych odstępach czasu. Dlatego też wprowadza się pojęcie okresu i częstości drgań tłumionych ω_1 .

Do eksperymentalnego wyznaczenia współczynnika tarcia ciągłego wykorzystane zostanie stanowisko laboratoryjne, którego schemat przedstawiono na Rysunku 5. Składa się ono z nieruchomego bębna (1), przez które przerzucone zostało elastyczne cięgno (2). Oba końce cięgna są zamocowane do klocka (3) o pomijalnej masie. Do klocka przymocowany został sztywny pręt (4), na końcu którego znajduje się duża masa skupiona m (5).

Do wyprowadzenia zależności matematycznych określających wartość współczynnika tarcia ciągłego μ wykorzystane zostanie twierdzenie o zmianie energii kinetycznej. Zgodnie z treścią tego twierdzenia całkowita zmiana energii kinetycznej ΔT układu w skończonym



Rysunek 5. Schemat stanowiska laboratoryjnego do wyznaczania tarcia cięgien

przedziale czasu Δt jest równa sumie prac wykonanych przez wszystkie siły działające na ten układ. Na potrzeby niniejszych rozważań siły te podzielimy na siły zachowawcze i niezachowawcze.¹ Obowiązuje zatem zależność

$$\Delta T = L_z + L_{nz} \quad (10)$$

gdzie symbole L_z i L_{nz} oznaczają odpowiednio pracę sił zachowawczych (np. siła ciężkości, siła sprężystości) i sił niezachowawczych (np. siła tarcia). W przypadku sił zachowawczych praca wykonywana przez te siły L_z jest równa zmianie energii potencjalnej $\Delta V = V_2 - V_1$ tych sił ze znakiem ujemnym. Ostatecznie zatem można zapisać

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\Delta V + L_{nz} = V_1 - V_2 + L_{nz} \quad (11)$$

gdzie indeksy dolne 1 i 2 oznaczają dowolne chwile czasowe.

Rozważmy zatem układ wahadła na stanowisku laboratoryjnym (Rysunek 5). Wahadło zostaje wychylone ze stanu równowagi o kąt θ_1 do położenia „1”, a następnie zwolnione

¹ Daną siłę nazywamy zachowawczą (inaczej potencjalną), jeżeli praca wykonana przez nią nad punktem materialnym poruszającym się po dowolnym zamkniętym torze jest równa zeru. Siły, które nie spełniają tego warunku są siłami niezachowawczymi (niepotencjalnymi)

bez nadawania prędkości początkowej. Wahadło rozpocznie ruch do dołu, a po minięciu dolnego położenia równowagi wychyli się w przeciwną stronę o maksymalny kąt $\theta_2 < \theta_1$.²

Ponieważ ruch rozpoczął się z położenia „1” bez prędkości początkowej oraz położenie „2” jest położeniem skrajnym odpowiadającym maksymalnemu wychyleniu (położenie zwrotne ruchu wahadła) to prędkości w obu tych miejscach wynoszą $v_1 = v_2 = 0$. Tym samym zerują się także energie kinetyczne $T_1 = T_2 = 0$.

Energia potencjalna w układzie związana jest jedynie z działaniem sił ciężkości i w skrajnych położeniach jej wartości wynoszą

$$V_1 = mgh_1 \quad V_2 = mgh_2 \quad (12)$$

gdzie przyjęto poziom odniesienia (poziom 0) wartości energii potencjalnej w dolnym położeniu równowagi wahadła. Z zależności geometrycznych wynika

$$h_1 = l(1 - \cos \theta_1) \quad h_2 = l(1 - \cos \theta_2) \quad (13)$$

gdzie długość wahadła $l = |\overline{AC}|$. Dla małych kątów można zastosować przybliżoną zależność $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ wynikającą z rozwinięcia funkcji $\cos(\alpha)$ w szereg Taylora, przy czym wartość kąta α winna być wyrażona w radianach. A zatem zmiana energii potencjalnej układu dana jest zależnością

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{1}{2}mgl(\theta_2^2 - \theta_1^2) \quad (14)$$

Droga kątowna wahadła pomiędzy położeniami „1” i „2” wynosi $\theta_1 + \theta_2$ (rad) i stąd odpowiadająca jej długość łuku równa jest przemieszczeniu s

$$s = (\theta_1 + \theta_2)\frac{d}{2} \quad (15)$$

W związku z tym praca wykonywana przez siłę tarcia (siłę niezachowawczą)

$$L_{nz} = Ts = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)dT \quad (16)$$

Z warunku równowagi cięga wynika, że siła tarcia T jest różnicą wartości sił S_1 i S_2 działających z obu jego stron $T = S_1 - S_2$ – Rysunek 2. Podstawiając zależności (17) i (14) do (11) oraz po dokonaniu uproszczeń otrzymujemy

$$S_1 - S_2 + mg\frac{l}{d}(\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad (17)$$

Uwzględniając zależność L. Eulera (1) oraz warunek równowagi w dolnym położeniu wahadła

$$mg = S_1 + S_2 \quad (18)$$

² Gdyby nie występowały w układzie straty energii na opory ruchu, to wychylenie po drugiej stronie byłoby identyczne ($\theta_2 = \theta_1$)

wzór (17) po przekształceniach można zapisać jako

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \frac{d(e^{\alpha\mu} - 1)}{l(e^{\alpha\mu} + 1)} \quad (19)$$

Z powyższej zależności można wyznaczyć wartość współczynnika tarcia μ ciągu

$$\mu = \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{d + l\Delta\theta}{d - l\Delta\theta} \right) \quad (20)$$

W powyższym równaniu $\Delta\theta$ określa zmianę kąta wychylenia wahadła tj. zmniejszenie amplitudy w $1/2$ cyklu ruchu drgającego. A zatem w jednym pełnym cyklu zmiana będzie wynosiła $2\Delta\theta$. Poprawę dokładności pomiaru zmiany amplitudy $\Delta\theta$ można uzyskać mierząc zachowanie wahadła w czasie wielu kolejnych cykli. W trakcie n pełnych cykli zmiana będzie wynosiła $2n\Delta\theta$ i taką wartość należy wstawić do wzoru 20.

3. Przebieg ćwiczenia

1. Wykonać pomiar średnicy bębna d , kąta opasania α i długości ramienia wahadła l ; od prowadzącego ćwiczenie uzyskać dane na temat materiałów z jakich wykonanych jest ciągnie oraz bębna. Powyższe dane i wartości pomiarów zapisać w Tabeli 1.

Tabela 1. Wyniki pomiarów geometrycznych stanowiska

d []	l []	α []
Dane dodatkowe:		

2. W porozumieniu z prowadzącym przyjąć wartość kąta początkowego wychylenia wahadła θ_1 . Następnie ustawić ramię wahadła w przyjętym położeniu i zwolnić bez nadawania prędkości początkowej.
3. Obserwować wychylenie wahadła po drugiej stronie położenia równowagi.
4. Celem uzyskania lepszej wiarygodności wyników próbę powtórzyć 3-4 krotnie.
5. Wyniki zanotować w Tabeli 2
6. Wyznaczyć wartość współczynnika tarcia μ ze wzoru (20).

Tabela 2. Wyniki pomiarów dynamicznych wahadła

θ_1 []	θ_2	
	1/2 cyklu []	pełny cykl []
	Próba 1:	
	Próba 2:	
	Próba 3:	
	Próba 4:	
	Wartość średnia	
$\mu =$		

4. Przygotowanie sprawozdania

Prawidłowo wykonane sprawozdanie powinno zawierać:

1. Stronę tytułową
2. Cel ćwiczenia
3. Schemat stanowiska laboratoryjnego
4. Tabelę wyników pomiarów geometrycznych stanowiska
5. Wyniki pomiarów próby wahadła
6. Szczegółowe obliczenia współczynnika tarcia μ
7. Obliczenia wartości błędów wyznaczonego współczynnika tarcia $\Delta\mu$. Obliczenia przeprowadzić metodą różniczeki zupełnej
8. Wnioski

5. Pytania kontrolne

1. Omówić zjawisko tarcia cięgien.
2. Wzór L. Eulera.
3. Scharakteryzować drgania własne tłumione.
4. Twierdzenie o energii kinetycznej układu.
5. Zasada zachowania energii mechanicznej.

6. Literatura

1. LEYKO J.: *Mechanika ogólna* tom 1 & 2. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
2. GIERGIEL J.: *Drgania mechaniczne*. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo Dydaktyczne AGH, Kraków 2000.
3. KRÓLIKOWSKI W., RUBINOWICZ W.: *Mechanika teoretyczna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
4. THOMSON W.T.: *Theory of Vibration with Applications* ed. 4th. Taylor & Francis, New York 2010.
5. HIBBELER R.: *Engineering Mechanics: Statics & Dynamics* ed. XVth. Pearson, New York 2015.
6. MERIAM J.L., KRAIGE L.G., BOLTON J.N.: *Meriam's Engineering Mechanics: Dynamics* ed. IXth. John Wiley & Sons Inc, Hoboken (NJ) 2020.

KMIS