	Politechnika Lubelska Katedra Mechaniki Stosowanej
26	Laboratorium Mechaniki Toczenie koła. Określanie masowego momentu bezwładności
Opracował	dr hab. inż. Jarosław Latański, prof. PL

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z metodami analizy kinematyki bryły sztywnej w czasie ruchu płaskiego oraz teoretyczne i doświadczalne wyznaczenie masowego momentu bezwładności koła.

2. Wstęp teoretyczny

Ruchem płaskim bryły sztywnej nazywamy ruch, w czasie którego wszystkie punkty tego ciała poruszają się w płaszczyznach równoległych do pewnej płaszczyzny nieruchomej nazywanej płaszczyzną kierującą. Przykładami takiego ruchu mogą być np. przesuwanie mebli po podłodze (rolę płaszczyzny kierującej pełni płaszczyzna podłogi), toczenie krążka po torze prostoliniowym – płaszczyzną kierującą jest w tym przypadku płaszczyzna tego koła czy też ruch korbowa silnika. Należy zauważyć, że punkty ciała leżące na dowolnej prostej prostopadłej do płaszczyzny kierującej poruszają się po takich samych torach, mają więc jednakowe prędkości i przyspieszenia. Zatem badając ruch płaski bryły wystarczy wziąć pod uwagę jeden przekrój tego ciała dowolną płaszczyzną równoległą do kierującej.

Łatwo można wykazać, że dowolne przemieszczenie jakie wykonuje ciało poruszające się ruchem płaskim może być zrealizowane za pomocą złożenia translacji (tj. przesunięcia równoległego) oraz obrotu wokół określonego punktu płaszczyzny kierującej. Alternatywnie można również wykazać, że dowolna zmiana położenia w ruchu płaskim da się przedstawić jako obrót wokół każdorazowo innego punktu płaszczyzny kierującej – punkt ten jest nazywany chwilowym środkiem obrotu. Nazwa ta wynika z faktu, że w każdej chwili czasu t punkt ten zajmuje inne położenie.¹

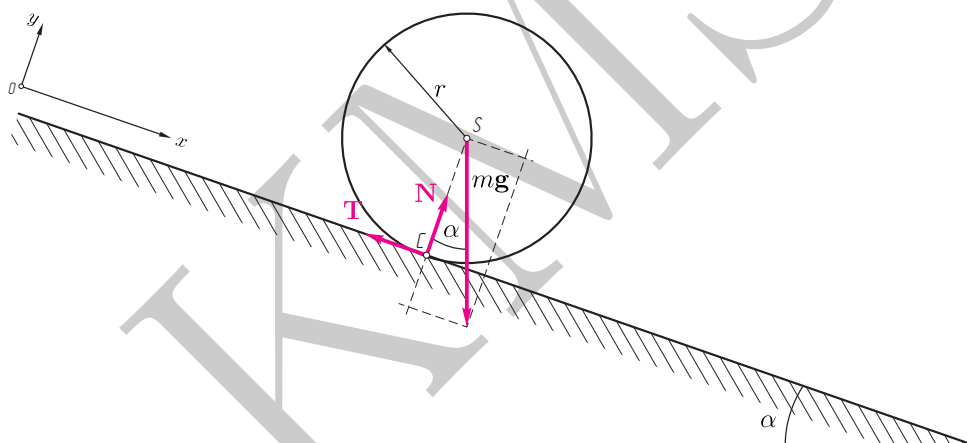
Z powyższych rozważań wynika, że szczególnymi przypadkami ruchu płaskiego są dwa inne ruchy bryły sztywnej, a mianowicie ruch postępowy i ruch obrotowy. W ruchu postępowym wszystkie punkty ciała przemieszczają się równolegle, nie występuje zatem

¹ W odróżnieniu od ruchu obrotowego, kiedy środek obrotu nie zmienia swojego położenia

składnik przemieszczenia ruchu płaskiego związany z obrotem. Natomiast w przypadku ruchu obrotowego bryły sztywnej punkt wokół którego następuje obrót jest stały tj. nie zmienia swojego położenia w czasie. Oznacza to, że w czasie ruchu nie występuje komponent translacyjny przemieszczenia.

Jako klasyczny przypadek ruchu płaskiego bryły rozpatrzmy toczenie koła, przy czym celem uogólnienia rozważań założymy, że koło to toczy się po równi pochyłej. Dynamiczne równanie ruchu analizowanego krążka można ułożyć na kilka sposobów. W pierwszej kolejności przedstawiony zostanie sposób bazujący na równaniach Newtona i zasadzie d’Alamberta. Do zapisania tych równań wykorzystamy twierdzenie o ruchu środka masy oraz twierdzenie dotyczące krętu (momentu pędu) ciała względem środka masy. W dalszej części opisu teoretycznego przedstawione zostanie wyprowadzenie równania ruchu koła na podstawie równań Lagrange’a drugiego rodzaju.

Rozpatrzmy plan sił działających na krążek o masie m znajdujący się na równi pochyłej ustawionej pod kątem α do poziomu – Rysunek 1. Na krążek działają: pionowa siła ciężkości mg oraz składowa normalna reakcji podłoża \mathbf{N} i składowa styczna reakcji podłoża (siła tarcia) \mathbf{T} przyłożone w punkcie C styku koła z podłożem.



Rysunek 1. Rozkład sił działających na koło toczące się po równi pochyłej

Zapisując dynamiczne równania ruchu środka masy S wzdłuż równi (oś Ox) oraz na kierunku normalnym Oy otrzymujemy

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg \sin \alpha - T \\ 0 &= -mg \cos \alpha + N \end{aligned} \quad (1)$$

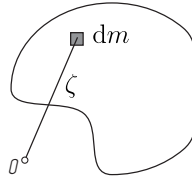
gdzie notacja \ddot{x} oznacza drugą pochodną współrzędnej x po czasie – tj. przyspieszenie środka masy krążka w dół równi.

Gdyby pominąć wymiary krążka i traktować go jako punkt materialny to masa układu byłaby skupiona w jednym punkcie i dwa powyższe równania jednoznacznie określałyby ruch ciała. Z uwagi jednak na fakt, że wymiary nie są pomijalnie małe ($r \neq 0$) to masa koła

jest rozłożona w całej jego objętości. Miarą tego rozkładu jest wielkość, którą nazywamy *masowym momentem bezwładności* i obliczamy z zależności

$$I_O = \int_m \zeta^2 dm \quad (2)$$

gdzie ζ oznacza odległość wycinka masy dm od przyjętego bieguna O . Jednostką miary momentu bezwładności w układzie SI jest $\text{kg} \cdot \text{m}^2$. Moment bezwładności odgrywa analogiczną rolę w dynamice ruchu obrotowego brył jak masa w dynamice ruchu postępowego.



Rysunek 2. Rozkład masy ciała sztywnego i definicja masowego momentu bezwładności

Wobec powyższego należy zapisać dodatkowe równanie ruchu; wykorzystane zostanie w tym celu *twierdzenie o kręcie ciała materialnego*. Zgodnie z jego treścią pochodna względem czasu krętu układu materialnego względem osi przechodzącej przez jego środek masy i poruszającej się razem z tym środkiem ruchem postępowym równa jest sumie momentów sił zewnętrznych działających na ten układ i wyznaczonych względem tejże osi.

Stosując oznaczenia jak na Rysunku 1 zachodzi zatem zależność

$$\frac{d\mathbf{K}_S}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{Si} \quad (3)$$

gdzie \mathbf{K}_S oznacza wektor krętu krążka względem osi prostopadłej do płaszczyzny koła i przechodzącej przez jego środek masy (punkt S), zaś \mathbf{M}_{Si} wektor momentu i -tej siły zewnętrznej względem punktu S ; symbol n oznacza liczbę działających sił.

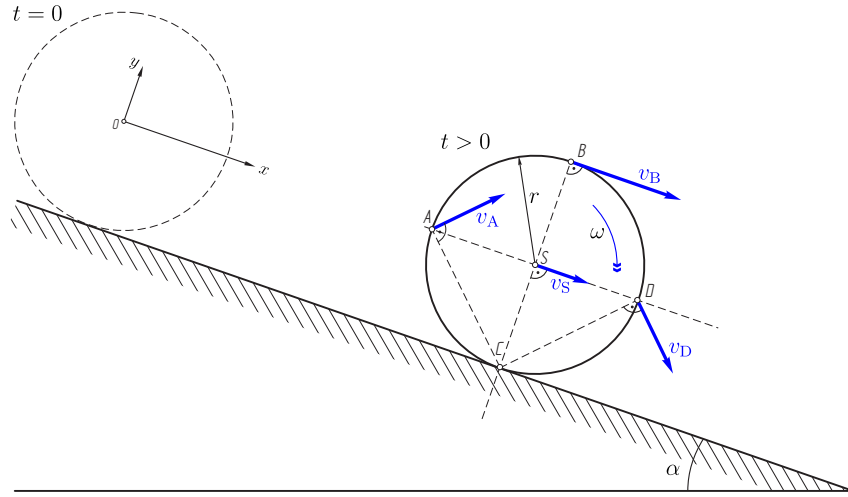
Uwzględniając fakt, że wszystkie siły działające na koło leżą w jego płaszczyźnie (płaszczyzna rysunku) oraz podstawiając do równania wektorowego (3) ogólne wyrażenie na kręt układu materialnego $K_S = I_S \omega$ otrzymuje się ostatecznie zapis skalarny (odpowiadający równaniu wektorowemu dla kierunku prostopadłego do płaszczyzny koła)

$$\frac{d(I_S \omega)}{dt} = I_S \varepsilon = Tr \quad (4)$$

przy czym $\varepsilon = \dot{\omega}$ oznacza przyspieszenie kątowe rozważanego układu (koła), a I_S jego moment bezwładności względem środka masy. Występująca po prawej stronie równania suma momentów zawiera tylko jeden składnik Tr , gdyż tylko ta siła ma niezerowe ramię względem środka masy S .

Wyznaczając z powyższego równania T i wstawiając do zależności (1)₁ otrzymuje się

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - \frac{I_S \varepsilon}{r} \quad (5)$$



Rysunek 3. Rozkład prędkości punktów koła tocącego się po równi pochyłej

W celu ustalenia zależności między przyspieszeniem liniowym \ddot{x} środka masy krążka S a przyspieszeniem kątowym ε koła przeanalizujemy plan prędkości wybranych punktów bryły – schemat na Rysunku 3.

Przyjmując założenie, że toczenie krążka odbywa się bez poślizgu w analizowanej chwili czasu $t > 0$ punkt C styku koła z podłożem nie porusza się ($v_C = 0$); punkt ten stanowi zatem chwilowy środek obrotu krążka. Można zatem określić prędkości innych wybranych punktów koła

$$v_A = \omega |\overline{CA}| \quad v_S = \omega |\overline{CS}| \quad v_B = \omega |\overline{CB}| \quad v_D = \omega |\overline{CD}| \quad (6)$$

Wektory tych prędkości są prostopadłe do odpowiadających im promieni poprowadzonych z chwilowego środka obrotu C – patrz Rysunek 3.

Różniczkując względem czasu zależność (6)₂ na prędkość środka masy krążka S otrzymujemy przyspieszenie tego punktu

$$a_S = \ddot{x} = \frac{dv_S}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = \varepsilon r \quad (7)$$

Wyznaczając z powyższej zależności przyspieszenie kątowe ε i wstawiając do równania (5) ruchu środka masy wzdłuż osi Ox otrzymujemy

$$\left(m + \frac{I_S}{r^2}\right) \ddot{x} = mg \sin \alpha \quad (8)$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe, zwyczajne, niejednorodne, drugiego rzędu. W celu jego rozwiązania wystarczy dwukrotnie obustronnie scałkować względem zmiennej niezależnej t

$$\begin{aligned} \left(m + \frac{I_S}{r^2}\right) \dot{x}(t) &= mg \sin \alpha \cdot t + C_1 \\ \left(m + \frac{I_S}{r^2}\right) x(t) &= \frac{1}{2} mg \sin \alpha \cdot t^2 + C_1 t + C_2 \end{aligned} \quad (9)$$

Wielkości C_1 i C_2 stanowią stałe całkowania wyznaczone z warunków początkowych ruchu. Zakładając, że ruch krążka rozpoczyna się w punkcie będącym początkiem układu współrzędnych ($x(t=0) = 0$) oraz bez prędkości początkowej ($v_s(t=0) = 0$) wartości tych stałych wynoszą $C_1 = C_2 = 0$. Ostatecznie zatem otrzymuje się

$$\left(m + \frac{I_S}{r^2}\right) x(t) = \frac{1}{2} mg \sin \alpha \cdot t^2 \quad (10)$$

Mierząc czas t_r konieczny do pokonania dystansu L będącego długością równi można wyznaczyć eksperymentalnie wartość momentu bezwładności krążka I_S

$$I_S = \left(\frac{t_r^2}{2L} mg \sin \alpha - m\right) r^2 \quad (11)$$

Powyższe rozważania dotyczyły wyprowadzenia równań ruchu ciała na podstawie praw I. Newtona. W przypadku nieswobodnych układów punktów materialnych jest często to utrudnione ze względu na konieczność uwzględniania dodatkowych warunków wynikających z równań więzów. Pociąga to za sobą konieczność wprowadzenia do równań dynamiki sił reakcji – por. zależności (1). Wielkości te stanowią dodatkowe niewiadome problemu, które często mogą być trudne do zidentyfikowania. Trudności powyższe można wyeliminować wyprowadzając równania ruchu układu metodami energetycznymi. Jedną z nich jest zastosowanie równań Lagrange’a drugiego rodzaju.

Stosowanie metod energetycznych wiąże się z koniecznością wyboru układu *współrzędnych uogólnionych*. Współrzędne uogólnione to niezależne od siebie współrzędne, które jednoznacznie definiują położenie badanego układu w przestrzeni. Najczęściej przyjmują one postać przemieszczeń, przy czym mogą to być zarówno przemieszczenia liniowe (translacyjne) jak i kątowe (rotacyjne). W tak wybranym układzie odniesienia definiuje się funkcję energii potencjalnej $V(q)$ oraz energii kinetycznej $T(q, \dot{q}, t)$ gdzie q oznacza przyjętą współrzędną uogólnioną.²

Równania Lagrange’a mają postać

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial V}{\partial q} = Q \quad (12)$$

gdzie D oznacza funkcję dyssypacji energii układu (inaczej rozpraszania energii, np. w wyniku tłumienia ruchu), wielkość Q zaś jest uogólnioną siłą czynną (niepotencjalną i nie-dyssypatywną).

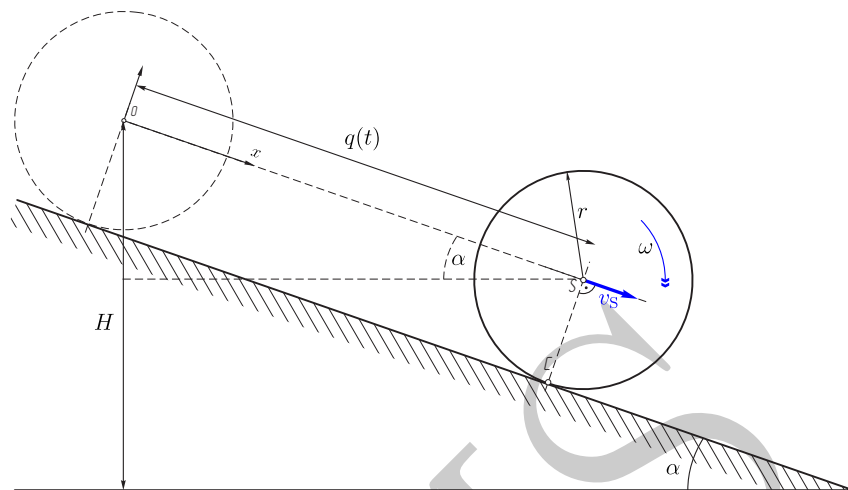
Wybermy zatem współrzędną uogólnioną q opisującą jednoznacznie położenie koła w dowolnej chwili czasu t . Może nią być np. położenie środka masy koła wyznaczone wzdłuż równi $x(t) = q(t)$ — Rysunek 4. Podobnie jak w poprzednim wyprowadzeniu zakładamy, że początek osi Ox pokrywa się z miejscem, z którego rozpoczyna się ruch koła.

² Zapis dotyczy układu o jednym stopniu swobody. W przypadku ogólnym wielu stopni swobody rozważanego układu energie te są funkcjami wszystkich stopni q_i

Energia potencjalna $V(q)$ koła jest związana tylko z działającą na nie siłą ciężkości i dana jest zależnością

$$V(q) = m g h(t) = m g (H - q \sin \alpha) \quad (13)$$

gdzie przyjęto, że poziomem odniesienia $V = 0$ jest poziom podstawy równi.



Rysunek 4. Rozkład prędkości punktów koła tocącego się po równi pochyłej

Obliczając energię kinetyczną $T(q, \dot{q})$ tocącego się koła (rozpatrywanego jako bryła sztywna) należy skorzystać z *twierdzenia Königa*. Twierdzenie to mówi, że całkowita energia kinetyczna bryły sztywnej równa jest sumie dwu składników – tj. energii kinetycznej ruchu postępowego z prędkością środka masy tej bryły i energii kinetycznej w chwilowym ruchu obrotowym wokół osi przechodzącej przez środek masy. A zatem:

$$T = T_p + T_o \quad (14)$$

gdzie T_p oznacza energię kinetyczną ruchu postępowego, zaś T_o oznacza energię kinetyczną w chwilowym ruchu obrotowym wokół osi przechodzącej przez środek masy bryły. Uwzględniając plan prędkości przedstawiony na Rysunku 3 można zapisać

$$T_p(\dot{q}) = \frac{1}{2} m v_S^2 = \frac{1}{2} m \dot{q}(t)^2 \quad T_o(\dot{q}) = \frac{1}{2} I_S \omega^2 = \frac{1}{2} I_S \left(\frac{\dot{q}(t)}{r} \right)^2 \quad (15)$$

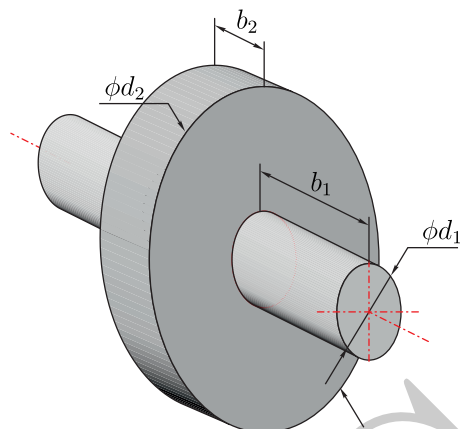
Wstawiając powyższe zależności do równania Lagrange'a (13) i po obliczeniu odpowiednich pochodnych otrzymujemy ostatecznie równanie ruchu koła

$$\left(m + \frac{I_S}{r^2} \right) \ddot{q} - m g \sin \alpha = 0 \quad (16)$$

Postać ta jest identyczna z wcześniej wyprowadzonym równaniem (8).

3. Przebieg ćwiczenia

1. Dokonać pomiarów geometrycznych krążka wykorzystywanego w ćwiczeniu – Rysunek 5; wyniki zanotować w Tabeli 1.



Rysunek 5. Model koła badany w ćwiczeniu

2. Obliczyć wartość teoretyczną $I_S^{(t)}$ masowego momentu bezwładności modelu koła; w obliczeniach rozważyć jego podział na dwie podstawowe części. Niezbędne do obliczeń teoretycznych wzory znajdują się w Tabeli 3 na końcu instrukcji. Otrzymany wynik zgłosić prowadzącemu zajęcia.

Tabela 1. Wyniki pomiarów i obliczeń teoretycznych modelu koła

ρ []			d_1 []			d_2 []		b_1 []		b_2 []							
V_1 []			m_1 []			$I_S^{(1)}$ []			V_2 []			m_2 []			$I_S^{(2)}$ []		
$I_S^{(t)} = I_S^{(1)} + I_S^{(2)} =$																	

3. Ustawić równię pochyłą na stabilnym podłożu; w razie potrzeby wyregulować poziom podstawy według wskazań poziomicy znajdującej się w stelażu stanowiska. Nastawić pokręteł regulacyjnym kąt nachylenia równi według wytycznych otrzymanych od prowadzącego.
4. Ustawić krążek na szczycie równi – tj. w punkcie oznaczonym „0” na skali długości; zwrócić uwagę, aby oś rolki była prostopadła do szyny równi. Zmierzyć czas toczenia

się krążka do końca równi i zanotować w Tabeli 2. Próbę powtórzyć pięciokrotnie i obliczyć wartość średnią.

Tabela 2. Wyniki pomiarów próby toczenia

$L = \quad [\quad]$						
α_1	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_{sr}
$[\circ]$	$[\quad]$	$[\quad]$	$[\quad]$	$[\quad]$	$[\quad]$	$[\quad]$
$I_S^{(d)} = \quad [\quad]$						
α_2	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_{sr}
$[\circ]$	$[\quad]$	$[\quad]$	$[\quad]$	$[\quad]$	$[\quad]$	$[\quad]$
$I_S^{(d)} = \quad [\quad]$						

- Obliczyć ze wzoru (11) doświadczalną wartość momentu bezwładności krążka $I_S^{(d)}$, wynik zanotować w Tabeli 2.

4. Przygotowanie sprawozdania

Prawidłowo wykonane sprawozdanie powinno zawierać:

- Stronę tytułową
- Cel ćwiczenia
- Schemat stanowiska laboratoryjnego oraz szkic modelu koła
- Tabelę wyników pomiarów geometrycznych krążka – Tabela 1
- Szczegółowe obliczenia teoretyczne masowego momentu bezwładności $I_S^{(t)}$ badanego układu
- Wyniki pomiarów próby toczenia – Tabela 2
- Szczegółowe obliczenia $I_S^{(d)}$
- Obliczenia wartości błędów wyniku teoretycznego masowego momentu bezwładności $I_S^{(t)} \pm \Delta I_S^{(t)}$ oraz momentu doświadczalnego $I_S^{(d)} \pm \Delta I_S^{(d)}$. Obliczenia przeprowadzić metodą różniczki zupełnej. Otrzymane wyniki porównać
- Wnioski

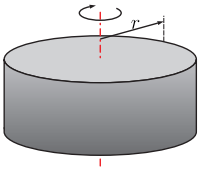
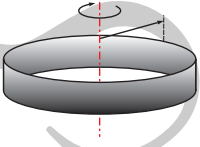
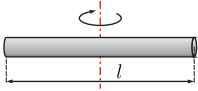

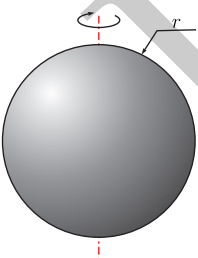
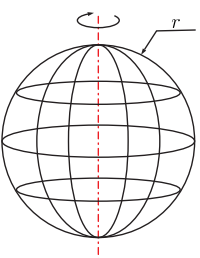
5. Pytania kontrolne

1. Zdefiniować ruch płaski, podać przykłady
2. Omówić pojęcie chwilowego środka obrotu
3. Określić rozkład prędkości na toczącym się kole
4. Określić rozkład przyspieszeń na toczącym się kole
5. Podać Tw. Koeniga
6. Zapisać ogólną postać równań Lagrange'a drugiego rodzaju
7. Zapisać dynamiczne równanie ruchu toczącego się koła
8. Definicja masowego momentu bezwładności bryły

6. Literatura

1. LEYKO J.: *Mechanika ogólna* tom 2. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
2. TAYLOR J.: *Mechanika klasyczna* tom 1, tłum. P. Rączka. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
3. KRÓLIKOWSKI W., RUBINOWICZ W.: *Mechanika teoretyczna*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
4. HIBBELER R.: *Engineering Mechanics: Statics & Dynamics* ed. XVth. Pearson, New York 2015.
5. MERIAM J.L., KRAIGE L.G., BOLTON J.N.: *Meriam's Engineering Mechanics: Dynamics* ed. IXth. John Wiley & Sons Inc, Hoboken (NJ) 2020.

Tabela 3. Masowe momenty bezwładności wybranych brył. Parametr m oznacza każdorazowo masę bryły

1		$\frac{1}{2}mr^2$	2		mr^2
3		$\frac{1}{12}ml^2$	4		$\frac{1}{3}ml^2$
5		$\frac{2}{5}mr^2$	5		$\frac{2}{3}mr^2$