



**KATEDRA MECHANIKI STOSOWANEJ**  
Wydział Mechaniczny  
POLITECHNIKA LUBELSKA

## **INSTRUKCJA DO ĆWICZENIA NR 4**

PRZEDMIOT	MECHANIKA I FIZYKA CIAŁA STAŁEGO
TEMAT	<i>Badania numeryczne układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody. Weryfikacja modelu analitycznego.</i>
OPRACOWAŁ	dr inż. Krzysztof Kęcik

### **1. CEL ĆWICZENIA**

Celem ćwiczenia jest opracowanie modelu numerycznego oraz symulacje numeryczne układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody na przykładzie dynamicznego eliminatora drgań. Ponadto, celem jest zweryfikowanie wyników analitycznych otrzymanych w ćwiczeniu laboratoryjnym nr 5.

### **2. PODSTAWY TEORETYCZNE**

Współczesny stan nauki i techniki, w tym także mechaniki, trudno jest dzisiaj wyobrazić sobie bez tego, co wniosło pojawienie się komputera oraz metod i technik numerycznych. W mechanice opis analizowanego zjawiska przedstawia się za pomocą równań matematycznych. Są to najczęściej równania różniczkowe zwyczajne lub cząstkowe określone w pewnym obszarze, w którym analizowane zjawisko przebiega. Mówimy, że równania te są *modelem matematycznym* badanego zjawiska. Bardzo często ścisłe analityczne rozwiązanie takiego modelu jest bardzo trudne lub niemożliwe. Jedynym uniwersalnym sposobem rozwiązania jest zastosowanie metod numerycznych. Metody te stanowią jeden z zasadniczych nurtów rozwojowych współczesnej nauki i techniki. Ich stosowanie umożliwia symulację komputerową rzeczywistych zjawisk o różnej naturze fizycznej. Pojęcie słowa *symulacja komputerowa* odnosi do stosowania modeli obliczeniowych w analizie i predykcji procesów mechanicznych lub zachowań systemów technicznych. Zaletą symulacji jest to, że eksperyment można wielokrotnie powtarzać, zmieniając za każdym razem parametry, oraz obserwować i analizować wpływ tych zmian na przebieg zjawiska. Możemy badać zachowanie jeszcze nieistniejących układów lub urządzeń. Symulacja i modelowanie komputerowe reprezentują takie rozszerzenie zakresu nauk teoretycznych, że uzyskanie nowych rezultatów poznawczych bazuje głównie na modelach matematycznych. Takie modele mogą być nawet podstawą teorii naukowych.

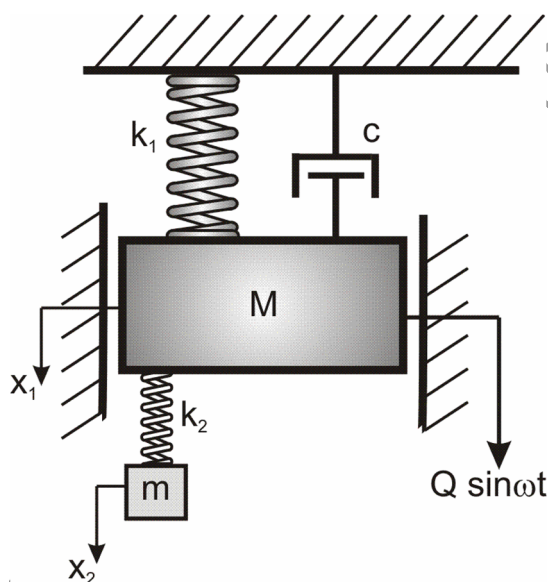
*Model numeryczny* jest to program komputerowy umożliwiający wprowadzanie parametrów modelowanego układu i stanu początkowego, otrzymanie na drodze obliczeniowej przebiegów czasowych zjawisk i charakterystyk modelowanego układu.

*Symulacja numeryczna* jest to zastosowanie techniki komputerowej do rozwiązywania problemów dynamicznych modeli systemów.

W nauce, bardzo ważne jest potwierdzenie wyników obliczeń analitycznych innymi metodami takimi jak symulacje komputerowe czy badania eksperymentalne. Dopiero, taki wyniki poparte innymi wynikami można uznać za prawidłowe.

### 3. MODEL UKŁADU DRGAJĄCEGO

Rozpatrywany jest model układu drgającego składa się z układu podstawowego (ciała materialnego o masie  $M$ ), zaczepionego na sprężynie o charakterystyce liniowej (stała  $k_1$ ) i tłumika wiskotycznego o współczynniku  $c$ . Układ podstawowy jest wymuszany siłą harmoniczną  $Q \cdot \sin \omega t$ .



Rys. 1. Układ mechaniczny o dwóch stopniach swobody.

Do układu podstawowego doczepiono dynamiczny eliminator drgań o masie  $m$ . Stała sprężyny dynamicznego eliminatora wynosi  $k_2$ . Równania różniczkowe ruchu masy głównej  $M$  i masy  $m$  tłumika dynamicznego mają następującą postać:

$$M\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 = Q \sin \omega t, \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 - k_2x_2 + k_2x_1 = 0. \quad (2)$$

Po kilku przekształceniach matematycznych równania (1) i (2) sprowadzono do postaci:

$$\ddot{x}_1 + 2n\dot{x}_1 + ax_1 - bx_2 = q \sin \omega t, \quad (3)$$

$$\ddot{x}_2 + rx_2 - rx_1 = 0, \quad (4)$$

gdzie:

$$2n = \frac{c}{M}, \quad a = \frac{k_1 + k_2}{M}, \quad b = \frac{k_2}{M}, \quad q = \frac{Q}{M}, \quad r = \frac{k_2}{m}. \quad (5)$$

Częstość drgań własnych układu podstawowego bez doczepionego dynamicznego eliminatora drgań można wyznaczyć z zależności

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{M} = a'. \quad (6)$$

Natomiast częstość drgań własnych eliminatora wynosi

$$\omega_{0e}^2 = \frac{k_2}{m} = b. \quad (7)$$

#### 4. PRZEBIEG ĆWICZENIA

Ćwiczenie to w dużym stopniu bazuje na ćwiczeniu nr 5, gdzie badano ten sam model analitycznie. Dlatego wyniki analityczne z tego ćwiczenia będą wykorzystane i weryfikowane symulacjami numerycznymi.

Do tego celu zostanie wykorzystane środowisko *Matlab* oraz *Simulink*. *Simulink* jest częścią pakietu numerycznego *Matlab* firmy *MathWorks* ([www.mathworks.com](http://www.mathworks.com)) i służy do przeprowadzania symulacji komputerowych. Można implementować w nim układy liniowe jak i nieliniowe modelowane zarówno w czasie ciągłym, dyskretnym *Simulink* pozwala budować modele przy pomocy interfejsu graficznego i tzw. bloków. Bloki te są przeznaczone do wykonywania różnych operacji matematycznych (całkowanie, różniczkowanie, mnożenie, itp.). Bloki łączy się w odpowiedni sposób tak aby spełniały zależności matematyczne.

W celu łatwiejszego zaimplementowania równań (3) i (4) przekształcono je do następujących postaci:

$$\ddot{x}_1 = -2n\dot{x}_1 - ax_1 + bx_2 + q \sin \omega t, \quad (8)$$

$$\ddot{x}_2 = -rx_2 + rx_1. \quad (9)$$

Parametry układu przedstawiono w Tabeli 1 (parametry układu), natomiast warunki symulacji numerycznej przedstawiono w Tabeli 2.

**Tabela 1.** Parametry układu.

Dane do badań numerycznych i analitycznych					
2n	a	a'	b	r	q
0.25	2	1	1	1	1

W tabeli 2,  $t_0$  oznacza czas początkowy,  $t_k$  czas końcowy symulacji numerycznych, natomiast  $x_{10}$ ,  $x_{20}$  –są to początkowe wychylenia,  $x'_{10}$ ,  $x'_{20}$  –początkowe prędkości układu podstawowego i eliminatora drgań (tzw. warunki początkowe).

**Tabela 2.** Dane do symulacji numerycznej

Parametry symulacji komputerowej						
$t_0$	$t_k$	$x_{10}$	$x'_{10}$	$x_{20}$	$x'_{20}$	Metoda całkowania
0	500	0	0	0	0	Ode45

W tabeli 3,  $A_{1 \text{ teor}}$  oznacza amplitudę układu podstawowego,  $A_{0 \text{ teor}}$  amplitudę układu podstawowego bez dołączonego eliminatora drgań. Są to wyniki otrzymane z metod analitycznych (są to wyniki z poprzedniego ćwiczenia laboratoryjnego).

Natomiast  $A_{1 \text{ num}}$  oraz  $A_{0 \text{ num}}$  oznaczają amplitudy drgań układu podstawowego z doczepionym eliminatorem oraz bez eliminatora drgań otrzymane z symulacji komputerowych po upływie czasu  $t_k$ . Oczywiście, symulację układu bez dołączonego eliminatora drgań wykonujemy na tym samym modelu wstawiając:  $b=0$ ,  $r=0$  oraz  $a'=1$  (mniejsze wartość bo  $k_2=0$ ). Symulacje wykonać dla zadanych częstości wymuszenia z zakresu z zakresu  $0 < \omega < 3$ .

**Tabela 3. Wyniki badań analitycznych.**

[illegible]

Sporządzić zależności (wykresy) amplitudy drgań układu podstawowego z eliminatorem w funkcji stosunku częstości wymuszania do częstości drgań własnych ( $\alpha$ ) (zestawić wyniki analityczne i numeryczne). Wykonać podobny wykresy dla układu bez eliminatora drgań.

## 5. OPRACOWANIE WYNIKÓW

Sprawozdanie powinno zawierać następujące informacje:

- oddzielną stronę tytułową;
- temat ćwiczenia;
- cel ćwiczenia;
- opis i schemat układu drgającego;
- model układu numerycznego (wydruk) wraz z krótkim opisem działania;
- tabelę z danymi (Tabela 1 i Tabela 2);
- tabelę z wynikami symulacji numerycznej (Tabela 3);
- porównanie wyników analitycznych i numerycznych. Dwa wykresy: krzywa rezonansowa z eliminatorem drgań (dwie krzywe: wynik analityczny i numeryczna weryfikacja) oraz krzywa rezonansowa bez eliminatora drgań (dwie krzywe: wynik analityczny i numeryczna weryfikacja);
- wnioski i uwagi;

### Bibliografia

1. Szabelski K. Zbiór zadań z drgań mechanicznych, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, 2002.
2. Kaliski S.: Drgania i fale. PWN, Warszawa 1966.
3. Parszewski Z.: Dynamika i drgania maszyn. WNT, Warszawa 1982.
4. Kapitaniak T.: Wstęp do teorii drgań, Wydawnictwo PŁ, Łódź 1992.
5. Den Hartog. Drgania mechaniczne, PWN, Warszawa 1971;
6. C. Cempel: Drgania mechaniczne. Wprowadzenie, skrypt PP Nr 1060 1982
7. Z. Osiński: Tłumienie drgań mechanicznych, PWN, Warszawa 1979; Rozdz. 6. Sztuczne tłumienie drgań.