



KATEDRA MECHANIKI STOSOWANEJ
Wydział Mechaniczny
POLITECHNIKA LUBELSKA

INSTRUKCJA DO ĆWICZENIA NR 2

PRZEDMIOT	MECHANIKA I FIZYKA CIAŁA STAŁEGO
TEMAT	<i>Badania analityczne układu mechanicznego o dwóch stopniach swobody.</i>
OPRACOWAŁ	dr inż. Krzysztof Kęcik

1. CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia są badania analityczne układu o dwóch stopniach swobody na przykładzie dynamicznego eliminatora drgań. Głównym celem jest wyznaczenie amplitudy drgań układu podstawowego oraz wytłumienie drgań o częstotliwości rezonansowej za pomocą dynamicznego tłumika drgań. Ponadto celem jest określenie zakresu częstotliwości wymuszenia, w którym tłumik skutecznie oddziałuje na układ drgający.

2. PODSTAWY TEORETYCZNE

Stopień swobody oznacza minimalną liczbę niezależnych zmiennych opisujących jednoznacznie stan (modelu) układu fizycznego. W praktyce stopień swobody określa liczbę niezależnych współrzędnych określających całkowicie położenie danego ciała.

Bardzo często, zmienne siły działające na maszyny lub ich zespoły mogą być przyczyną niebezpiecznych drgań, szczególnie intensywnych w pobliżu rezonansu. W celu uniknięcia niepożądanych drgań należy tak dobierać masę i sztywność elementów, by ich częstotliwości drgań własnych nie pokrywały się z częstotliwościami wymuszenia.

Czasami jednak uniknięcie pracy w pobliżu częstotliwości rezonansowych nie jest możliwe. W tych przypadkach należy stosować eliminatory drgań, których zadaniem jest całkowita eliminacja lub też ograniczenie drgań maszyny w przypadku, gdy pobudzana jest ona z pewną stałą częstotliwością.

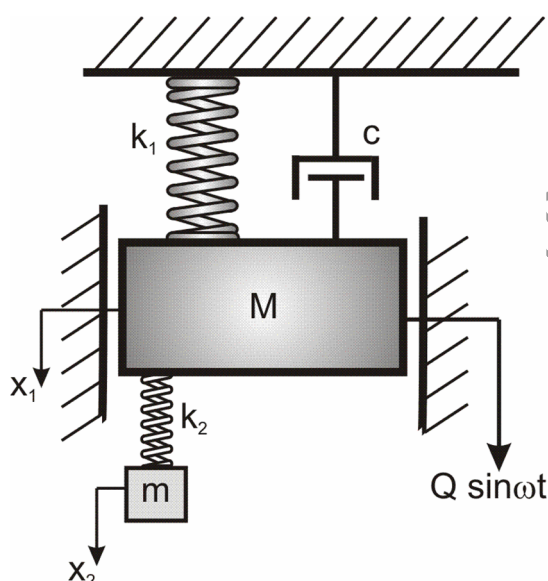
Eliminator drgań jest dodatkowym układem mechanicznym dołączonym do układu, którego drgania chcemy zmniejszyć. W zależności od rodzaju sprzężenia obu podukładów możemy wyróżnić rodzaje eliminatorów drgań:

- sztywne połączenie – zmiana masy układu chronionego,
- połączenie sprężysto – dyssypatywne - eliminator dynamiczny,
- połączenie dyssypatywne – eliminator wiskotyczny Newtona,
- połączenie cierne – eliminator cierny Lanchaster'a,
- połączenia krótkotrwałe - zderzenia – eliminator uderzeniowy.

Parametry eliminatora dynamicznego należy dobrać tak, aby częstość jego drgań własnych (ω_{0e}) była równa częstości siły wymuszającej (ω).

3. MODEL UKŁADU DRGAJĄCEGO

Rozpatrywany jest model układu drgającego składa się z układu podstawowego (ciała materialnego o masie M), zaczepionego na sprężynie o charakterystyce liniowej (stała k_1) i tłumika wiskotycznego o współczynniku c . Układ podstawowy jest wymuszany siłą harmoniczną $Q \cdot \sin \omega t$.



Rys. 1. Układ mechaniczny o dwóch stopniach swobody.

Do układu podstawowego doczepiono dynamiczny eliminator drgań o masie m . Stała sprężyny dynamicznego eliminatora wynosi k_2 . Równania różniczkowe ruchu masy głównej M i masy m tłumika dynamicznego mają następującą postać:

$$M\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2 = Q \sin \omega t, \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 - k_2x_2 + k_2x_1 = 0. \quad (2)$$

Po kilku przekształceniach matematycznych równania (1) i (2) sprowadzono do postaci:

$$\ddot{x}_1 + 2n\dot{x}_1 + ax_1 - bx_2 = q \sin \omega t, \quad (3)$$

$$\ddot{x}_2 + rx_2 - rx_1 = 0, \quad (4)$$

gdzie:

$$2n = \frac{c}{M}, \quad a = \frac{k_1 + k_2}{M}, \quad b = \frac{k_2}{M}, \quad q = \frac{Q}{M}, \quad r = \frac{k_2}{m}. \quad (5)$$

Równania (3) i (4) należy rozwiązać wstawiając rozwiązania szczególne, które mają postać:

$$x_1 = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t), \quad (6)$$

$$x_2 = C \sin(\omega t) + D \cos(\omega t), \quad (7)$$

gdzie A, B, C i D są zakładanymi amplitudami. W rozwiązaniach (6) i (7) pominięto rozwiązanie ogólne, z tego względu, że to rozwiązanie wykładniczo zanika. W równaniach (3) i (4) występują drugie pochodne współrzędnej x_1 i x_2 . Należy je wyznaczyć z równań (6) i (7).

Aby otrzymane równania były spełnione w każdej chwili czasu, muszą być spełnione równania powstałe przez przyrównanie składników obu stron obu otrzymanych równań, zawierających oddzielnie wyrazy z $\sin(\omega t)$ i $\cos(\omega t)$. naczniej mówiąc: grupujemy człony występujące przy $\sin(\omega t)$ i $\cos(\omega t)$ dla pierwszego równania (otrzymujemy 2 równania algebraiczne), oraz człony występujące przy $\sin(\omega t)$ i $\cos(\omega t)$ dla drugiego równania:

$$\begin{aligned} \sin(\omega t) [A(a_{11}) + B(a_{12}) + C(a_{13}) + D(a_{14})] &= q, \\ \cos(\omega t) [A(a_{21}) + B(a_{22}) + C(a_{23}) + D(a_{24})] &= 0, \\ \sin(\omega t) [A(a_{31}) + B(a_{32}) + C(a_{33}) + D(a_{34})] &= 0, \\ \cos(\omega t) [A(a_{41}) + B(a_{42}) + C(a_{43}) + D(a_{44})] &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

gdzie współczynniki $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{44}$ są wyrażeniami stojącymi przy amplitudach A, B, C i D.

Aby otrzymane równania algebraiczne (8) były spełnione w każdej chwili czasu, wyrażenia w nawiasach są równe zeru, czyli:

$$\begin{aligned} A(a_{11}) + B(a_{12}) + C(a_{13}) + D(a_{14}) &= q \\ A(a_{21}) + B(a_{22}) + C(a_{23}) + D(a_{24}) &= 0, \\ A(a_{31}) + B(a_{32}) + C(a_{33}) + D(a_{34}) &= 0, \\ A(a_{41}) + B(a_{42}) + C(a_{43}) + D(a_{44}) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Do wyznaczenia wartości amplitud przemieszczeń A oraz B oblicza się wyznacznik główny układu (W) równań algebraicznych (9). Wyznacznik **W** wyliczmy z zależności:

$$W = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Następnie stosując wzory Cramera oblicza się wyznaczniki (**W_A** i **W_B**). Wyznaczniki W_A i W_B są to wyznaczniki, w których wstawiono prawą stronę równania (9) w miejsce członów występujących z amplitudami A i B:

$$W_A = \begin{vmatrix} q & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad W_B = \begin{vmatrix} a_{11} & q & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Przy prawidłowych obliczeniach człony: a_{14} , a_{23} , a_{32} , a_{34} , a_{41} i a_{43} powinny wyjść zero.

Amplitudy składowych drgań masy głównej M określają wzory:

$$A = \frac{W_A}{W}, \quad B = \frac{W_B}{W}. \quad (12)$$

Należy zaznaczyć, że wiele wyrazów w wyznacznikach (10) i (11) równa się zero,

Amplitudę drgań masy układu głównego otrzymuje się sumując geometrycznie stałe A i B

$$A_1 = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{\sqrt{W_A^2 + W_B^2}}{W}. \quad (13)$$

Kąt przesunięcia fazowego w układzie głównym między wymuszeniem a ruchem masy możemy wyznaczyć z zależności

$$\varphi_1 = \arctan \frac{B}{A}. \quad (14)$$

Częstość drgań własnych układu podstawowego bez doczepionego dynamicznego eliminatora drgań można wyznaczyć z zależności ($k_2=0$)

$$\omega_0^2 = \frac{k_1}{M} = a'. \quad (15)$$

Natomiast częstość drgań własnych eliminatora wynosi

$$\omega_{0e}^2 = \frac{k_2}{m} = b. \quad (16)$$

Amplitudę drgań wymuszonych układu bez doczepionego eliminatora drgań można wyliczyć z klasycznej zależności:

$$A_0 = \frac{q}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} \quad (17)$$

określający amplitudę drgań układu liniowego o jednym stopniu swobody.

4. PRZEBIEG ĆWICZENIA

W sprawozdaniu przedstawić wyprowadzenie wzorów na amplitudy drgań A_1 i A_0 . Dla danych podanych w Tabeli 1, wyznaczyć amplitudy drgań masy układu podstawowego A_1 . Wyznaczyć również, amplitudę drgań w przypadku braku dynamicznego tłumika – A_0 , φ_1 , wówczas mamy klasyczny układ o jednym stopniu swobody wymuszonych drgań tłumionych. Obliczenia wykonać dla zadanych częstości wymuszeń z zakresu $0 < \omega < 3$.

Uwaga: aby analizowane zagadnienie miało sens fizyczny przy wyliczeniu amplitudy A_1 należy przyjąć wartość bezwzględną $|r - \omega^2|$. Wartość ta powinna pojawić się w liczniku końcowej formy na amplitudę A_1 . W celu ułatwienia obliczeń można wykorzystać programy

Matlab, Mathematica lub MathCad. Zachować wyniki z Tabeli 2, gdyż będą one weryfikowane numerycznie w jednym z następnych ćwiczeń.

Tabela 1. Dane do obliczeń.

	Dane do badań analitycznych				
n	a	a'	b	r	q
0.125	2	1	1	1	1

Tabela 2. Wyniki badań analitycznych.

[illegible]

Sporządzić zależność amplitud układu podstawowego w przypadku dołączonego tłumika drgań (amplituda A_1) i bez tłumika amplituda (A_0) w funkcji stosunku częstości wymuszania do częstości drgań własnych

$$\alpha = \frac{\omega}{\omega_{0\text{e}}} . \quad (18)$$

Na wykresie odszukać obszar korzystnego oddziaływania tłumika.

5. OPRACOWANIE WYNIKÓW

Sprawozdanie powinno zawierać następujące informacje:

- oddzielną stronę tytułową;
- temat ćwiczenia;
- cel ćwiczenia;
- opis i schemat układu drgającego;
- równania różniczkowe układu drgającego,
- dokładne wyprowadzenie zależności na amplitudę A_1 ;
- wyprowadzenie zależności na amplitudę A_0 ;
- tabelę z danymi;
- tabelę z wynikami obliczeń oraz przykładowe obliczenia;
- nałożyć na siebie wykresy: $A_1=f(\alpha)$ i $A_0=f(\alpha)$;
- zaznaczyć na wykresie obszar korzystnego oddziaływania tłumika;
- wnioski i uwagi;

Bibliografia

1. Szabelski K. Zbiór zadań z drgań mechanicznych, Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, 2002.
2. Kaliski S.: Drgania i fale. PWN, Warszawa 1966.
3. Parszewski Z.: Dynamika i drgania maszyn, WNT, Warszawa 1982.
4. Kapitaniak T.: Wstęp do teorii drgań, Wydawnictwo PŁ, Łódź 1992.
5. Den Hartog: Drgania mechaniczne, PWN, Warszawa 1971;
6. C. Cempel: Drgania mechaniczne. Wprowadzenie, skrypt PP Nr 1060 1982
7. Z. Osiński: Tłumienie drgań mechanicznych, PWN, Warszawa 1979; Rozdz. 6. Sztuczne tłumienie drgań.