



INSTRUKCJA DO ĆWICZENIA NR 1

PRZEDMIOT	MECHANIKA I FIZYKA CIAŁA STAŁEGO
TEMAT	Badania analityczne układu mechanicznego o jednym stopniu swobody
OPRACOWAŁ	Dr inż. Rafał Rusinek

1. CEL ĆWICZENIA

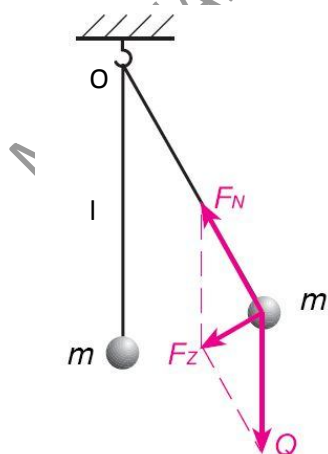
Celem ćwiczenia jest obliczenie metodą analityczną okresu drgań własnych wahadła fizycznego (pierścienia), wyznaczenie równania ruchu i oszacowanie wpływu nieliniowości na okres drgań wahadła.

2. PODSTAWY TEORETYCZNE

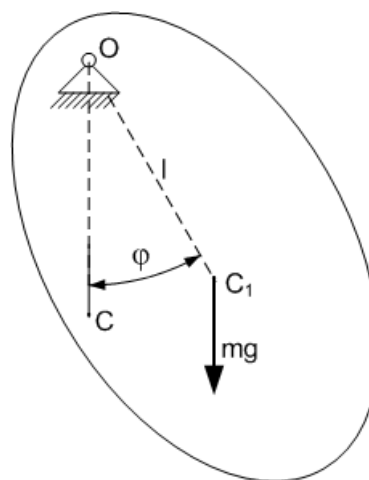
wykonujące w pionowej płaszczyźnie drgania pod wpływem siły grawitacji. W teorii mechaniki rozróżnia się dwa podstawowe rodzaje wahadeł:

- matematyczne (Rys. 1a)
- fizyczne (Rys. 1b)

a)



b)



Rys. 1 Wahadło matematyczne (a) i fizyczne (b)

Wahadłem matematycznym (Rys. 1a) jest punkt materialny zawieszony na nierozciągliwej i nieważkiej nici. Jest to idealizacja wahadła fizycznego. Natomiast, wahadłem fizycznym (Rys. 1b) jest bryła sztywna, która może wykonywać obroty dookoła poziomej osi przechodzącej ponad środkiem ciężkości tej bryły. Ważną cechą wahadła fizycznego i matematycznego jest niezależność okresu drgań od maksymalnego wychylenia, czyli amplitudy. Zależność taka jest jednak spełniona tylko dla niewielkich wychyleń wahadła, gdyż wówczas równanie ruchu może zostać przedstawione, z wystarczająco dobrym przybliżeniem, za pomocą liniowego równania różniczkowego. Zarówno ruch wahadła matematycznego jak i fizycznego opisuje ta sama klasa równań różniczkowych II rzędu ze stałymi współczynnikami. Wyprowadzenie równania ruchu opiera się na II zasadzie dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego względem nieruchomego punktu (C) zawieszenia wahadła:

$$I_C \varepsilon = \sum_{i=0}^n M_i \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon = \ddot{\varphi} \quad (1)$$

Jedyną siłą zewnętrzną działającą na wahadło jest siła ciężkości Q . Oprócz niej są też reakcje więzów, które jednak nie dają momentów względem punktu podparcia (zawieszenia, C). Równanie II zasady dynamiki przybiera postać:

$$I_C \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

po przekształceniu otrzymano:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I_C} \sin \varphi = 0 \quad (3)$$

Równanie (3) jest nieliniowym równaniem różniczkowym jednorodnym II rzędu. Rozwiązanie równań tego typu nie jest rzeczą prostą i wymaga użycia metod przybliżonych, dlatego w ćwiczeniu skupiono się na rozwiązywaniu uproszczonego, liniowego równania, które otrzymuje się przy założeniu, że amplituda drgań wahadła jest niewielka. Wówczas $\sin \varphi \approx \varphi$ i nieliniowe równanie (3) przybiera postać równania liniowego:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I_C} \varphi = 0 \quad (4)$$

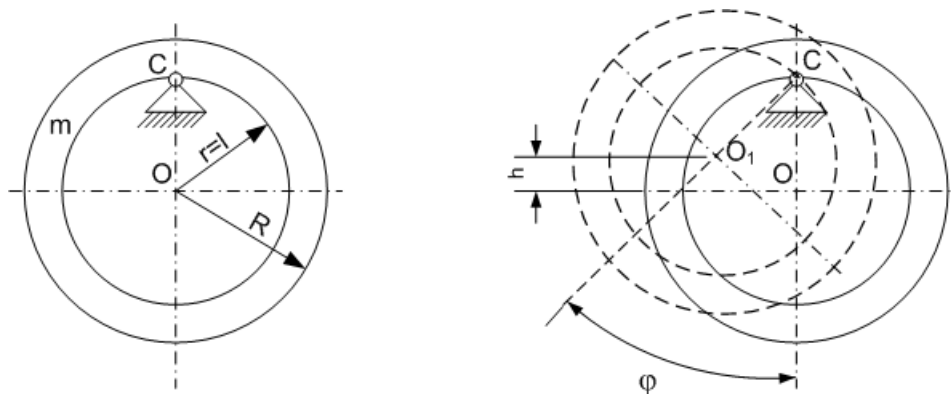
Wyrażenie $\frac{mgl}{I_C}$ występujące zarówno w równaniach (3) i (4) oznaczono jako ω_0^2 . Jest ono

kwadratem częstości drgań własnych wahadła w ujęciu liniowym (3):

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I_C} \quad (5)$$

W ćwiczeniu badane jest wahadło fizyczne, które reprezentuje pierścień pokazany na Rys. 2. Wówczas, masowy moment bezwładności I_C obliczymy korzystając z addytywności momentów oraz twierdzenia Steinera. Moment bezwładności pierścienia względem środka masy I_C można wyznaczyć, jako różnicę momentu pełnego krążka o promieniu R i otworu, czyli krążka o promieniu r :

$$I_o = I_R - I_r \quad (6)$$



Rys. 2 Wahadło fizyczne w kształcie pierścienia

Masowe momenty bezwładności I_R i I_r wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} I_R &= \frac{M_R R^2}{2} \\ I_r &= \frac{M_r r^2}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie, M_R i M_r są masami krążków o promieniach R i r . Zakładając, że gęstość materiału pierścienia wynosi ρ , a jego grubość h , masy krążków M_R i M_r wyrażono zależnościami:

$$\begin{aligned} M_R &= \rho h \pi R^2 \\ M_r &= \rho h \pi r^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Zaś masa analizowanego pierścienia wynosi:

$$m = M_R - M_r = \rho h \pi (R^2 - r^2) \quad (9)$$

Po uwzględnieniu równań (6) i (7), moment bezwładności pierścienia względem bieguna O (środka masy) jest równy:

$$I_o = \frac{1}{2} \rho h \pi (R^4 - r^4) = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2) \quad (10)$$

Stosując twierdzenie Steinera obliczymy masowy moment bezwładności względem punktu zamocowania wahadła (C):

$$I_c = I_o + m r^2 \quad (11)$$

Podstawiając zależność (9) do równania (11) otrzymujemy:

$$I_c = \rho h \pi \left(\frac{1}{2} R^4 + R^2 r^2 - \frac{3}{2} r^4 \right) \quad (12)$$

lub w innej, prostszej formie:

$$I_c = \frac{m}{2} (R^2 - 3r^2) \quad (13)$$

Podejście uproszczone, liniowe

Przy założeniu małych wychyleń otrzymano równanie (4), którego rozwiązanie ogólne zakładamy w postaci drgań harmoniczych z częstotliwością własną ω_0 :

$$\varphi = \varphi(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (14)$$

Wyznaczenie stałych A i B jest możliwe z warunków początkowy, które zapisano w postaci:

$$\begin{aligned}\varphi(t_o = 0) &= \varphi_o \\ \dot{\varphi}(t_o = 0) &= 0\end{aligned}\tag{15}$$

Obliczając pochodną kąta φ otrzymano:

$$\dot{\varphi}(t) = -A\omega_o \sin \omega_o t + B\omega_o \cos \omega_o t\tag{16}$$

Wstawiając drugi warunek początkowy do równania (16) wyznaczono $B=0$, zaś z pierwszego warunku ($\varphi(0)$) otrzymano $A=\varphi_o$. Dlatego przy zadanym zerowym drugim warunku początkowym kinematyczne równanie ruchu wahadła fizycznego przybiera postać:

$$\varphi(t) = \varphi_o \cos \omega_o t\tag{17}$$

Częstość drgań własnych opisana równaniem (5) jest stała, niezależna od amplitudy. Natomiast okres drgań własnych w ujęciu liniowym (przybliżonym) wynosi:

$$T_l = \frac{2\pi}{\omega_o}\tag{18}$$

Pomijając opory powietrza i inne opory ruchu wahadła (tarcie w punkcie podparcia) spełniona jest zasada zachowania energii mechanicznej, a więc suma energii kinetycznej (T) i potencjalnej (V) jest stała:

$$T + V = const\tag{19}$$

Wahadło w swoim maksymalnym górnym położeniu posiada maksymalną energię potencjalną (V_{max}) i minimalną energię kinetyczną $T=0$, zaś w położeniu dolnym $V=0$ i $T=T_{max}$ stąd wniosek, że:

$$V_{max} = T_{max}\tag{20}$$

Jest to tzw. zasada Rayleigh'a, która również pozwala na wyznaczenie częstości drgań własnych układu liniowego zachowawczego (bez strat energii). W naszym ćwiczeniu zasada ta posłuży do obliczenia maksymalnej prędkości kątowej wahadła ω_{max} , która występuje w położeniu pionowym, gdy energia kinetyczna jest największa:

$$T_{max} = \frac{1}{2} I_c \omega_{max}^2\tag{21}$$

Skoro energia potencjalna i kinetyczna zmieniają się nieustannie podczas ruchu wahadła od wartości minimalnej (zerowej) do maksymalnej to musi istnieć takie położenie określone kątem $\varphi_e(t)$, dla którego energia potencjalna i kinetyczna są sobie równe $T=V$. Energia potencjalna (V) i kinetyczna (T) wahadła w dowolnym położeniu wynoszą

$$\begin{aligned}V &= mgh = mgl(1 - \cos \varphi) \\ T &= \frac{1}{2} I_c \dot{\varphi}^2\end{aligned}\tag{22}$$

Rozwijając $\cos \varphi$ w szereg Maclaurina podstawiamy:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{1}{2} \varphi^2\tag{23}$$

i otrzymujemy zależność na energię potencjalną w postaci:

$$V = \frac{1}{2} mgl \varphi^2\tag{24}$$

Energię kinetyczną (T) trzeba również wyrazić jako funkcję kąta φ , dlatego do równania (22) wstawiono rozwiązanie (16), pamiętając, że przy założonych warunkach początkowych $B=0$ i $A=\varphi_o$, wówczas otrzymano:

$$T = \frac{1}{2} I_c \varphi_o^2 \omega_o^2 \sin^2 \omega_o t = \frac{1}{2} I_c \varphi_o^2 \omega_o^2 (1 - \cos^2 \omega_o t) \quad (25)$$

Wyrażenie $\cos \omega_o t$ można wyznaczyć z równania (17), wtedy energia kinetyczna wyraża się zależnością:

$$T = \frac{1}{2} I_c \varphi_o^2 \omega_o^2 \left(1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_o^2} \right) \quad (26)$$

Przyrównując energię kinetyczną (26) i potencjalną (24) do siebie ($T=V$) otrzymano:

$$\frac{1}{2} mgl \varphi^2 = \frac{1}{2} I_c \varphi_o^2 \omega_o^2 \left(1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_o^2} \right) \quad (27)$$

Stąd wyznaczono położenie wahadła φ_e , w którym energia kinetyczna i potencjalna są sobie równe:

$$\varphi_e^2 = \frac{I_c \varphi_o^2 \omega_o^2}{mgl + I_c \omega_o^2} \quad (28)$$

Rozwiązanie ścisłe, nieliniowe

Jeśli drgania wahadła nie są wystarczająco małe ($\varphi > 5^\circ$), założenie $\sin \varphi \approx \varphi$ nie jest wystarczająco dokładne, Popelniany błąd obliczeń zwiększa się wraz z kątem φ . W tej sytuacji należy rozwiązać równanie nieliniowe (3), co wymaga wprowadzenia eliptycznej funkcji Jacobiego oznaczonej jako $\text{sn}(\cdot, \cdot)$. Wówczas ścisłe kinematyczne równanie ruchu opisane jest zależnością:

$$\varphi(t) = 2 \arcsin \left(\sin \frac{\varphi_o}{2} \text{sn} \left[(\omega_o(t-t_o); \sin \frac{\varphi_o}{2}) \right] \right) \quad (29)$$

gdzie, t_o jest czasem, dla którego wahadło zajmuje położenie pionowe ($\varphi=0$). Obliczenie dokładnego okresu drgań wahadła wymaga wprowadzenia eliptycznej całki zupełnej I rodzaju, co w konsekwencji prowadzi do nieskończonego szeregu w postaci:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_o} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\varphi_o}{2} \right) \quad (30)$$

Rozwijając ten szereg do trzech pierwszych wyrazów otrzymano:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_o} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_o}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_o}{2} + \frac{25}{256} \sin^6 \frac{\varphi_o}{2} \right) \quad (31)$$

Ta zależność posłuży w ćwiczeniu do wyznaczenia ścisłego okresu drgań wahadła fizycznego pokazanego na Rys. 2

Długość zastępcza wahadła

Jak wykazano wcześniej różniczkowe równanie ruchu wahadła matematycznego i fizycznego jest tej samej klasy i różni się tylko stałą (w ujęciu liniowym), a więc częstością drgań własnych ω_o . W przypadku wahadła matematycznego $I_c = ml^2$, dlatego częstość drgań własnych tego wahadła oznaczona jako ω_{om} wynosi:

$$\omega_{om}^2 = \frac{g}{l} \quad (32)$$

Przyrównując ją do częstości drgań rozważanego w niniejszym ćwiczeniu wahadła fizycznego można wyznaczyć tzw. długość zastępczą l_z (zwaną też zredukowaną), tzn. taką, jaką musiałoby mieć wahadło matematyczne, aby częstość jego drgań własnych była taka sama jak częstość drgań wahadła fizycznego.

3. SCHEMAT I OPIS STANOWISKA

Badanie doświadczalne należy wykonać na pierścieniu (wahadle fizycznym) zgodnie ze schematem przedstawionym na Rys. 2. Sugeruje się, aby wykresy sporządzić za pomocą dostępnego oprogramowania (Matlab, Mathematica, Excel).

4. PRZEBIEG ĆWICZENIA

1. Wykonać około 6-u pomiarów okresu drgań wahadła fizycznego dla wychyleń (warunków początkowych) $0 < \varphi_0 < \pi/3$. Aby zmniejszyć ryzyko niedokładności należy zmierzyć czas min. 10 wahan. Wyniki zanotować w tabeli 1.
2. Dla zadanych przez prowadzącego warunków początkowych wyznaczyć przybliżone kinematyczne równanie ruchu wahadła oraz okres drgań własnych (w ujęciu liniowym)
3. Wyznaczyć dokładny okres drgań własnych (w ujęciu nieliniowym) z równania (31) w zakresie $0 < \varphi_0 < \pi/3$.
4. Wykreślić na jednym wykresie krzywą teoretyczną zależności okresu drgań od amplitudy φ_0 (warunku początkowego) w wariacie liniowym i nieliniowym oraz krzywą doświadczalną z wyników uzyskanych w pkt.1.
5. Obliczyć maksymalną prędkość kątową wahadła dla minimum 6-u wychyleń. Wyniki przedstawić na wykresie.
6. Wyznaczyć położenie wahadła fizycznego φ_e , dla którego energia potencjalna i kinetyczna są sobie równe. Przedyskutować wpływ promienia pierścienia na kąt φ_e .
7. Wyznaczyć zredukowaną długość wahadła matematycznego, jako ekwiwalent wahadła fizycznego

5. OPRACOWANIE WYNIKÓW

Po wykonaniu eksperymentu i przeprowadzeniu obliczeń analitycznych wyniki należy przeprowadzić rachunek błędów i oszacować różnicę pomiędzy okresem drgań w ujęciu liniowym T_l , nieliniowym T_n oraz doświadczalnym T_d .

Tab. 1 Tabela danych i wyników pomiarów

Tabela pomiarów i wyników obliczeń									
R [m]		r [m]		h [mm]		l_z [m]		l_z [mm]	
Wyniki obliczeń									
φ [stopnie]	$\dot{\varphi}$ [rad/s]	T_d [s]	T_l (liniowe) [s]	T_n (nieliniowe) [s]		ω_{max} [rad/s]	φ_e [rad/s]	φ_e [stopnie]	
10									
20									
30									
40									
50									
60									

6. SPRAWOZDANIE

Sprawozdanie z ćwiczenia powinno zawierać:

1. Tabelkę identyfikacyjną
2. Cel ćwiczenia
3. Schemat stanowiska
4. Tabelę pomiarów i wyników
5. Obliczenia i wykresy (preferowany software: Matlab, Mathematica lub Excel)
6. Rachunek błędów
7. Wnioski.

Literatura:

1. Szabelski K.: Zbiór zadań z drgań mechanicznych. Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej.
2. Osiński Z.: Teoria drgań. PWN 1980
3. Simpson D.G.: The nonlinear pendulum. <http://www.pgccphy.net/ref/nonlin-pendulum.pdf>
4. Leyko J.: Mechanika ogólna, t.2 PWN, Warszawa 1996