



KATEDRA MECHANIKI STOSOWANEJ  
Wydział Mechaniczny  
POLITECHNIKA LUBELSKA

## INSTRUKCJA DO ĆWICZENIA NR 21

PRZEDMIOT	MECHANIKA TECHNICZNA
TEMAT	<i>Analiza płaskiego dowolnego układu sił</i>
OPRACOWAŁ	Dr hab. inż. Krzysztof Kęcik

### 1. CEL ĆWICZENIA

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z płaskim dowolnym układem sił oraz zastosowaniem jego warunków równowagi do wyznaczenia kątów wychylenia podwójnego wahadła pod wpływem przyłożonej znanej siły o kierunku poziomym.

### 2. PODSTAWY TEORETYCZNE

#### 2.1 Uwalnianie od więzów

*Statyka* jest działem mechaniki zajmującym równowagą układów sił działających na bryłę sztywną. *Bryłą sztywną* (ciałem sztywnym) będziemy nazywać takie ciało materialne, w którym wzajemne odległości cząstek nie ulegają zmianie, jest to zatem ciało nieodkształcalne (na wytrzymałości materiałów są analizowane ciała odkształcalne).

*Ciałem swobodnym* definiujemy jako ciało, które ma nieograniczoną swobodę ruchu. Zwykle w praktyce ciało materialne nie może zajmować dowolnego miejsca w przestrzeni lub poruszać się dowolnie ze względu na obecność innych ciał sztywnych, które wymuszają konkretne położenie lub ruch. Ciało takie jest nazywane *ciałem nieswobodnym*, a ograniczenie jego swobody nazywamy *więzami*. Węzami nazywamy warunki, które nakładają pewne ograniczenia na ruch ciała lub jego położenie w przestrzeni. Ograniczenia ruchu ciała dotyczące prędkości, przyspieszenia są nazywane *więzami kinematycznymi*. Natomiast, ograniczenia dotyczące położenia ciała są nazywane *więzami geometrycznymi*. W mechanice (w dziale statyka) mamy do czynienia z więzami geometrycznymi.

Więzy, które wynikają z bezpośredniego kontaktu danego ciała z powierzchniami innych ciał, nazywamy *podporami*. Siły, z którymi więzy (podpory) oddziałują na dane ciało w miejscu styku, nazywamy reakcjami więzów (podpór). Reakcje więzów będziemy nazywać *siłami biernymi*, a siły obciążające ciało *siłami czynnymi* (np. siły zewnętrzne, siły ciężkości).

Zastępowanie działania więzów na rozpatrywane ciało odpowiednimi siłami reakcji nazywamy **uwalnianiem od więzów**. Zasadę uwalniania od więzów jest następująca:

*„Każde ciało sztywne można myślowo uwolnić od więzów, jeżeli zastąpi się działanie więzów odpowiednimi reakcjami, a następnie rozpatrywać je jako ciało swobodne znajdujące się pod działaniem sił czynnych i reakcji więzów (sił biernych)”.*

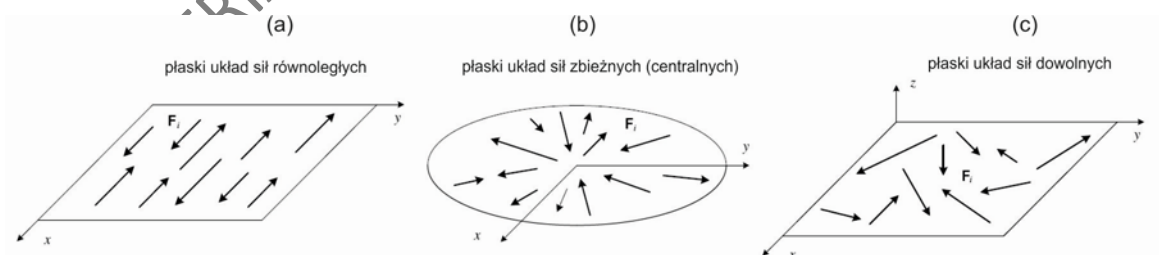
## 2.2 Płaski dowolny układ sił i jego warunki równowagi

Zbiór dowolnej liczby sił jednocześnie działających na ciało nazywamy układem sił. W zależności od położenia linii działania układy te możemy podzielić na dwa rodzaje:

- układy płaskie,
- układy przestrzenne.

Układ płaski odznacza się tym, że wszystkie siły tworzące ten układ leżą w jednej płaszczyźnie. Układy te możemy podzielić na:

- układy płaskie-zbieżne (centralne),
- układy płaskie równoległe,
- układy płaskie dowolne.



**Rysunek 1.** Przykłady płaskich układów sił.

Układem płaskim zbieżnym nazywamy zbiór sił działających w jednej płaszczyźnie, których linię działania przecinają się w jednym punkcie (Rys. 1b). Układem płaskim równoległym nazywamy zbiór sił działających w jednej płaszczyźnie, których linie działania są do siebie równoległe (Rys. 1a).

Szczególnym przypadkiem układu płaskiego równoległego są siły działające wzdłuż jednej wspólnej prostej. Układ płaskim dowolny jest zbiorem sił w jednej płaszczyźnie o różnych kierunkach działania (Rys. 1c) i nieprzecinających się w jednym punkcie.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi płaskiego dowolnego układu sił jest zerowanie się sum rzutów sił na dwie nierównoległe osie (np. prostopadłe osie w układzie prostokątnym  $x, y$ ), leżące w płaszczyźnie działania sił oraz zerowanie się sumy momentów tych sił względem dowolnie obranego punktu  $O$ , leżącego na tej płaszczyźnie. Rozpatrując płaski dowolny układ sił możemy mieć co najwyżej trzy niewiadome i matematycznie sprowadza się to do trzech równań:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{iO} = 0. \quad (1)$$

Punkt  $O$ , względem którego obliczamy sumę momentów sił, nie musi być początkiem przyjętego układu współrzędnych, lecz może być punktem dowolnie obranym punktem. Po uwzględnieniu powyższej uwagi równaniom równowagi równanie (1) można nadać taką treść:

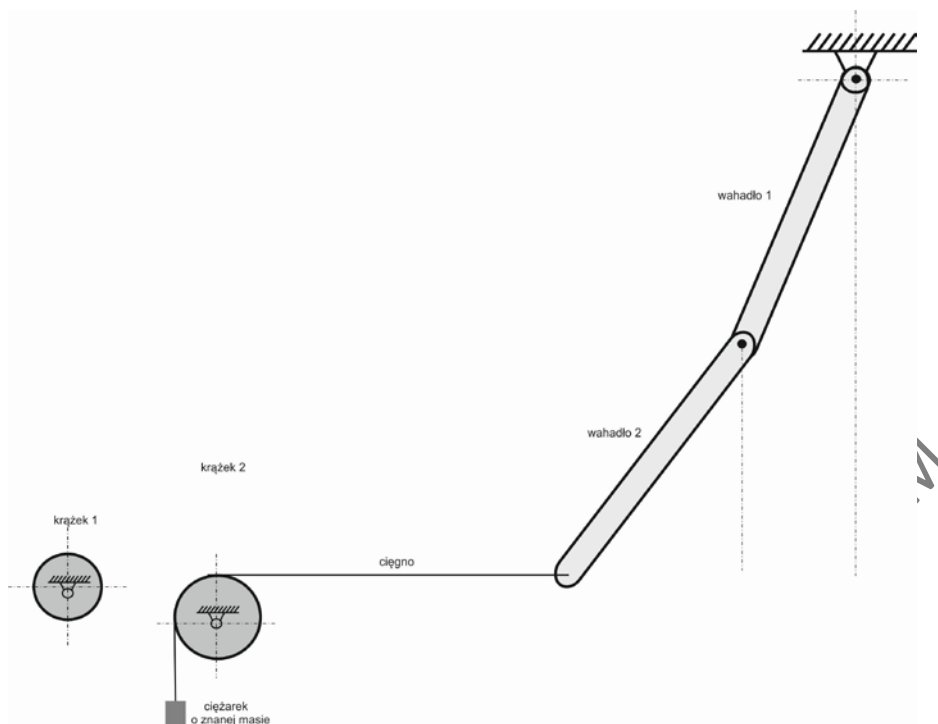
*Aby płaski dowolny układ sił był w równowadze, sumy rzutów wszystkich sił na dwie osie układu współrzędnych i suma momentów tych sił względem dowolnego punktu płaszczyzny działania sił muszą być równe zeru.*

Można wykazać, że zamiast warunków równowagi w postaci dwóch równań rzutów sił i jednego równania momentów (Równanie 1) można zastosować albo dwa równania momentów względem dwóch różnych punktów  $A$  i  $B$  oraz jedno równanie rzutów sił, albo trzy równania momentów względem trzech różnych punktów  $A$ ,  $B$  i  $C$ .

### 3. STANOWISKO BADAWCZE - PODWÓJNE WAHADŁO

#### 3.1 Schemat stanowiska badawczego

Stanowisko badawcze zostało przedstawione schematycznie na rysunku 2. Składa się ono z dwóch wahadeł fizycznych (jest to tzw. podwójne wahadło) wykonanych z w postaci jednorodnych prętów połączonych ze sobą przegubowo i zawieszonych w pkt  $A$ . Pręty mają odpowiednio długości równe  $l_1$  i  $l_2$  i masy  $m_1$  i  $m_2$ . Do końca dolnego wahadła (wahadło 2) przyłożono poziomą siłę. Poziomą siłę jest przyłożona za pomocą układu tarcza-ciężno, poprzez zawieszenie na końcu ciężnika o znanej masie (odpowiednio dobranej).

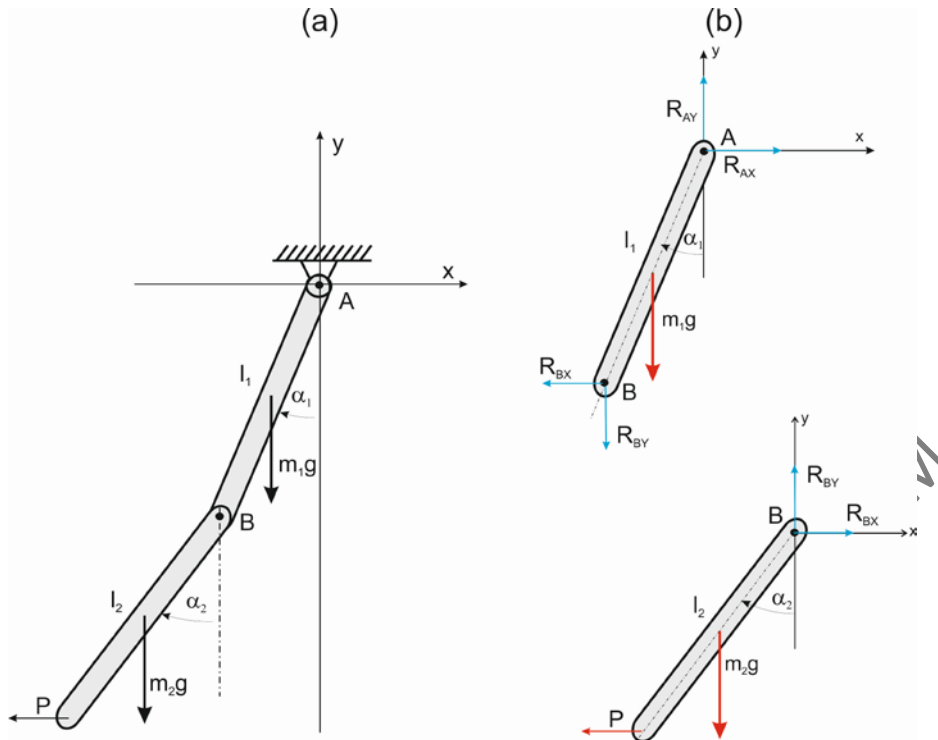


**Rysunek 2.** Schemat stanowiska badawczego.

Zawieszony ciężarek o znanym ciężarze  $Q$  na linie powoduje, że oba wahadła fizyczne wychylą się z położenia równowagi (każde z wahań pod innym kątem). Głównym celem ćwiczenia jest ustalenie teoretyczne i eksperymentalna weryfikacja kąta wychyleń obu wahań od pionu.

### 3.2 Uwolnienie od więzów

Układ wahań został uwolniony od więzów, co zaprezentowano na rysunku 3. Reakcje oznaczono kolorem niebieskim, a siły czynne kolorem czerwonym. Po uwolnieniu od więzów mamy dwa oddzielne płaskie układy sił dowolnych. Należy pamiętać, że w miejscu połączenia obu wahań reakcje mają te same wartości, te same kierunki lecz przeciwne zwroty (reakcje w miejscu połączenia wahań muszą się zerować). Każdy z tych układów możemy potraktować osobno i napisać do niego warunki równowagi dla płaskiego dowolnego układu sił.



**Rysunek 3.** Schemat podwójnego wahadła (a) oraz jego uwolnienie od więzów (b).

Korzystając z warunków równowagi dla płaskiego dowolnego układu sił dla wahadła dolnego otrzymano równania opisujące położenie równowagi po wychyleniu wahadeł:

$$\sum P_{ix} : -P + R_{BX} = 0, \Rightarrow R_{BX} = P, \quad (2)$$

$$\sum P_{iy} : -m_2g + R_{BY} = 0, \quad R_{BY} = m_2g, \quad (3)$$

$$\sum M_B : m_2g \frac{l_2}{2} \sin \alpha_2 - Pl_2 \cos \alpha_2 = 0, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{2P}{m_2g}. \quad (4)$$

Z powyższych równań możemy wyznaczyć reakcję w przegubie oraz kąt odchylenia wahadła dolnego. Podobnie postępujemy z wahadłem pierwszym

$$\sum P_{ix} : R_{AX} - R_{BX} = 0, \Rightarrow R_{AX} = R_{BX} = P, \quad (5)$$

$$\sum P_{iy} : -m_1g - R_{BY} + R_{AY} = 0, \Rightarrow R_{AY} = R_{BY} + m_1g = g(m_1 + m_2), \quad (6)$$

$$\sum M_A : m_1g \frac{l_1}{2} \sin \alpha_1 - R_{BX}l_1 \cos \alpha_1 + R_{BY}l_1 \sin \alpha_1 = 0, \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{P}{\left(\frac{1}{2}m_1g + m_2g\right)}. \quad (7)$$

Należy zauważyć, że w celu oszacowania odchylenia wahadła pierwszego wystarczy wykorzystać tylko równanie momentów. Dwa pozostałe warunki równowagi pozwalają nam wyznaczyć reakcję w miejscu zawieszenia podwójnego wahadła.

W celu oszacowania masy wahań (w przypadku jej nieznajomości) można wykorzystać zależność pomiędzy gęstością a objętością (zakładamy że znamy materiał z którego są wykonane wahadła). Gęstość (masa właściwa) – jest to stosunek masy pewnej ilości substancji do zajmowanej przez nią objętości. W przypadku substancji jednorodnych porcja ta może być wybrana dowolnie. Jeśli jej objętość wynosi  $V$  a masa  $m$ , to gęstość wynosi

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad (8)$$

i nie zależy od wyboru próbki.

#### 4. PRZEBIEG ĆWICZENIA

1. Dokonać pomiarów długości oraz wymiarów poprzecznych obu wahań (w kilku miejscach, do dalszych obliczeń przyjąć wartości średnie).
2. Wyznaczyć masę dla obu wahań (gęstość materiału zostanie podana przez prowadzącego zajęcia), wzór (8). Gęstość materiału pręta wynosi  $\rho = 2720 \text{ kg/m} = 2720 \text{ kg/m}^3$ .
3. Trzykrotnie pomierzyć kąty przy założeniu ciężarka  $P_1 = Q_1$ . Wyniki zanotować w tabeli 2.
4. Trzykrotnie pomierzyć kąty przy założeniu ciężarka  $P_2 = Q_2$ . Wyniki zanotować w tabeli 2.
5. Trzykrotnie pomierzyć kąty przy założeniu ciężarka  $P_3 = Q_3$ . Wyniki zanotować w tabeli 2.
6. Obliczyć wartości kątów z zależności (4 i 7) dla  $P_1 = Q_1$ ,  $P_2 = Q_2$  i  $P_3 = Q_3$ .
7. Wyniki doświadczalne pomiarów kątów porównać z wartościami wyznaczonymi teoretycznie.
8. Wyznaczyć reakcje w przegubie wahań oraz w miejscu zawieszenia wahań (z zależności (2-3) oraz (5-6)).
9. Wyniki pomiarów i obliczeń zamieścić w tabelach 2 i 3.
10. Oszacować wielkość błędu jedną ze znanych metod.

*Uwaga: Wahadła powinny być wychylone w jednej płaszczyźnie. Ciężary  $Q$  powinny być tak dobrane aby zapewnić kierunek poziomy siły przyłożonej do wahań.*

Tabela 1. Wielkości pomiarowe

Nr wahadła	Długość wahadła	Szerokość wahadła	Grubość wahadła	Objętość wahadła	Gęstość wahadła	Masa wahadła
wahadło 1	$l_1[\text{m}]$	$a_1[\text{m}]$	$b_1[\text{m}]$	$V_1[\text{m}^3]$	$\rho_1[\text{kg/m}^3]$	$m_1[\text{kg}]$
wahadło 2	$l_2[\text{m}]$	$a_2[\text{m}]$	$b_2[\text{m}]$	$V_2[\text{m}^3]$	$\rho_2[\text{kg/m}^3]$	$m_2[\text{kg}]$

Tabela 2. Wyniki obliczeń i pomiarów

	Pomiar 1	Pomiar 2	Pomiar 3	Srednia wartość	Pomiar 1	Pomiar 2	Pomiar 3	Srednia wartość
Obciążenie	Wahadło 1				Wahadło 2			
$Q_I [\text{N}]$	$\alpha_{1,1} [^\circ]$	$\alpha_{1,2} [^\circ]$	$\alpha_{1,3} [^\circ]$	$\alpha_{1sr} [^\circ]$	$\alpha_{2,1} [^\circ]$	$\alpha_{2,2} [^\circ]$	$\alpha_{2,3} [^\circ]$	$\alpha_{2sr} [^\circ]$
$Q_{II} [\text{N}]$	$\alpha_{1,1} [^\circ]$	$\alpha_{1,2} [^\circ]$	$\alpha_{1,3} [^\circ]$	$\alpha_{1sr} [^\circ]$	$\alpha_{2,1} [^\circ]$	$\alpha_{2,2} [^\circ]$	$\alpha_{2,3} [^\circ]$	$\alpha_{2sr} [^\circ]$
$Q_{III} [\text{N}]$	$\alpha_{1,1} [^\circ]$	$\alpha_{1,2} [^\circ]$	$\alpha_{1,3} [^\circ]$	$\alpha_{1sr} [^\circ]$	$\alpha_{2,1} [^\circ]$	$\alpha_{2,2} [^\circ]$	$\alpha_{2,3} [^\circ]$	$\alpha_{2sr} [^\circ]$

Tabela 3. Zestawienie wyników analitycznych i doświadczalnych

Wynik teoretyczny		Błąd względny		Wynik pomiar		Błąd względny		Reakcje w przegubach			
								Wynik teoretyczny			
$Q_I [\text{N}]$	$\alpha_1 [^\circ]$	$\alpha_{1sr} [^\circ]$	$\frac{ \alpha_{1sr} - \alpha_1 }{ \alpha_1 }$	$\alpha_2 [^\circ]$	$\alpha_{2sr} [^\circ]$	$\frac{ \alpha_{2sr} - \alpha_2 }{ \alpha_2 }$		$R_{BX}$	$R_{BY}$	$R_{AX}$	$R_{OY}$
								$[\text{N}]$	$[\text{N}]$	$[\text{N}]$	$[\text{N}]$
$Q_{II} [\text{N}]$	$\alpha_1 [^\circ]$	$\alpha_{1sr} [^\circ]$	$\frac{ \alpha_{1sr} - \alpha_1 }{ \alpha_1 }$	$\alpha_2 [^\circ]$	$\alpha_{2sr} [^\circ]$	$\frac{ \alpha_{2sr} - \alpha_2 }{ \alpha_2 }$		$R_{BX}$	$R_{BY}$	$R_{AX}$	$R_{OY}$
								$[\text{N}]$	$[\text{N}]$	$[\text{N}]$	$[\text{N}]$
$Q_{III} [\text{N}]$	$\alpha_1 [^\circ]$	$\alpha_{1sr} [^\circ]$	$\frac{ \alpha_{1sr} - \alpha_1 }{ \alpha_1 }$	$\alpha_2 [^\circ]$	$\alpha_{2sr} [^\circ]$	$\frac{ \alpha_{2sr} - \alpha_2 }{ \alpha_2 }$		$R_{BX}$	$R_{BY}$	$R_{AX}$	$R_{OY}$
								$[\text{N}]$	$[\text{N}]$	$[\text{N}]$	$[\text{N}]$

## 5. SPRAWOZDANIE

Sprawozdanie powinno zawierać:

- Stronę tytułową (z danymi o wykonawcach)
- Cel i temat ćwiczenia
- Krótka teoria dotycząca analizowanego problemu
- Schemat stanowiska badawczego
- Warunki równowagi badanego układu
- Wypełnione tabele pomiarów i obliczeń
- Obliczenia wyznaczonych wartości (przykładowe)
- Wykres wychyleń wahadła w funkcji przyłożonego obciążenia (przedstawiamy wychylenie obu wahadeł w funkcji przyłożonej siły na jednym wykresie).
- Analiza błędów wraz z oszacowaniem wagi pomiarów.
- Wnioski i uwagi końcowe.

## 6. LITERATURA

1. Sałata W. Mechanika ogólna w zarysie. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej. Wydanie II, Poznań 2001.
2. Szabelski K., Warminski J. Laboratorium dynamiki i drgań układów mechanicznych. Mechanika, Lublin, ISBN 83-7497-0120X, 2006.
3. Leyko J. Mechanika ogólna tom 2. Dynamika. Wydawnictwo PWN, 2011.
4. Jarzębowska E., Jarzębowski W. Mechanika ogólna. Wydawnictwo Naukowe PWN W-wa 2000.