

## Ćwiczenie 18

# Równania Lagrange'a

### 18.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest wyznaczenie sztywności sprężyn układu drgającego w oparciu o równania Lagrange'a II-go rodzaju.

### 18.2. Podstawy teoretyczne

W przypadku układu materialnego  $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_n$ , jego położenie określamy za pomocą niezależnych współrzędnych uogólnionych

$q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_s, j(1\dots s)$  gdzie  $s$ - oznacza liczbę niezależnych współrzędnych oraz liczbę stopni swobody tego układu.

Dla układu materialnego znajdującego się w ruchu współrzędne uogólnione są funkcjami czasu

$$q_j = q_j(t) \quad j = 1\dots s$$

W przypadku układów zachowawczych tj. takich w których prace wykonują wyłącznie siły określone potencjałem, składowe siły wynoszą

$$F_{ix} = - \frac{\partial V}{\partial x_i} ; \quad F_{iy} = - \frac{\partial V}{\partial y_i} ; \quad F_{iz} = - \frac{\partial V}{\partial z_i} ;$$

gdzie  $V = V(x, y, z)$

Siłę uogólnioną  $Q_j$  określamy zależnością

$$Q_j = - \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$$

Równania Lagrange'a dla układów poruszających się w zachowawczym polu sił przyjmują postać

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

gdzie  $T$  – energia kinetyczna rozpatrywanego układu

$V$  – energia potencjalna układu

$\dot{q}_j$  – prędkość uogólniona

$q_j$  – współrzędna uogólniona

Równań tego typu możemy ułożyć tyle ile stopni swobody posiada rozpatrywany układ materialny. W celu wyprowadzenia układu równań Lagrange'a, należy wyrazić energię kinetyczną w zależności od współrzędnych uogólnionych, prędkości uogólnionych czasu  $\dot{q}_1$

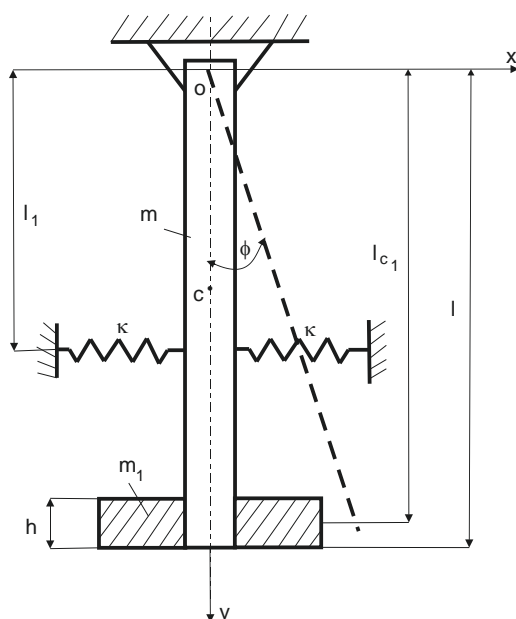
$$T = T(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$$

oraz energię potencjalną w zależności od współrzędnych uogólnionych

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_s)$$

### 18.3. Opis stanowiska badawczego

Schemat stanowiska badawczego przedstawia rys.1.



Rys.1

Stanowisko badawcze składa się z jednorodnego pręta o masie  $m$  i długości  $l$  posiadającego oś obrotu w punkcie  $O$ , dwóch sprężyn  $k$  oraz krążka  $m_1$ .

#### 18.4. Przebieg ćwiczenia

1. Zmierzyć długość i średnicę pręta
2. Zmierzyć wysokość i średnicę krążka
3. Zmierzyć odległość mocowania sprężyn od osi obrotu, wyniki pomiarów zamieścić w tabeli 18.1
4. Wyznaczyć masy elementów mierzonych
5. Wyznaczyć masowy moment bezwładności pręta  $I_z$  względem osi  $O_z$
6. Wyznaczyć masowy moment bezwładności krążka  $m_1$  względem osi  $O_z$
7. Określić położenie środka ciężkości –  $s$
8. Dokonać pomiaru czasu 20 wahań układu pręt – krążek, wyniki pomiarów zamieścić w tabeli 18.2

## 18.5. Opracowanie wyników

$$T = \frac{1}{2} J_{oz} \cdot \dot{\varphi}^2 \quad \text{gdzie } \varphi - \text{współrzędna uogólniona}$$

$$V = 2 \cdot \frac{1}{2} kx^2 + m_z \cdot s(1 - \cos \varphi)g \quad m_z - \text{masa zastępcza,}$$

$$m_z = m + m_1 \quad x \cong l_1 \cdot \varphi \quad 1 - \cos \varphi \cong \frac{\varphi^2}{2}$$

$$J_{oz} = J_{oz_m} + J_{oz_{m1}}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

$$V = k l_1^2 \varphi^2 + m_z g s \frac{\varphi^2}{2} = \varphi^2 (k l_1^2 + m_z g \frac{s}{2})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_{oz} \dot{\varphi} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = J_{oz} \ddot{\varphi} \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 2 (k l_1^2 + m_z g \frac{s}{2}) \varphi$$

otrzymujemy równanie różniczkowe ruchu

$$J_{oz} \ddot{\varphi} + 2 (k l_1^2 + m_z g \frac{s}{2}) \varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2k l_1^2 + m_z g s}{J_{oz}} \varphi = 0$$

wprowadzamy oznaczenia  $\omega_0^2 = \frac{2k l_1^2 + m_z g s}{J_{oz}}$

gdzie okres  $\tau = \frac{2\pi}{\omega_0}$   $\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2kl_1^2 + m_z g s}{J_{oz}}}}$

$$\tau \cdot \sqrt{\frac{2kl_1^2 + m_z g s}{J_{oz}}} = 2\pi \quad \tau^2 \left( \frac{2kl_1^2 + m_z g s}{J_{oz}} \right) = 4\pi^2$$

$$2\tau^2 k l_1^2 + \tau^2 m_z g s = 4\pi^2 J_{oz}$$

$$2\tau^2 k l_1^2 = 4\pi^2 J_{oz} - \tau^2 m_z g s$$

$$k = \frac{4\pi^2 J_{oz} - \tau^2 m_z g s}{2\tau^2 l_1^2} \quad (1)$$

Podstawiając obliczone wielkości do wzoru ( 1 ), wyznaczyć sztywność sprężyny.

## 18.6. Wykonanie sprawozdania

W sprawozdaniu należy podać :

1. Cel ćwiczenia
2. Schemat stanowiska badawczego
3. Wzory oraz obliczenia masowych momentów bezwładności pręta i krążka oraz położenie środka ciężkości układu drgającego
4. Tabele pomiarów i obliczeń
5. Uwagi i wnioski

Tabela 18.1

Pręt		Krążek 1		Krążek 2	
l =	[m]	h <sub>1</sub> =	[m]	h <sub>2</sub> =	[m]
d =	[m]	d <sub>1</sub> =	[m]	d <sub>2</sub> =	[m]
m =	[kg]	m <sub>1</sub> =	[kg]	m <sub>2</sub> =	[kg]

Tabela 18.2

Obliczone wartości masowych momentów bezwładności

Pręt		Krążek 1		Krążek 2	
J <sub>zc</sub> =	[kgm <sup>2</sup> ]	J <sub>zc1</sub> =	[kgm <sup>2</sup> ]	J <sub>zc2</sub> =	[kgm <sup>2</sup> ]
J <sub>ozp</sub> =	[kgm <sup>2</sup> ]	J <sub>oz1</sub> =	[kgm <sup>2</sup> ]	J <sub>oz2</sub> =	[kgm <sup>2</sup> ]

Tabela 18.3

Obliczenia położenia środka ciężkości

Położenie środka ciężkości układu drgającego	$S =$ [m]
--	-----------

Tabela 18.4

Zestawienie wyników pomiaru czasu

Czas 20 cykli	Okres cyklu	Średni okres
$t_1 =$	$\tau_1 =$	$\tau_{\text{śr}} =$
$t_2 =$	$\tau_2 =$	
$t_3 =$	$\tau_3 =$	

Tabela 18.5

Wyniki obliczeń sztywności sprężyny

$k_1 =$	[N/m]	$k_{\text{śr}} =$ [N/m]
$k_2 =$	[N/m]	
$k_3 =$	[N/m]	

## Bibliografia

1. Leyko J. Mechanika ogólna t. I i t. II. Wydawnictwo Naukowe PWN W-wa 1978
2. Niezgodziński T. Mechanika Ogólna. Wydawnictwo Naukowe PWN W-wa 2010
3. Szabelski K. Warmiński J. Laboratorium dynamiki i drgań mechanicznych. Politechnika Lubelska. Lublin 2006