

Ćwiczenie 20

Zasada prac przygotowanych

20.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z praktycznym zastosowaniem zasady prac przygotowanych przy rozpatrywaniu równowagi układu o dwóch stopniach swobody

20.2. Podstawy teoretyczne

Jeśli układ n punktów materialnych poddany jest działaniu więzów holonomicznych i doskonałych, to warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi układu jest aby praca sił zewnętrznych $\bar{F}_1 \dots, \bar{F}_i \dots, \bar{F}_n$ na przesunięciach przygotowanych $\delta \bar{r}_1 \dots, \delta \bar{r}_i \dots, \delta \bar{r}_n$ była równa zeru.

$$\delta L = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{F}_i \cdot \delta \bar{r}_i = 0 \quad (1)$$

$$\delta L = \sum_{i=1}^{i=n} (F_{ix} \cdot \delta_{ix} + F_{iy} \cdot \delta_{iy} + F_{iz} \cdot \delta_{iz}) = 0$$

gdzie $\delta_{ix}, \delta_{iy}, \delta_{iz}$ - wariacje odpowiadające współrzędnym prostokątnym

Zasada prac przygotowanych jest zasadą wariacyjną gdyż bierze się w niej niejedną konfigurację układu, lecz zbiór różnych konfiguracji otrzymanych w wyniku wykonania przesunięć przygotowanych dopuszczalnych przez więzy. Zaletą zasady prac przygotowanych jest to, że wszystkie warunki równowagi można wyrazić za pomocą jednego równania. W sformułowaniu zasady prac przygotowanych nie występują reakcje więzów a więc przy badaniu równowagi układu w oparciu o tę zasadę nie ma potrzeby wyznaczania reakcji.

Przedstawmy wzór (1) wyrażający zasadę prac przygotowanych we współrzędnych uogólnionych

$q_1, \dots, q_2, \dots, q_j, \dots, q_s$ – współrzędne uogólnione określające układ o s stopniach swobody

$$\text{niech } \bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1 \dots q_j \dots q_s) \quad \text{to} \quad \delta \bar{r}_i = \sum_{j=1}^{j=s} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$\delta q_1 \dots \delta q_j \dots \delta q_s$ - niezależne wariacje współrzędnych uogólnionych

$$\sum_{i=1}^{i=n} \bar{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{j=s} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j = \sum_{j=1}^{j=s} \delta q_j \cdot \sum_{i=1}^{i=n} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = 0$$

wprowadzamy oznaczenia

$$Q_j = \sum_{i=1}^{i=n} \bar{F}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, s$$

wielkości Q_j ($j=1, \dots, s$), nazywamy siłami uogólnionymi

otrzymujemy więc

$$\delta L = \sum_{i=1}^{i=n} Q_j \delta q_j = 0 \quad (2)$$

Wzór (2) wyraża zasadę prac przygotowanych we współrzędnych uogólnionych.

Skoro wariacje $\delta q_1 \dots \delta q_j \dots \delta q_s$ są niezależne to ze wzoru () wynika, że

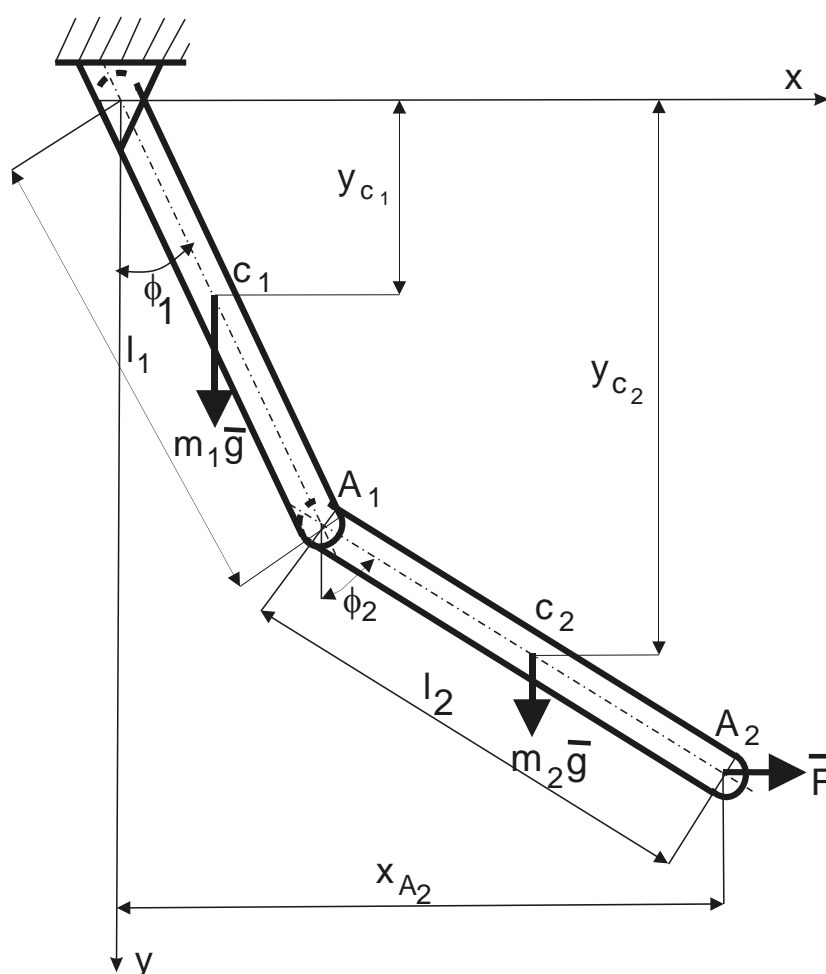
$$Q_j = 0, \quad (j = 1, \dots, s).$$

Wobec tego warunkiem koniecznym i wystarczającym równowagi układu materialnego o więzach holonomicznych skleronomicznych i idealnych jest, aby siły uogólnione Q_j odpowiadające niezależnym współrzędnym uogólnionym q_j były równe zeru.

Stąd wynika, że możemy otrzymać tyle warunków równowagi ile stopni swobody posiada rozważany układ.

20.3. Opis stanowiska

Na rys. przedstawiono wahadło podwójne składające się z dwóch jednorodnych, połączonych ze sobą przegubowo prętów o długościach równych odpowiednio l_1 i l_2 i masach m_1 i m_2 .



Do końca A_2 dolnego pręta wahadła przyłożona jest poziomo siła F . Wyznamy siły uogólnione Q_1 i Q_2 odpowiadające współrzędnym uogólnionym

$q_1 = \varphi_1$ i $q_2 = \varphi_2$ tj. kątami między osiami prętów wahadła i pionem.

W położeniu równowagi $\delta L = 0$, w rozpatrywanym przypadku otrzymujemy

$$\delta L = Q_1 \delta \varphi_1 + Q_2 \delta \varphi_2$$

siły uogólnione liczymy z zależności:

$$Q_1 = F \frac{\partial x_{A2}}{\partial \varphi_1} + m_1 g \frac{\partial y_{c1}}{\partial \varphi_1} + m_2 g \frac{\partial y_{c2}}{\partial \varphi_1} \quad (3a)$$

$$Q_2 = F \frac{\partial x_{A2}}{\partial \varphi_2} + m_1 g \frac{\partial y_{c1}}{\partial \varphi_2} + m_2 g \frac{\partial y_{c2}}{\partial \varphi_2} \quad (3b)$$

z rysunku $y_{c1} = \frac{l_1}{2} \cos \varphi_1$; $y_{c2} = l_1 \cos \varphi_1 + \frac{l_2}{2} \cos \varphi_2$;

$$x_{A2} = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2$$

stąd $\frac{\partial x_{A2}}{\partial \varphi_1} = l_1 \cos \varphi_1$; $\frac{\partial x_{A2}}{\partial \varphi_2} = l_2 \cos \varphi_2$; $\frac{\partial y_{c1}}{\partial \varphi_1} = -\frac{l_1}{2} \sin \varphi_1$; $\frac{\partial y_{c1}}{\partial \varphi_2} = 0$

$$\frac{\partial y_{c2}}{\partial \varphi_1} = -l_1 \sin \varphi_1 ; \quad \frac{\partial y_{c2}}{\partial \varphi_2} = -\frac{l_2}{2} \sin \varphi_2 ;$$

po podstawieniu do wzoru 3a i 3b, otrzymujemy:

$$Q_1 = \left[F \cos \varphi_1 - \left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right) g \sin \varphi_1 \right] l_1$$

$$Q_2 = \left(F \cos \varphi_2 - \frac{1}{2} m_2 g \sin \varphi_2 \right) l_2$$

warunek równowagi układu

$$\partial L = \sum_{j=1}^{j=s} Q_j \delta q_j = 0$$

jest to możliwe gdy spełnione są równania

$$Q_1 = 0 ; Q_2 = 0 \quad \text{ponieważ } \delta \varphi_1 \text{ i } \delta \varphi_2 \neq 0$$

stąd

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{F}{\left(\frac{1}{2} m_1 + m_2 \right) g} ; \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2F}{m_2 g} \quad (4)$$

20.4. Przebieg ćwiczenia

1. Dokonać pomiarów prętów
2. Wyznaczyć ciężar prętów
3. Trzykrotnie pomierzyć kąty przy założeniu ciężarka Q_I
4. Trzykrotnie pomierzyć kąty przy założeniu ciężarka Q_{II}
5. Obliczyć wartości kątów z zależności (4) dla $F=Q_I$ i $F=Q_{II}$
6. Wyniki doświadczalne pomiarów kątów porównać z wartościami wyznaczonymi teoretycznie
7. Wyniki pomiarów i obliczeń zamieścić w tabeli 1 i 2.

Tabela 1

pręt 1	$l_1 =$ [mm]	$a_1 =$ [mm]	$b_1 =$ [mm]	$V_1 =$	$\rho_1 =$	$G_1 =$ [N]
pręt 2	$L_2 =$ [mm]	$a_2 =$ [mm]	$b_2 =$ [mm]	$V_2 =$	$\rho_2 =$	$G_2 =$ [N]

Tabela 2

F_1	pręt m_1				pręt m_2			
	$\varphi_{1,1} =$	$\varphi_{1,1} =$	$\varphi_{1,1} =$	$\varphi_{\dot{s}r} =$	$\varphi_{2,1} =$	$\varphi_{2,1} =$	$\varphi_{2,1} =$	$\varphi_{\dot{s}r} =$
F_2	$\varphi_{1,2} =$	$\varphi_{1,2} =$	$\varphi_{1,2} =$	$\varphi_{\dot{s}r} =$	$\varphi_{2,2} =$	$\varphi_{2,2} =$	$\varphi_{2,2} =$	$\varphi_{\dot{s}r} =$

20.5. Wykonanie sprawozdania

Sprawozdanie winno zawierać:

1. Cel ćwiczenia
2. Schemat stanowiska
3. Wypełnione tabele pomiarów
4. Obliczenia wyznaczonych wartości
5. Analiza wyników i wnioski

20.6. Bibliografia

1. Leyko J. Mechanika ogólna t.II. Wydawnictwo Naukowe PWN W-wa 1978
2. Jarzębowska E., Jarzębowski W. Mechanika ogólna. Wydawnictwo Naukowe PWN W-wa 2000
3. Gutowski R. Mechanika analityczna PWN W-wa 1971
4. Szabelski K. , Warmiński J. Laboratorium dynamiki i drgań układów mechanicznych. Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, 2006