	<p style="text-align: center;">POLITECHNIKA LUBELSKA Wydział Mechaniczny</p>
<p>INSTRUKCJA DO ĆWICZENIA NR 23</p>	
PRZEDMIOT	MECHANIKA ANALITYCZNA
TEMAT	<i>Środek uderzenia ciała obracającego się wokół nieruchomej osi</i>
OPRACOWAŁ	Dr inż. Waldemar Samodulski

23.1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest teoretyczne i doświadczalne określenie środka uderzenia ciała nieswobodnego.

23.2. Podstawy teoretyczne

W zjawisku uderzenia dwóch ciał występują bardzo duże siły w niezmiernie krótkim czasie. W opisie uderzenia wykorzystuje się twierdzenia o zmienności pędu

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F} \quad (1)$$

gdzie; \bar{Q} – jest pędem ciała równym iloczynowi masy ciała i prędkości środka masy

\bar{F} – suma wszystkich sił czynnych i sił reakcji działających na ciało

$$m\bar{V}'_c - mV_c = \int_0^\tau \bar{F} dt$$

gdzie; $\bar{Q}' = m\bar{V}'_c$ - pęd ciała po uderzeniu,

$\bar{Q} = m\bar{V}_c$ - pęd ciała przed uderzeniem,

$\int_0^\tau \bar{F} dt = \bar{S}$ - impuls siły chwilowej

$$\bar{Q}' - \bar{Q} = \bar{S}$$

$$\text{więc } \Delta\bar{V}_c = \frac{\bar{S}}{m}$$

i zmienność krętu ciała

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{M}_0 \quad (2)$$

gdzie; \bar{K}_0 – kręt ciała względem dowolnego bieguna 0,

\bar{M}_0 – suma momentów sił czynnych i reakcji względem nieruchomego bieguna 0.

Poprowadźmy promień – wektor \bar{r} z bieguna D do przyłożenia siły chwilowej \bar{F} wtedy

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{r} \times \bar{F} \quad (3)$$

po scałkowaniu tego równania w granicach $t=0$ do $t=\tau$ otrzymujemy

$$\bar{K}'_0 - \bar{K}_0 = \int_0^\tau \bar{r} \times \bar{F} dt \quad (4)$$

\bar{K}'_0 - kręt ciała po uderzeniu, \bar{K}_0 - kręt ciała przed uderzeniem

$$\Delta\bar{K}_0 = \bar{r} \times \bar{S} \quad (5)$$

rys.1

Przyrost krętu ciała materialnego względem dowolnego bieguna wywołany działaniem sił chwilowych, równy jest momentowi ich impulsu względem tegoż bieguna.

Dla ciała o unieruchomionym punkcie który obierzemy jako biegun, otrzymujemy z równania wektorowego (2) trzy równania wiążące składowe wektorów \overline{K}_0 i \overline{M}_0

Rys.2

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x, \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y, \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z, \quad (6)$$

gdzie

$$\begin{aligned} K_x &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z \\ K_y &= -J_{yx} \omega_x - J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z \\ K_z &= -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y - J_z \omega_z \end{aligned}$$

$J_x = \int (y^2 + z^2) dm$ - masowy moment bezwładności względem osi Ox

$J_y = \int (x^2 + z^2) dm$ - masowy moment bezwładności względem osi Oy

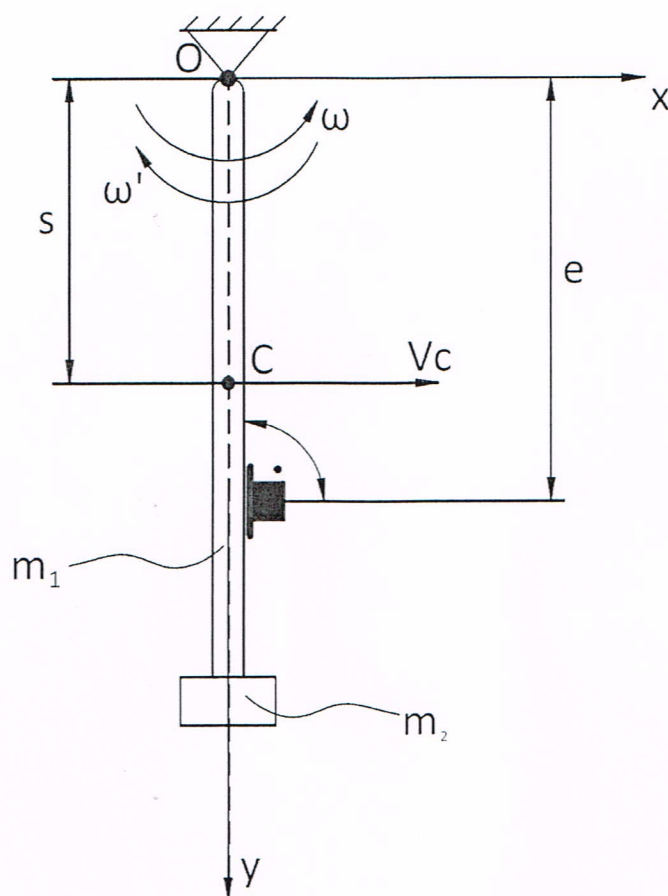
$J_z = \int (x^2 + y^2) dm$ - masowy moment bezwładności względem osi Oz

J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} - masowe momenty odśrodkowe:

$$J_{xy} = J_{yx} \int xy \, dm, \quad J_{yz} = J_{zy} \int yz \, dm, \quad J_{zx} = J_{xz} \int zx \, dm$$

Gdy osie układu $Oxyz$ pokrywają się z głównymi osiami bezwładności ciała w punkcie O , wówczas $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$. W przypadku gdy oś obrotu jest osią główną ciała w punkcie O , kręt \bar{K}_0 względem tego bieguna jest skierowany wzdłuż osi obrotu i równy jest iloczynowi prędkości kątowej ciała i masowego momentu bezwładności względem tej osi obrotu.

Niech ciało materialne obraca się wokół nieruchomej osi pokrywającej się z osią Oz rys.3.



Rys.3

Na ciało mające płaszczyznę symetrii materialnej w płaszczyźnie rysunku, w pewnej chwili działa impuls siły \bar{S} o linii działania prostopadłej do płaszczyzny przesuniętej przez oś obrotu Oz i środek masy ciała C co powoduje, że momenty dewiacji $J_{zy} = J_{zx} = 0$.

Wskutek działania tej siły zmieni się w sposób nagły, prędkość kątowna obracającego się ciała i w łożyskach osi obrotu mogą wystąpić bardzo duże chwilowe siły reakcji.

W niezmiernie krótkim czasie trwania uderzenia występujący impuls tych reakcji oznaczamy \bar{S}_0 .

Przyrost pędu rozpatrywanego ciała równy jest sumie geometrycznej impulsów wszystkich sił chwilowych

$$m\bar{V}'_c - m\bar{V}_c = \bar{S} + \bar{S}_0 \quad (7)$$

Przyrost krętu ciała względem osi obrotu równy jest momentowi impulsu \bar{S} względem osi obrotu równa się zero.

$$\Delta\bar{K}_0 = \bar{r} \times \bar{S} \quad (8)$$

Równania wektorowe (7) i (8) możemy zastąpić równoważnymi im równaniami skalarnymi

$$\begin{aligned} m\bar{V}'_c - m\bar{V}_c &= \bar{S} + \bar{S}_0 \\ J_{Oz}\omega' - J_{Oz}\omega &= -S \cdot e \end{aligned} \quad (9)$$

na podstawie hipotezy Newtona współczynnik restytucji

$$k = -\frac{V'_1 - V'_2}{V_1 - V_2} \quad (10)$$

V'_1 - prędkość ciała 1 po zderzeniu

V_1 - prędkość ciała 1 przed zderzeniem

V'_2 - prędkość ciała 2 po zderzeniu

V_2 - prędkość ciała 2 przed zderzeniem

w naszym przypadku

$$k = -\frac{V'_{1D}}{V_{1D}} \quad (11)$$

gdzie: $V_{1D} = \omega \cdot e$, $V'_{1D} = \omega' \cdot e$ i $V_{1c} = \omega \cdot c$, $V'_{1c} = \omega' \cdot s$

Z rozwiązania układu równań (9) i wykorzystaniu zależności (11) otrzymujemy

$$S_0 = (1 + k)\omega \left(\frac{J_{Oz}}{e} - ms \right) \quad (12)$$

Aby przy uderzeniu nie występowały dodatkowe reakcje S_0 musi być równe zero, stąd warunek

$$\left(\frac{J_{Oz}}{e} - ms \right) = 0 \quad \text{stąd} \quad e = \frac{J_{Oz}}{ms} \quad (13)$$

gdzie: m – masa całego układu

$$m = m_1 + m_2$$

J_{Oz} – masowy moment bezwładności układu względem osi O_2

s - odległość środka ciężkości od osi obrotu

Gdy odległość e spełnia warunek (13) przy uderzeniu nie pojawiają się reakcje chwilowe łożysk osi obrotu a punkt D nazywamy środkiem uderzenia.

Środek uderzenia jest to taki punkt ciała materialnego ułożyskowanego na nieruchomej osi przez który musi przechodzić linia działania siły chwilowej aby siła ta nie powodowała reakcji chwilowych łożysk osi obrotu.

Oznaczając przez i_c – promień bezwładności względem osi równoległej do osi obrotu i przechodzącej przez środek ciężkości ciała mamy

$$J_{zc} = m \cdot i_c^2 \quad (14)$$

stąd z twierdzenia Steinera

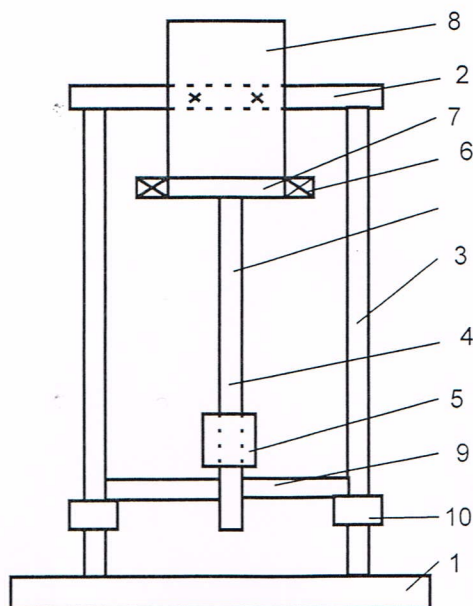
$$J_{Oz} = m(i_c^2 + s^2) \quad (15)$$

Powyższy wzór jest identyczny ze wzorem określającym długość zredukowaną wahadła fizycznego. Środek uderzenia pokrywa się ze środkiem wahań dla tej samej osi obrotu.

$$l_{red} = e = \frac{i_c^2}{s} + s \quad (16)$$

Gdy impuls siły chwilowej jest prostopadły do prostej OC i linia działania impulsu przechodzi przez środek uderzenia, nie oznacza to jednakowych reakcji w łożyskach osi obrotu przed i po uderzeniu.

Reakcje łożysk obracającego się ciała zależą od prędkości kątowej, a ta wskutek uderzenia ulega zmianie.



Rys.4

23.3. Opis stanowiska

Schemat stanowiska przedstawia rys. 4.

Podstawą stanowiska jest dolna płyta (1) z możliwością regulacji poziomu, połączona z górną płytą (2) za pomocą trzech prowadnic (3). Wahadło którego środek uderzenia należy określić, składa się z jednorodnego pręta stalowego (4) o przekroju kołowym.

Na pręcie zamocowany jest przesuwany walec (5). Walec może być mocowany w dowolnym położeniu na pręcie. Oś wahadła ułożyskowana jest na dwóch łożyskach (6) umieszczonych w oprawie (7). Oprawa połączona jest z płytką sprężystą (8) a ta z kolei mocowana jest w płycie górnej (2).

Przeszkoda (9) umieszczona jest na dwóch przesuwnych względem prowadnic pierścieniach (10), które umożliwiają zmianę jej położenia względem osi obrotu wahadła.

Wielkością mierzoną w czasie uderzenia jest wypadkowa sił reakcji łożysk powstających w momencie uderzenia. Siły reakcji wyznaczone są metodą pośrednią poprzez pomiar odkształcenia płytki sprężystej (8) za pomocą

tensometru oporowego naklejonego na nią z którego sygnał po wzmocnieniu płynie do układu rejestrującego.

Z przebiegów czasowych odkształceń określamy minimalny impuls reakcji łożysk.

23.4. Przebieg ćwiczenia

1. Wykonać pomiary wahadła i jego rys.
2. Obliczyć położenie środka ciężkości wahadła i jego masowy moment J_{Oz} .
3. Określić położenie środka uderzenia.
4. Ustawić oś poprzeczki dla wyznaczonego środka uderzenia.
5. Wychylić wahadło do położenia dla kąta α_1 i swobodnie je puścić. Zarejestrować przebiegi czasowe. Pomiary powtórzyć trzykrotnie.
6. Przesunąć porzeczkę w górę i w dół o wartość podaną przez prowadzącego. Zarejestrować przebiegi czasowe dla kątów α_1 i α_2 .

Tabela pomiarów

Nr pomiaru	α_1	α_2	Teoretyczna wartość e	Doświadczalna wartość e
1				
2				
3				

23.5. Wykonanie sprawozdania

Sprawozdanie winno zawierać:

1. Cel ćwiczenia
2. Schemat stanowiska
3. Wypełniona tabela pomiarów
4. Obliczenia wyznaczonych wartości
5. Analiza wyników i wnioski

23.6. Bibliografia

1. Leyko J. Mechanika ogólna t.II. Wydawnictwo Naukowe PWN W-wa 1978
2. Jarzębowska E., Jarzębowski W. Mechanika ogólna. Wydawnictwo Naukowe PWN W-wa 2000
3. Gutowski R. Mechanika analityczna PWN W-wa 1971
4. Szabelski K. , Warmiński J. Laboratorium dynamiki i drgań układów mechanicznych. Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, 2006