

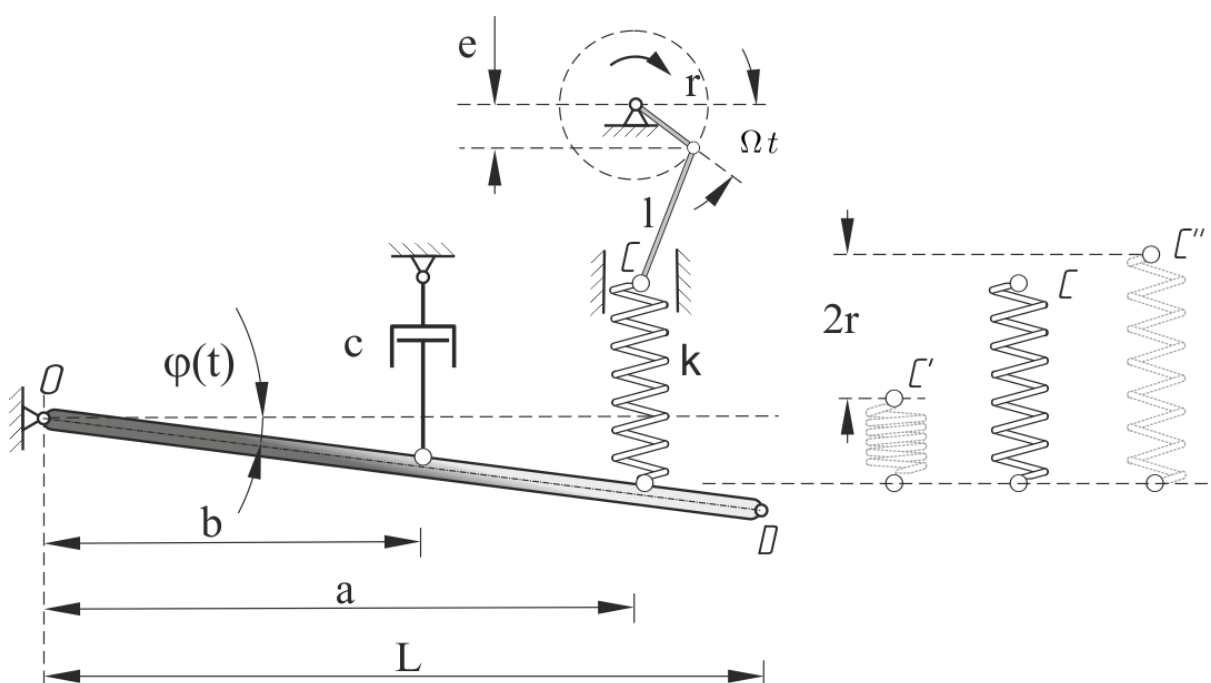
Ćwiczenie 9i

Drgania wymuszone układu o jednym stopniu swobody

Celem ćwiczenia jest sformułowanie dynamicznych równań ruchu układu o jednym stopniu swobody z wymuszeniem zewnętrznym i tłumieniem wiskotycznym oraz analityczne wyznaczenie podstawowej częstości drgań własnych oraz charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej. Otrzymane rozwiązania teoretyczne zostaną zestawione z wynikami eksperymentalnej odpowiedzi układu w dwu przypadkach – tj. drgań swobodnych tłumionych i drgań wymuszonych z tłumieniem.

1. Podstawy teoretyczne

Na rysunku 1 przedstawiony jest schemat układu drgającego o jednym stopniu swobody. Konstrukcja składa się z doskonale sztywnego pręta o długości L [m] osadzonego przegubowo jednym końcem w podporze O i wykonującego ruch obrotowy opisany za pomocą współrzędnej uogólnionej (kąta) $\varphi(t)$ [rad]. Do tego pręta, w odległości a [m] od podpory, zamontowano sprężynę podłączoną do mechanizmu korbowego. Dodatkowo w odległości b [m] od podpory przymocowano tłumik wiskotyczny. Mechanizm korbowy obracający się z częstością kątową Ω [rad/s] powoduje wymuszenie przenoszone na układ, które w przybliżeniu zapewnia ruch harmoniczny końca sprężyny C (skrajne położenia końca sprężyny oznaczono na schemacie C' i C'').



Rysunek 1. Schemat układu o jednym stopniu swobody z wymuszeniem kinematycznym i tłumieniem wiskotycznym.

W związku z powyższym chwilowe przemieszczenie pionowe punktu C opisane jest równaniem

$$e = r \sin(\Omega t), \quad (1)$$

gdzie r [m] jest długością korby; przyjmujemy, że długość korby r jest wielokrotnie mniejsza od ramienia korbowodu l [m].

Przyjmując założenie, że $e < \varphi a$ siłę oddziaływania sprężyny na belkę można zapisać w postaci

$$F_s = k(\varphi a - e), \quad (2)$$

Korzystając z drugiej zasady dynamiki Newtona, bilans momentów sił względem punktu O wygląda następująco

$$\sum M_{iO} = J_0 \ddot{\varphi} = -b^2 c \dot{\varphi} - a F_s. \quad (3)$$

Korzystając z poprzednich zależności oraz po przeniesieniu członów zawierających współrzędną uogólnioną $\varphi(t)$ na lewą stronę i po ich uporządkowaniu ze względu na rząd pochodnej po czasie t otrzymujemy równanie w postaci

$$J_0 \ddot{\varphi} + b^2 c \dot{\varphi} + k a^2 \varphi = a k r \sin(\Omega t) \quad (4)$$

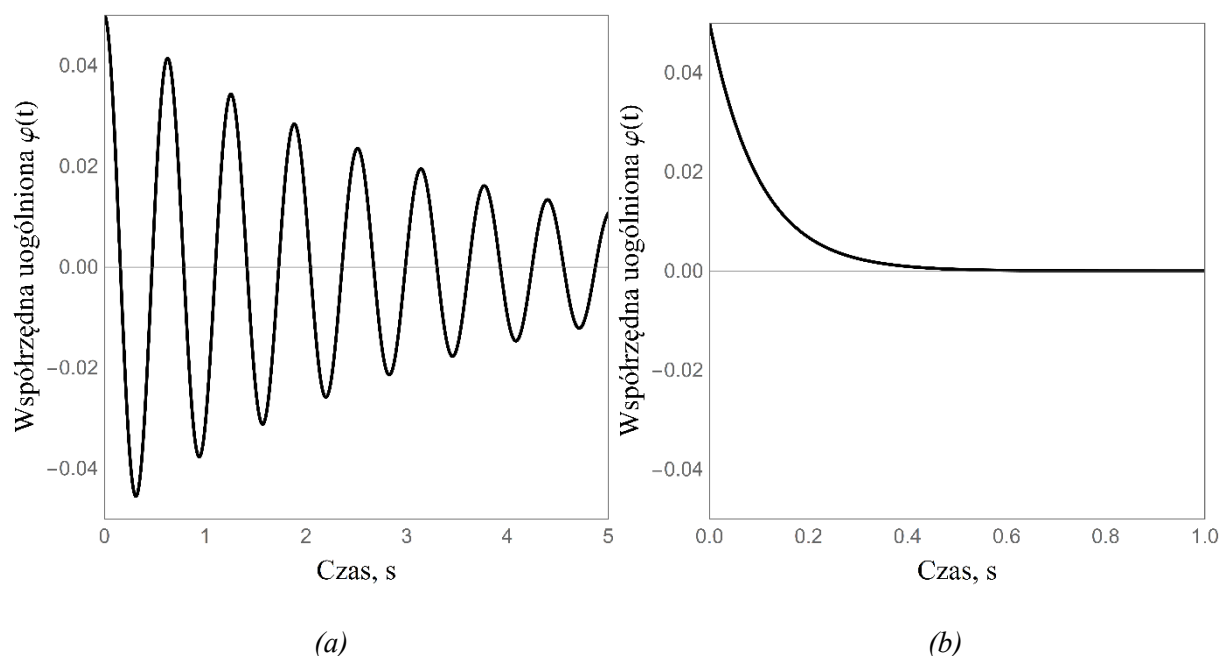
gdzie J_0 jest masowym momentem bezwładności sztywnego pręta obliczonym względem punktu obrotu O i wyrażany w $[\text{kg m}^2]$, parametr c oznacza współczynnik tłumienia wiskotycznego w tłumiku i jest wyrażany w $[\text{N s/m}]$, k reprezentuje liniowy człon sztywności sprężyny wyrażany w $[\text{N/m}]$, Ω to częstość kołowa wymuszenia wyrażana w $[\text{rad/s}]$. Zależności geometryczne układu są określone przez wymiary a , b i r widoczne na Rysunku 1. Należy zwrócić uwagę, że analizowany ruch belki jest ruchem obrotowym (oczywiście w małym zakresie kąta obrotu φ), a w związku z tym jednostką każdego z członów w powyższym równaniu jest $[\text{N m}]$.

Przekształcając powyższe równanie różniczkowe drugiego rzędu do konwencjonalnej postaci, należy podzielić je obustronnie przez człon bezwładnościowy i wprowadzić nowe oznaczenia. Przyjmuje się jednocześnie następujące oznaczenia: efektywny współczynnik tłumienia wiskotycznego w postaci $2h = \frac{b^2 c}{J_0}$, kołową częstość drgań własnych $\omega_0 = \sqrt{\frac{k a^2}{J_0}}$ oraz uogólnioną amplitudę wymuszenia zewnętrznego $F_0 = \frac{a k r}{J_0}$. Ostatecznie zatem otrzymujemy:

$$\ddot{\varphi} + 2h \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = F_0 \sin(\Omega t) \quad (5)$$

Analizując wartości współczynników w powyższym równaniu można wyznaczyć wartości okresu drgań własnych $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, który jest wielkością wyrażaną w sekundach. Zgodnie z definicją okres drgań jest to czas potrzebny na wykonanie jednego pełnego cyklu drgań przez układ drgający. Oznacza to, że w tym czasie układ powraca do swojego położenia referencyjnego poruszając się jednocześnie w tę samą stronę (tzn. posiada zgodny kierunek wektora prędkości z prędkością w punkcie referencyjnym). W celu doświadczalnego pomiaru okresu drgań własnych można skorzystać ze stopera. Praktykuje się pomiar czasu potrzebny na wykonanie n pełnych cykli drgań, a następnie podzielić wskazanie przez liczbę n . Postępowanie takie pozwala istotnie ograniczyć błąd pomiarowy.

Na podstawie ilorazu wartości współczynnika tłumienia $2h$ i częstości kołowych drgań własnych ω_0 można skategoryzować charakter tłumienia w układzie. Rozróżniamy tłumienie nadkrytyczne, jeśli $h > \omega_0$, krytyczne $h = \omega_0$, oraz podkrytyczne $h < \omega_0$. Przebiegi czasowe ruchu w powyższych przypadkach przedstawiono na Rysunku 2. Ze szczególną sytuacją mamy do czynienia, jeśli w układzie nie występuje tłumienie – wtedy $h = 0$. Drgania w tym przypadku nie gasną i przebieg czasowy jest reprezentowany przez krzywą harmoniczną (sinus lub cosinus). Częstą praktyką w rozważaniach analitycznych i numerycznych jest wyrażenie tłumienia w układzie w odniesieniu do częstości drgań własnych np. tłumienie na poziomie $\frac{h}{\omega_0} = 3\%$.



Rysunek 2. Przebieg czasowy ruchu/drgań w przypadku tłumienia podkrytycznego (a) i nadkrytycznego (b).

Analizując odpowiedź układu na zadane wymuszenie $F_0 \sin(\Omega t)$ (prawa strona równania (5)) należy zauważyć, że w rozważanym przypadku drgań liniowych (tj. o małych amplitudach) amplituda wymuszenia F_0 wpływa wprost proporcjonalnie na amplitudę odpowiedzi układu – tj. poszukiwane rozwiązanie $\varphi(t)$.

Natomiast wpływ częstości wymuszenia (Ω) jest bardziej złożony – decydującą rolę pełni iloraz Ω/ω_0 . W szczególnym przypadku, gdy $\Omega = \omega_0$ występuje zjawisko rezonansu, tzn. silny wzrost amplitudy drgań układu. Gdy wspomniana proporcja jest znacznie mniejsza lub większa od 1 amplituda jest istotnie mniejsza – patrz Rysunek 4.

Na potrzeby dalszych rozważań zakładamy, że wartość tłumienia w badanym układzie jest podkrytyczna. W związku z tym, przy braku wymuszenia zewnętrznego $F_0 \sin(\Omega t)$ drgania takiego układu zapoczątkowane zaburzeniem stanu równowagi (tj. niezerową przynajmniej jedną z wartości $\ddot{\varphi}(t_0), \dot{\varphi}(t_0), \varphi(t_0)$ w chwili $t_0=0$) samoczynnie wygasną w dostatecznie długim horyzoncie czasowym.

Jeśli natomiast w układzie działa zewnętrzna siła wymuszająca $F_0 \sin(\Omega t)$ to rozwiązanie wyprowadzonego równania ruchu (5) przewidyuje się w formie

$$\varphi = A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t) \quad (6)$$

Gdzie A i B oznaczają nieznane amplitudy składowe odpowiedzi harmonicznej sinus i cosinus o częstości zgodnej z częstością wymuszenia.

Obliczając kolejne pochodne czasowe otrzymujemy

$$\dot{\varphi} = \Omega A \cos(\Omega t) - \Omega B \sin(\Omega t), \quad (7)$$

$$\ddot{\varphi} = -A \Omega^2 \sin(\Omega t) - \Omega^2 B \cos(\Omega t). \quad (8)$$

Podstawiając powyższe zależności do równania różniczkowego (5), po zgrupowaniu wyrazów według funkcji trygonometrycznych $\sin(\Omega t)$ i $\cos(\Omega t)$, można zapisać:

$$\begin{aligned} & \sin(\Omega t) (-A\Omega^2 - 2h\Omega B + \omega_0^2 A - F_0) \\ & + \cos(\Omega t) (-B\Omega^2 + 2h\Omega A + \omega_0^2 B) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Aby powyższe równanie było spełnione dla dowolnej chwili czasu t , człony zawarte w nawisach muszą być równe zero. W ten sposób otrzymujemy układ dwóch równań algebraicznych z dwiema niewiadomymi

$$-A\Omega^2 - 2h\Omega B + \omega_0^2 A - F_0 = 0, \quad (10)$$

$$-B\Omega^2 + 2h\Omega A + \omega_0^2 B = 0. \quad (11)$$

Grupując równania ze względu na niewiadome amplitudy A i B oraz towarzyszące im współczynniki oraz przenosząc człon wymuszenia (wyraz wolny) na prawą stronę otrzymujemy układ zależności

$$(-\Omega^2 + \omega_0^2)A + (-2h\Omega)B = F_0, \quad (12)$$

$$(+2h\Omega)A + (-\Omega^2 + \omega_0^2)B = 0. \quad (13)$$

Powyższy układ równań można rozwiązać np. metodą wyznaczników. Zapisujemy zatem:

$$W = \begin{vmatrix} -\Omega^2 + \omega_0^2 & -2h\Omega \\ +2h\Omega & -\Omega^2 + \omega_0^2 \end{vmatrix}, \quad (14)$$

$$W_A = \begin{vmatrix} F_0 & -2h\Omega \\ 0 & -\Omega^2 + \omega_0^2 \end{vmatrix}, \quad (15)$$

$$W_B = \begin{vmatrix} -\Omega^2 + \omega_0^2 & F_0 \\ +2h\Omega & 0 \end{vmatrix}, \quad (16)$$

gdzie W jest wyznacznikiem głównym, W_A jest wyznacznikiem amplitudy A oraz W_B jest wyznacznikiem amplitudy B . Wartości liczbowe powyższych wyznaczników wynoszą

$$W = (-\Omega^2 + \omega_0^2)(-\Omega^2 + \omega_0^2) - (+2h\Omega)(-2h\Omega), \quad (17)$$

$$W_A = (F_0)(-\Omega^2 + \omega_0^2) - (0)(-2h\Omega), \quad (18)$$

$$W_B = (-\Omega^2 + \omega_0^2)(0) - (+2h\Omega)(F_0). \quad (19)$$

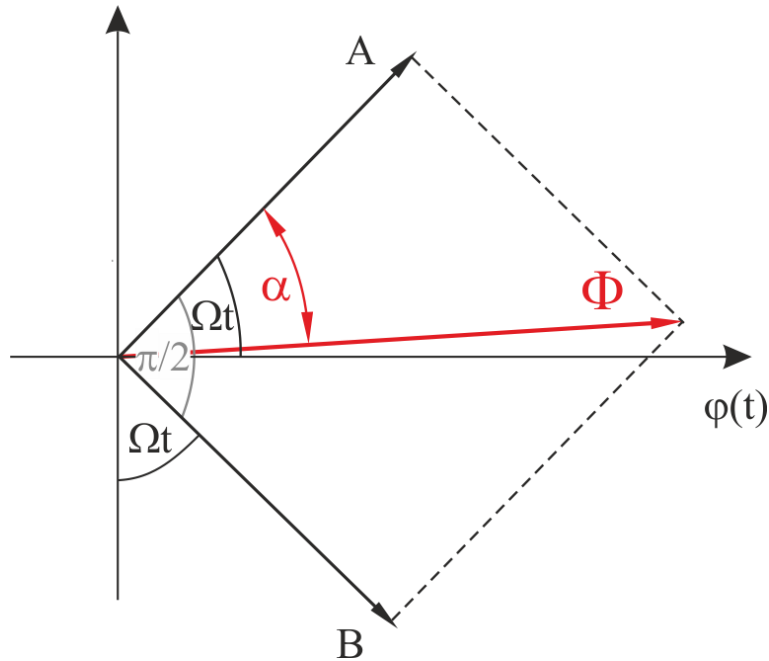
Znając wartości wyznaczników składowe amplitud A i B drgań przy funkcjach harmonicznym sinus i cosinus oblicza się z prostych zależności

$$A = \frac{W_A}{W}, \quad B = \frac{W_B}{W} \quad (20)$$

Otrzymuje się zatem ostatecznie poszukiwane rozwiązanie równania (5)

$$\varphi = A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t). \quad (21)$$

Powyższe rozwiązanie można też przedstawić w nieco innej formie. Mając na uwadze, że dwie amplitudy A i B składników harmonicznym są przesunięte w fazie o kąt $\pi/2$, to korzystając z twierdzenia Pitagorasa można je wektorowo zsumować w jedną wypadkową $\Phi = \sqrt{A^2 + B^2}$ – patrz Rysunek 3. Dodatkowo wyznaczany jest kąt przesunięcia fazowego $\alpha = \arctg\left(\frac{A}{B}\right)$ odpowiedzi układu względem fazy siły wymuszającej.



Rysunek 3. Równoważność zapisu dwóch harmoniczných A i B złożonych w jedną harmoniczną Φ z kątem przesunięcia fazowego α .

Rozwiązanie zagadnienia amplitudy odpowiedzi układu w funkcji harmonicznę dla ruchu ustalonego przyjmuje ostatecznie postać

$$\varphi(t) = \Phi \sin(\Omega t - \alpha). \quad (22)$$

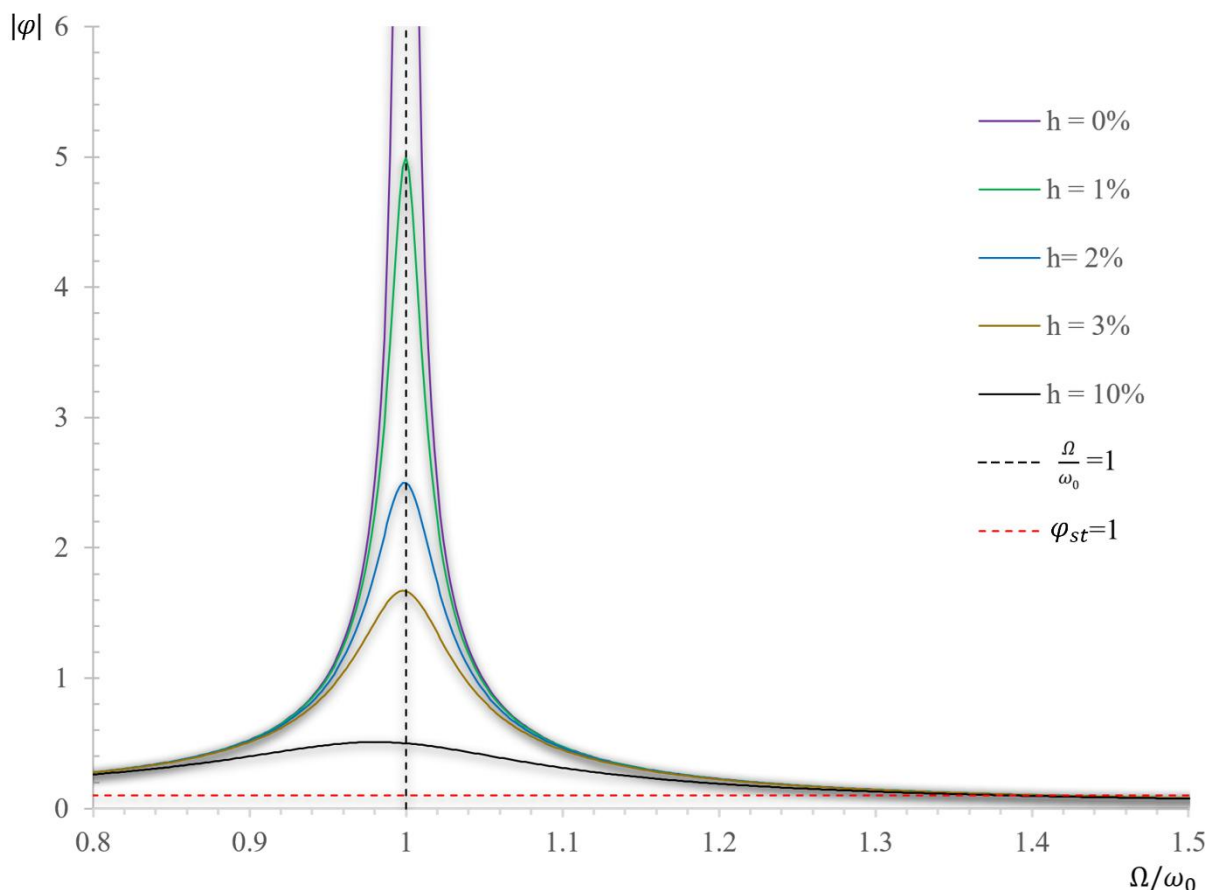
gdzie $\Phi = F_0 \sqrt{\frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4h\Omega^2}}$ i $\alpha = \arctan\left(\frac{2h\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right)$ są odpowiednio amplitudą odpowiedzi i kątem przesunięcia fazowego w funkcji fizycznych parametrów układu oraz częstości kołowej wymuszenia. Zapisując przed pierwiastkiem człon $1/\omega_0^2$ otrzymuje się współczynnik odpowiadający statycznemu ugięciu

$$\varphi_{st} = \frac{F_0}{\omega_0^2}, \quad (23)$$

oraz współczynnik wzmocnienia amplitudy odpowiedzi drgań

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4h\Omega^2}{\omega_0^4}}}. \quad (24)$$

Przykładową dynamiczną odpowiedź układu o jednym stopniu swobody przedstawiono na Rysunku 4. Widoczny jest wzrost wartości amplitudy odpowiedzi, gdy częstość wymuszenia Ω jest bliska częstości drgań własnych ω_0 .

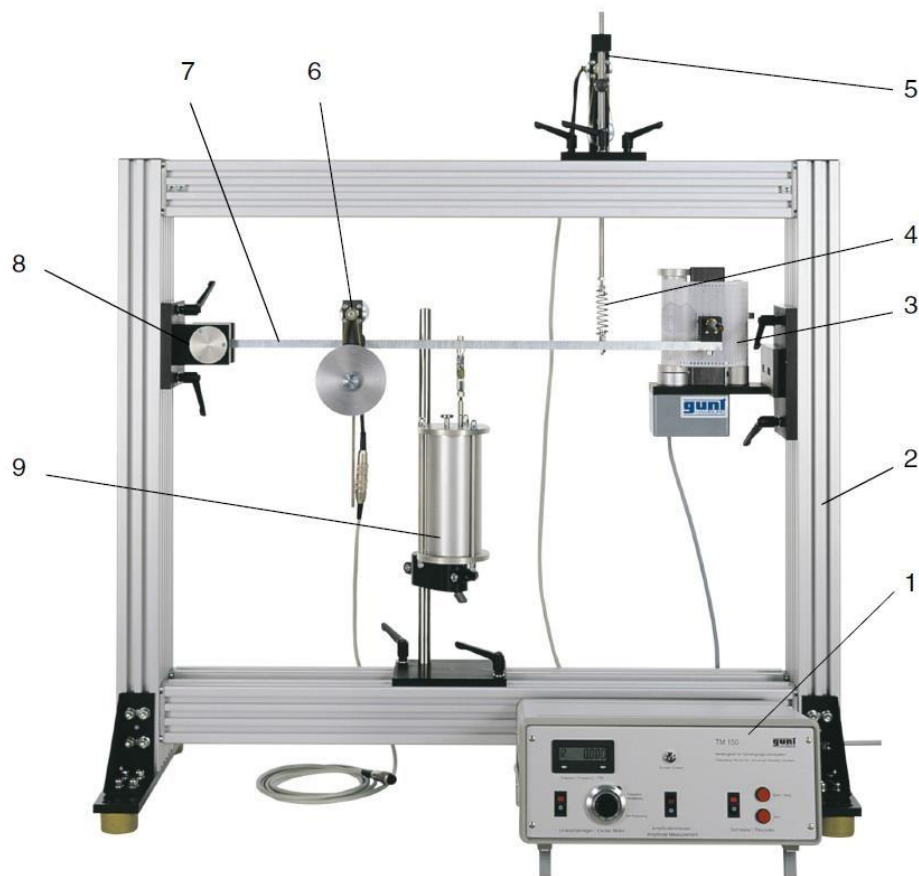


Rysunek 4. Charakterystyka amplitudowo częstotliwościowa dla liniowego członu sztywności, amplitudy wymuszenia $F_0 = 10$ oraz różnych parametrów tłumienia wiskotycznego h .

2. Układ pomiarowy

Stanowisko laboratoryjne do badań dynamiki układu o jednym stopniu swobody zostało przedstawione na Rysunku 5. Wszystkie elementy są zamontowane na aluminiowej ramie (2). Oscylator o jednym stopniu swobody składa się z belki (7), która może obracać się (drgać) wokół lewego końca. Podpora nieprzesuwna (8) zawiera łożyska kulkowe minimalizujące opory ruchu układu. Swobodny koniec jest zawieszony na sprężynie śrubowej (4).

Drgania badanej belki mogą być wywoływane albo poprzez wzбудnik bezwładnościowy (6) albo poprzez wymuszenie kinematyczne (5) o zmiennej częstotliwości i nastawnej amplitudzie przemieszczenia. Rejestrowanie wyników może odbywać się za pomocą komputera podłączonego do jednostki sterującej (1) oraz indukcyjnego czujnika przemieszczeń (3) lub bezpośrednio na analogowym rejestratorze bębnowym. Istnieje również możliwość dopasowania tłumienia drgań za pomocą regulowanego tłumika wiskotycznego (9) o pomijalnie małym tarcu Coulomba.



Rysunek 5. Fotografia układu pomiarowego.

3. Przebieg ćwiczenia

1. Dokonać niezbędnych pomiarów geometrycznych badanego układu. Zmierzone wielkości zanotować w załączonych Tabelach.
2. W statycznym teście wstępnym przyłożyć obciążenie Q na końcu belki i zmierzyć pośrednio przemieszczenie Δy w celu oszacowania sztywności zastępczej układu belka-sprężyna z zależności $k = Q/\Delta y$
3. Obliczyć analitycznie częstość drgań własnych ω_0 i okres liniowych drgań własnych. Następnie wychylając układ z położenia równowagi statycznej o kąt początkowy $\varphi < 5^\circ$ zarejestrować przebieg czasowy odpowiedzi układu i obliczyć średni okres drgań T_{5sr} na podstawie czasu pięciu następujących po sobie pełnych wahaní T_5 . Pomiar powtórzyć dwukrotnie i porównać wyniki doświadczalne z eksperymentalnymi.
4. Uruchomić wymuszenie kinematyczne układu dla około 30 różnych wartości częstości wymuszenia Ω z zakresu $0,5 \omega_0 < \Omega < 1,5 \omega_0$ i zarejestrować amplitudy odpowiedzi układu w ruchu ustalonym. Zgodnie z instrukcjami prowadzącego zajęcia można zagęścić pomiary w okolicy rezonansowej.

- Tabela 1 Wymiary stanowiska pomiarowego i jego charakterystyczne parametry*

Tabela 2 Eksperymentalne wyniki krzywej amplitudowo częstotliwościowej.

9