

# Podstawy Konstrukcji Maszyn

## Wykład 11

### Przekładnie zębate część 4 Obliczenia wytrzymałościowe

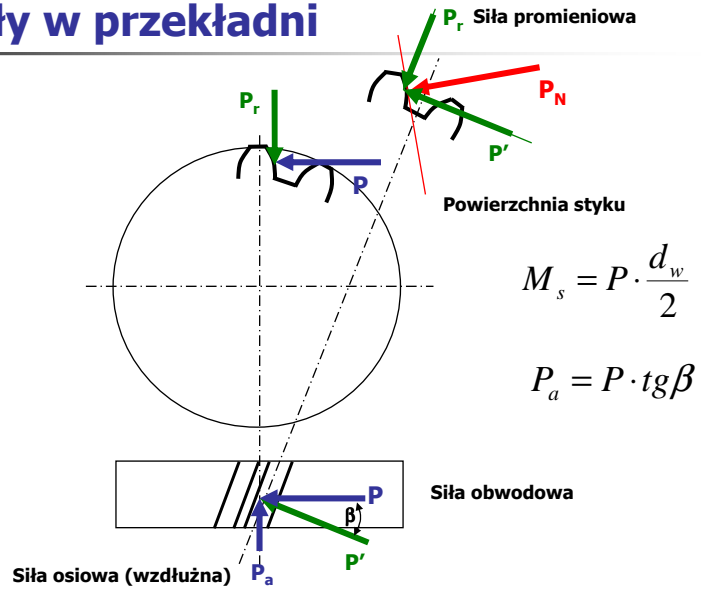
Dr inż. Jacek Czarnigowski

## Koła zębate walcowe

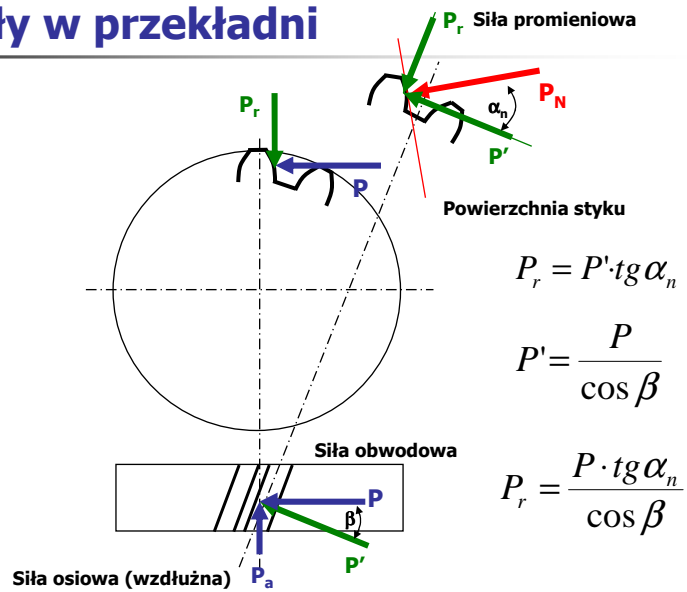


Koła zębate przenoszą obciążenia poprzez wzajemny nacisk powierzchni bocznej współpracującej pary zębów

## Siły w przekładni



## Siły w przekładni





## Siły w przekładni

Siła obwodowa – przenosząca napęd

$$P = \frac{2 \cdot M_s}{d_w}$$

Siła promieniowa – odpychająca koła

$$P_r = \frac{P \cdot \operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta}$$

Siła wzdłużna – odpychająca koła po osi

$$P_a = P \cdot \operatorname{tg} \beta$$



## Siły w przekładni

Siły powyższe są wartościami nominalnymi.  
Należy uwzględnić jeszcze warunki rzeczywiste współpracy.

$$P_{rz} = P \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_\alpha \cdot K_\beta$$

Nominalna siła

Współczynnik zastosowania

Współczynnik nadwyżki dynamicznej

Współczynnik rozkładu obciążenia  
wzdłuż odcinka przyporu

Współczynnik rozkładu  
obciążenia wzdłuż linii zęba

## Siły w przekładni

### Współczynnik zastosowania $K_A$

Silnik napędowy	Charakter obciążenia	Maszyna robocza			
		I	II	III	IV
Silnik elektryczny, turbina parowa	praca równomierna	1,00	1,25	1,50	1,75
Silnik elektryczny, turbina spalinowa	niewielkie przeciążenia	1,10	1,35	1,60	1,85
Silnik spalinowy wielocylindrowy	średnie przeciążenia	1,25	1,50	1,75	2,00
Silnik spalinowy jednocylindrowy	znaczne przeciążenia	1,50	1,75	2,00	2,25
Maszyna robocza		Charakter obciążenia			
I. Generatory, przenośniki taśmowe, lekkie wyciągi, wentylatory, napędy pomocnicze obrabiarek		praca równomierna			
II. Prądnice, pompy zębate, pompy rotacyjne		niewielkie przeciążenia			
III. Napędy główne obrabiarek, dźwignice, mechanizmy obrotu żurawi, pompy wielotłokowe		średnie przeciążenia			
IV. Walcarki, prasy, nożyce gilotynowe, koparki, ładowarki, kruszarki		znaczne przeciążenia			

## Siły w przekładni

### Współczynnik nadwyżki dynamicznej $K_v$

$$K_v = 1 + \frac{\sqrt{V}}{A}$$

Wielkość	Grupa dokładności				
	I	II	III	IV	V
$v$ [m/s]	50÷100	20÷50	10÷20	3÷10	0÷3
Klasa dokładności	2÷5	4÷6	6÷8	8÷10	10÷12
Współczynnik $A$	30	18	10	7	4
Dla pracy poza zakresem rezonansu					

## Siły w przekładni

### Współczynnik rozkładu obciążenia wzdłuż odcinka przyporu $K_\alpha$

$$K_\alpha = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_\alpha \cdot Y_\varepsilon}$$

Całkowita liczba przyporu  $\varepsilon$   
 Osiowa liczba przyporu  $\varepsilon_\alpha$   
 Współczynnik stopnia pokrycia  $Y_\varepsilon$

$$Y_\varepsilon = 0,25 + \frac{0,75}{\varepsilon_\alpha} \cdot \cos^2 \beta$$

## Siły w przekładni

### Współczynnik rozkładu obciążenia wzdłuż linii zęba $K_{H\beta}$

$$K_{H\beta} = A_1 + 0,18 \left( \frac{b}{d_1} \right)^2 + A_2 \cdot 10^{-3} \cdot b$$

Klasa	Wykonanie			
	I		II	
	$A_1$	$A_2$	$A_1$	$A_2$
5	1,135	0,23	1,10	0,115
6	1,15	0,30	1,11	0,15
7	1,17	0,47	1,12	0,23
8	1,23	0,61	1,15	0,31
I - bez docierania kót				
II - z dogniataniem lub docieraniem				

## Obliczenia wytrzymałościowe

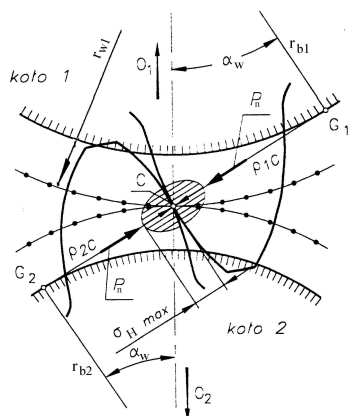
Obliczenia są określone przez normę:  
**PN-ISO 6336/1÷3**

Naprężenia stykowe  
na powierzchni zęba

Naprężenia u  
podstawy zęba

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia stykowe

Na powierzchni zęba występuje nacisk  
styku dwóch powierzchni



Do obliczeń przyjmuje się  
model naprężeń Herza  
naprężeń na styku dwóch  
powierzchni walcowych o  
promieniach:

$\rho_1, \rho_2$

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia stykowe

Na powierzchni zęba występuje nacisk styku dwóch powierzchni

$$\sigma_H = Z_M Z_H Z_\epsilon Z_\beta \cdot \sqrt{\frac{P_{rz} \cdot u + 1}{bd_1 u}} \leq \sigma_{HP}$$

Diagram illustrating the Hertzian contact stress formula with labels for each term:

- $Z_M$ : Współczynnik materiałowy (Material coefficient)
- $Z_H$ : Współczynnik strefy styku (Contact zone coefficient)
- $Z_\epsilon$ : Współczynnik wskaźnika przyporu (Profile factor coefficient)
- $Z_\beta$ : Współczynnik kąta pochylecia zębów (Helix angle coefficient)
- $P_{rz}$ : Naprężenie dopuszczalne na docisk na powierzchni styku zębów (Allowable contact stress)
- $u$ : Przełożenie geometryczne (Geometric ratio)
- $b$ : Szerokość wieńca (Face width)
- $d_1$ : Szerokość wieńca (Face width)

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia stykowe

### Współczynnik materiałowy $Z_M$

Uwzględnia własności materiałów współpracujących kół

$$Z_M = \sqrt{\frac{1}{\pi \cdot \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \right) + \left( \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)}}$$

$\nu$  – liczba Poissona

$E$  – moduł Younga



## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia stykowe

### Współczynnik strefy styku $Z_H$

Uwzględnia wpływ krzywizny boków zęba w biegunie  
zazębienia na naprężenia stykowe

$$Z_H = \frac{1}{\cos \alpha_t} \sqrt{\frac{2 \cos \beta_b}{\operatorname{tg} \alpha_{tw}}}$$



## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia stykowe

### Współczynnik wskaźnika przyporu $Z_\alpha$

Uwzględnia wpływ czołowego i poskokowego stopnia  
przyporu na obciążenie powierzchni zęba

Dla zębów prostych

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_\alpha}{3}}$$

Dla zębów śrubowych

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{4 - \varepsilon_\alpha \cdot (1 - \varepsilon_\beta) + \frac{\varepsilon_\beta}{\varepsilon_\alpha}}{3}} \quad \text{dla } \varepsilon_\beta < 1$$

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_\alpha}} \quad \text{dla } \varepsilon_\beta \geq 1$$



## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia stykowe

### Współczynnik kąta pochylenia zębów $Z_\beta$

Uwzględnia wpływ kąta pochylenia zęba na naprężenia stykowe – dodatkowe zwiększenie wytrzymałości kół o zębach śrubowych

$$Z_\beta = \sqrt{\cos \beta}$$

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia stykowe

### Naprężenie dopuszczalne na docisk na powierzchni styku zębów $\sigma_{HP}$

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{H \text{ lim}}}{S_H} Z_{NT} Z_L Z_R Z_V Z_W Z_X$$

Wytrzymałość zmęczeniowa na naciski stykowe

Współczynnik bezpieczeństwa = 1 + 1,3

Współczynnik trwałości dla zmęczenia powierzchniowego

Współczynnik lepkości oleju

Współczynnik chropowatości powierzchni

Współczynnik zgniotu powierzchni

Współczynnik wielkości

Współczynnik prędkości obwodowej

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia stykowe

### Wytrzymałość zmęczeniowa na naciski stykowe $\sigma_H \text{ lim}$

Rodzaj materiału	Rodzaj obróbki cieplnej	Symbol wg PN-H	Oznaczenie wg PN-EN	Twardość boku zęba	$\sigma_{Hlim}$ [MPa]	$\sigma_{Flim}$ [MPa]
Żeliwo szare	---	200	EN-GJL-200	HB 170	<b>270</b>	50
		250	EN-GJL-250	HB 210	<b>310</b>	60
		350	EN-GJL-300	HB 230	<b>360</b>	80
Stal konstrukcyjna zwykłej jakości	---	St4		HB 125	<b>290</b>	170
		St5	E295	HB 150	<b>340</b>	190
		St6	E335	HB 180	<b>400</b>	200
		St7	E360	HB 208	<b>460</b>	220
Stal konstrukcyjna wyższej jakości	ulepszanie	20	C20	HV 140	<b>440</b>	170
	normalizowanie	45	C45	HV 185	<b>590</b>	200
	ulepszanie	55	C55	HV 210	<b>620</b>	220
Stal konstrukcyjna do ulepszenia cieplnego	ulepszanie	30H	34Cr4	HV 260	<b>650</b>	270
		40H	41Cr4	HV 260	<b>650</b>	270
		40HM	42CrMo4	HV 280	<b>670</b>	290
		34HNM	34CrNiMo6	HV 310	<b>770</b>	320
		45	C45	HV 560	<b>1100</b>	270
Stal do ulepszenia cieplnego hartowana powierzchniowo	hartowanie powierzchniowe łącznie z dnem wrębu	40H	41Cr4	HV 610	<b>1280</b>	310
		40HM	42CrMo4	HV 650	<b>1360</b>	350

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia stykowe

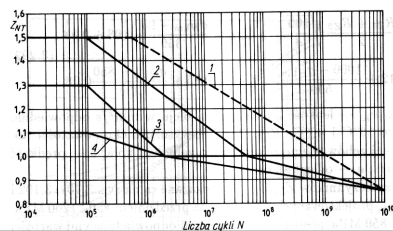
### Współczynnik trwałości dla zmęczenia powierzchniowego $Z_{NT}$

Dla wytrzymałości na nieskończoną liczbę cykli  
 $N > 10^6$

$$Z_{NT} = 1$$

Dla określonej ilości cykli  
(zgodnej z wykresem Wöhlera)  
 $N < 10^6$

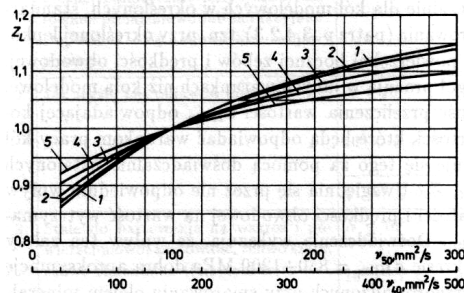
$$Z_{NT} > 1$$



## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia stykowe

### Współczynnik lepkości oleju $Z_L$

Zależy jest od lepkości oleju stosowanego do smarowania przekładni oraz wytrzymałości zmęczeniowej na naprężenia stykowe  $\sigma_{H\lim}$

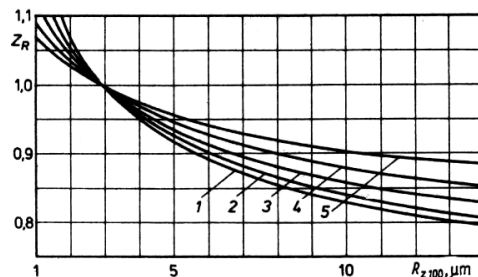


- 1-  $\sigma_{H\lim} = 850$  MPa,
- 2-  $\sigma_{H\lim} = 900$  MPa,
- 3-  $\sigma_{H\lim} = 1000$  MPa,
- 4-  $\sigma_{H\lim} = 1100$  MPa,
- 5-  $\sigma_{H\lim} = 1200$  MPa

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia stykowe

### Współczynnik chropowatości powierzchni $Z_R$

Zależy jest od chropowatości powierzchni zębów oraz wytrzymałości zmęczeniowej na naprężenia stykowe  $\sigma_{H\lim}$

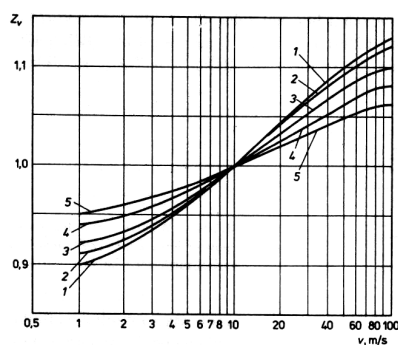


- 1-  $\sigma_{H\lim} = 850$  MPa,
- 2-  $\sigma_{H\lim} = 900$  MPa,
- 3-  $\sigma_{H\lim} = 1000$  MPa,
- 4-  $\sigma_{H\lim} = 1100$  MPa,
- 5-  $\sigma_{H\lim} = 1200$  MPa

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia stykowe

### Współczynnik prędkości obwodowej $Z_v$

Zależy jest od prędkości obwodowej punktu styku oraz  
wytrzymałości zmęczeniowej na naprężenia stykowe  $\sigma_{Hlim}$



- 1-  $\sigma_{Hlim} = 850$  MPa,
- 2-  $\sigma_{Hlim} = 900$  MPa,
- 3-  $\sigma_{Hlim} = 1000$  MPa,
- 4-  $\sigma_{Hlim} = 1100$  MPa,
- 5-  $\sigma_{Hlim} = 1200$  MPa

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia stykowe

### Współczynnik zgniotu powierzchni $Z_w$

Opisuje wpływ utwardzenia powierzchni zębów  
uwzględniając wzrost wytrzymałości na wgłębienia  
zmęczeniowe miękkiego stalowego koła zębatego  
współpracującego z utwardzonym kołem zębatym

$$Z_w = 1,2 - \frac{HB - 130}{1700}$$

HB - twardość powierzchni bocznej zęba koła miększego

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia stykowe

### Współczynnik wielkości $Z_x$

Uwzględnia wpływ wymiarów zęba na dopuszczalne  
naprężenie stykowe

Dla kół stalowych  
hartowanych  
powierzchniowo

$$Z_x = 1,05 - 0,005 \cdot m_n$$

Dla kół stalowych  
azotowanych

$$Z_x = 1,08 - 0,011 \cdot m_n$$

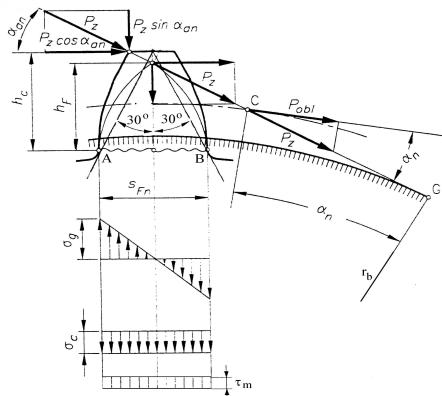
Dla pozostałych

$$Z_x = 1$$

Moduł normalny

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia w stopie zęba

### Obciążenia u podstawy zęba



Wg zaleceń ISO największe  
naprężenia występują w  
obszarach punktów  
stycznych A i B zarysu z  
liniami prostymi tworzącymi  
kątem  $30^\circ$  z osią symetrii zęba

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia w stopie zęba

### Obciążenia u podstawy zęba

$$\sigma_F = \frac{P_{rz}}{b \cdot m_n} Y_{FS} \cdot Y_\varepsilon \cdot Y_\beta \leq \sigma_{FP}$$

Współczynnik karbu  
u stopy zęba

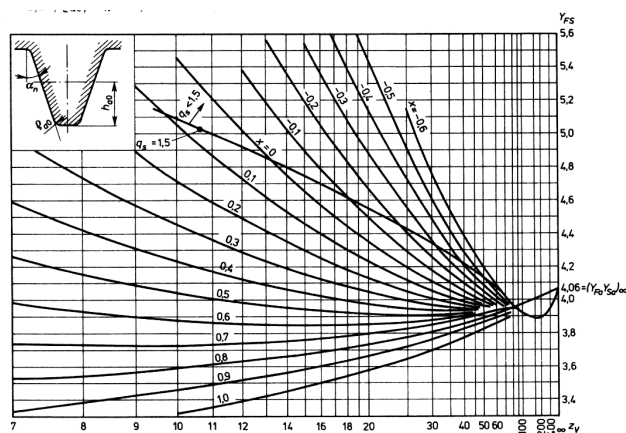
Współczynnik  
stopnia pokrycia

Współczynnik  
pochylenia linii  
zębów

Dopuszczalne  
naprężenie w  
stopie zęba

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia w stopie zęba

### Współczynnik karbu u stopy zęba $Y_{FS}$





## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia w stopie zęba

Współczynnik stopnia pokrycia  $Y_\varepsilon$

$$Y_\varepsilon = 0,25 + \frac{0,75}{\varepsilon_\alpha} \cos^2 \beta_b$$



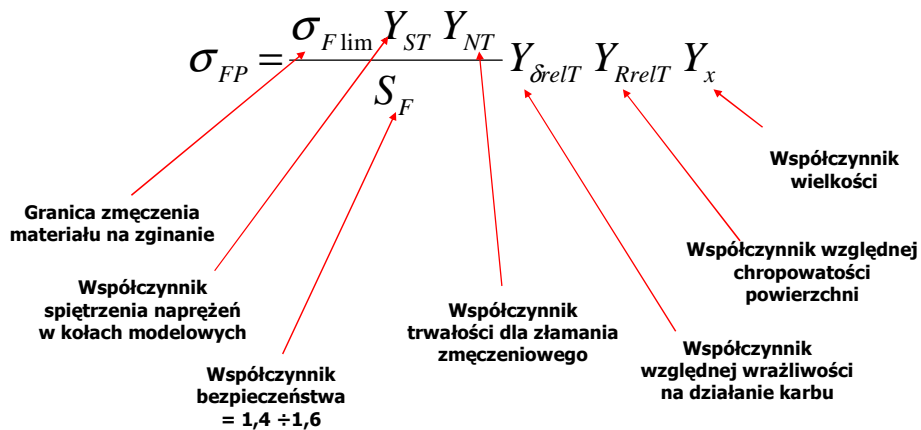
## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia w stopie zęba

Współczynnik karbu u pochylenia linii zębów  $Y_\beta$

$$Y_\beta = 1 - \varepsilon_\beta \frac{\beta}{120}$$

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia w stopie zęba

### Naprężenia dopuszczalne w stopie zęba $\sigma_{FP}$



## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia w stopie zęba

### Granica zmęczenia materiału na zginanie $\sigma_{F\lim}$

Rodzaj materiału	Rodzaj obróbki cieplnej	Symbol wg PN-H	Oznaczenie wg PN-EN	Twardość boku zęba	$\sigma_{Hlim}$ [MPa]	$\sigma_{Flim}$ [MPa]
Zeliwo szare	---	200	EN-GJL-200	HB 170	270	<b>50</b>
		250	EN-GJL-250	HB 210	310	<b>60</b>
		350	EN-GJL-300	HB 230	360	<b>80</b>
Stal konstrukcyjna zwykłej jakości	---	St4		HB 125	290	<b>170</b>
		St5	E295	HB 150	340	<b>190</b>
		St6	E335	HB 180	400	<b>200</b>
		St7	E360	HB 208	460	<b>220</b>
Stal konstrukcyjna wyższej jakości	ulepszanie	20	C20	HV 140	440	<b>170</b>
	normalizowanie	45	C45	HV 185	590	<b>200</b>
	ulepszanie	55	C55	HV 210	620	<b>220</b>
Stal konstrukcyjna do ulepszenia cieplnego	ulepszanie	30H	34Cr4	HV 260	650	<b>270</b>
		40H	41Cr4	HV 260	650	<b>270</b>
		40HM	42CrMo4	HV 280	670	<b>290</b>
		34HNM	34CrNiMo6	HV 310	770	<b>320</b>
Stal do ulepszenia cieplnego hartowana powierzchniowo	hartowanie powierzchniowe łącznie z dnem wrębu	45	C45	HV 560	1100	<b>270</b>
		40H	41Cr4	HV 610	1280	<b>310</b>
		40HM	42CrMo4	HV 650	1360	<b>350</b>



## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia w stopie zęba

Współczynnik spiętrzenia naprężeń w kołach  
modelowych  $Y_{ST}$

$$Y_{ST} = 2$$

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia w stopie zęba

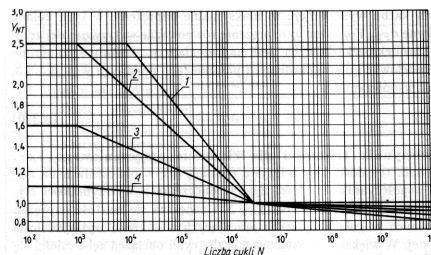
Współczynnik trwałości dla złamania zmęczeniowego  
 $Y_{NT}$

Dla wytrzymałości na  
nieskończoną liczbę cykli  
 $N > 10^6$

$$Y_{NT} = 1$$

Dla określonej ilości cykli  
(zgodnej z wykresem Wöhlera)  
 $N < 10^6$

$$Y_{NT} > 1$$

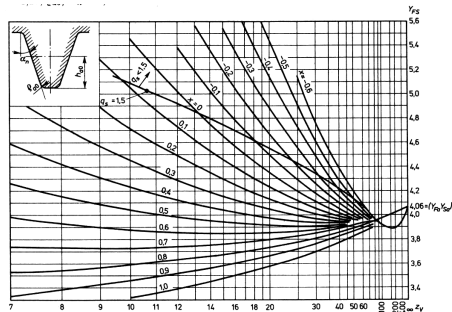


## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia w stopie zęba

### Współczynnik względnej wrażliwości na działanie karbu $Y_{\delta relT}$

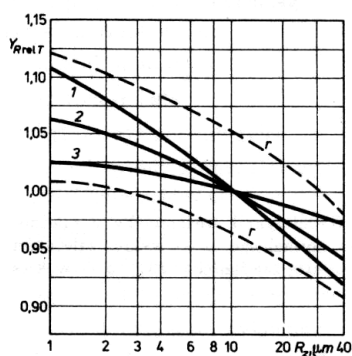
$$Y_{\delta relT} = 1 \quad \text{dla } q_s \geq 1,5$$

$$Y_{\delta relT} = 0,95 \quad \text{dla } 0 < q_s < 1$$



## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia w stopie zęba

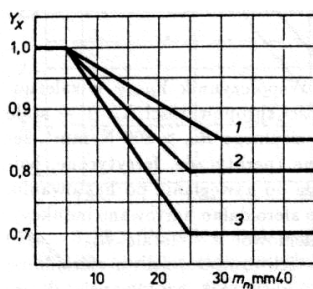
### Współczynnik względnej chropowatości powierzchni $Y_{RrelT}$



- 1 – stale do ulepszenia cieplnego  $R_m > 800 \text{ N/mm}^2$ , żeliwo sferoidalne (perlityczne, ferrytyczne, bainityczne), stale do nawęglania po hartowaniu, stal lub żeliwo sferoidalne hartowane indukcyjnie lub płomiennio,
- 2 – stale  $R_m < 800 \text{ N/mm}^2$ ,
- 3 – żeliwo szare, żeliwo sferoidalne (ferrytyczne, perlityczne), azotowane stale do nawęglania lub ulepszenia cieplnego,
- r – granice rozrzutu wyników doświadczalnych

## Obliczenia wytrzymałościowe – naprężenia w stopie zęba

### Współczynnik wielkości $Y_\kappa$



#### 1) materiały:

- stale konstrukcyjne zwykłej jakości ( $R_m < 800 \text{ N/mm}^2$ ),
- stale do ulepszenia cieplnego po ulepszeniu ( $R_m > 800 \text{ N/mm}^2$ ),
- żeliwa sferoidalne (perlityczne, ferrytyczne i bainityczne),
- żeliwa czarne ciągliwe (perlityczne)

#### 2) materiały

- stale do nawęglania po nawęglaniu i hartowaniu,
- stale konstrukcyjne hartowane indukcyjnie lub płomieniowo,
- stale konstrukcyjne do nawęglania i ulepszenia cieplnego cyjanowane,
- stale do azotowania i ulepszenia cieplnego azotowane,

#### 3) żeliwo szare i żeliwo sferoidalne (ferrytyczne)