

# Podstawy Konstrukcji Maszyn

## Wykład 8

### Przekładnie zębate część 1

Dr inż. Jacek Czarnigowski

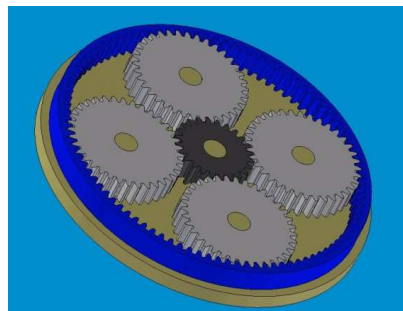
## Klasyfikacja przekładni zębatych

### 1. Ze względu na miejsce zazębienia

O zazębieniu **zewnątrznym**



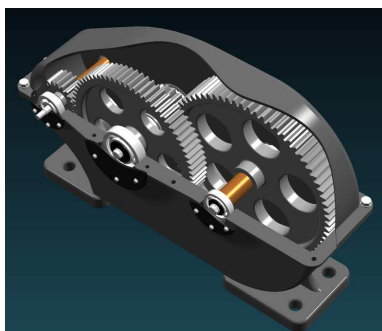
O zazębieniu **wewnętrznym**



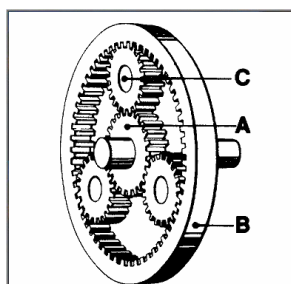
## Klasyfikacja przekładni zębatych

### 2. Ze względu na ruchomość osi

**O osiach stałych**



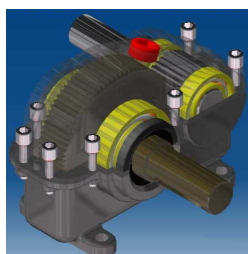
**Planetarne** – przynajmniej jedna oś przemieszcza się względem korpusu wykonując ruch okrężny względem osi centralnej



## Klasyfikacja przekładni zębatych

### 3. Ze względu na wzajemne położenie osi

**Równoległe**



**Kątowe**  
Osie obu kół przecinają się



**Wichrowate (przekładnie hipoidalne)**  
Osie obu kół nie przecinają się



## Klasyfikacja przekładni zębatych

### 4. Ze względu na kształt kół

Walcowe



Stożkowe



Ślimakowe



## Klasyfikacja przekładni zębatych

### 4. Ze względu na kształt linii zęba

O zębach prostych



O zębach śrubowych



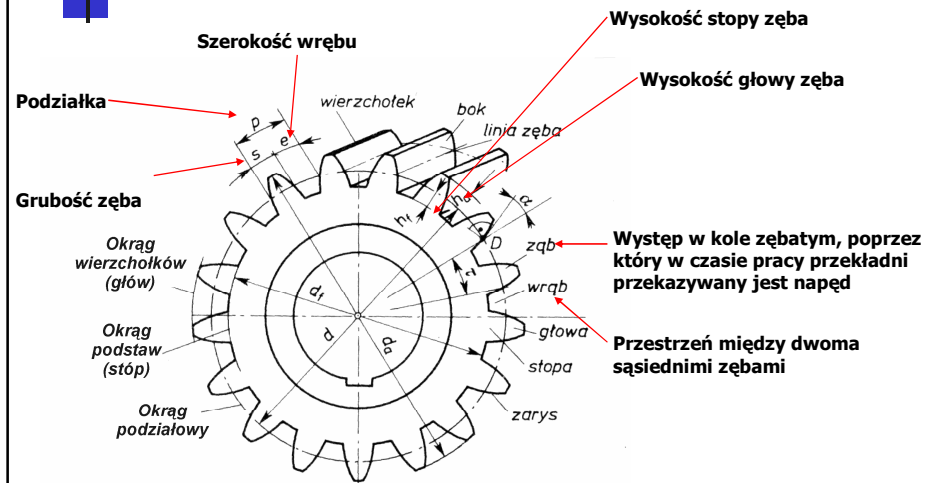
O zębach daszkowych



O zębach łukowych



## Pojęcia podstawowe – geometria koła walcowego o zębach prostych



## Pojęcia podstawowe – geometria koła walcowego o zębach prostych

**Podziałka obwodowa  $p$**  – długość łuku koła podziałowego zawarta między jednoimiennymi sąsiednimi bokami zębów.

$$\pi \cdot d = p \cdot z$$

Średnica podziałowa

Liczba zębów

$$d = \frac{p}{\pi} \cdot z$$

$$m = \frac{p}{\pi}$$

Moduł nominalny

## Pojęcia podstawowe – geometria koła walcowego o zębach prostych

**Moduł nominalny** – miara wielkości zęba wyrażana w [mm].

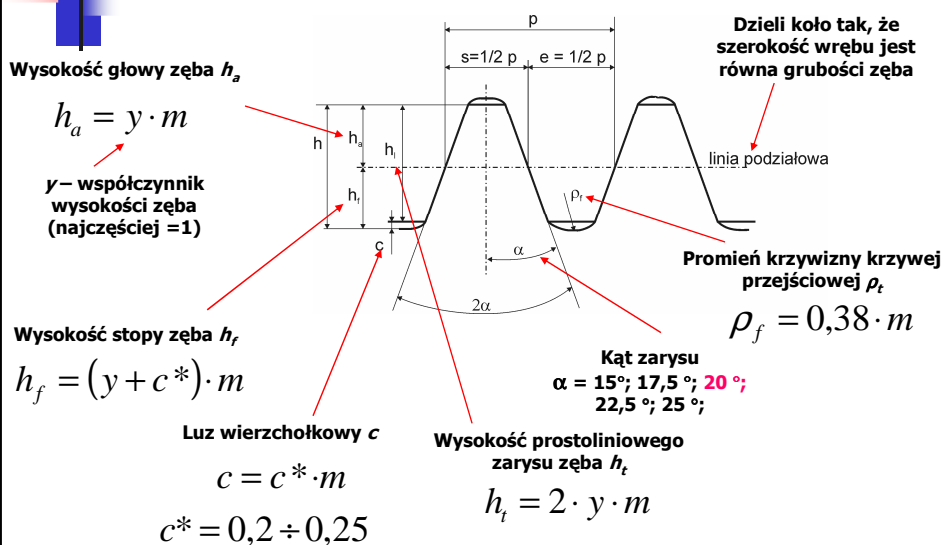
$$m = \frac{P}{\pi}$$

**Moduł jest znormalizowany:**

Szereg 1 (zalecany): 1; 1,25; 1,5; 2; 2,5; 3; 4; 5; 6; 8; 10 ...

Szereg 2 (dopuszczalny): 1,125; 1,375; 1,75; 2,25; 2,75; 3,5; 4,5; 5,5; 7 ...

## Pojęcia podstawowe – zarys odniesienia



## Pojęcia podstawowe – zarys odniesienia

### Podstawowe średnice

#### Średnica głów

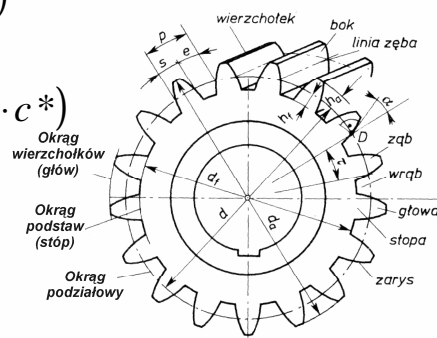
$$d_a = d + 2 \cdot h_a = m \cdot (z + 2 \cdot y)$$

#### Średnica stóp

$$d_f = d - 2 \cdot h_f = m \cdot (z - 2 \cdot y - 2 \cdot c^*)$$

#### Średnica podziałowa

$$d = m \cdot z$$

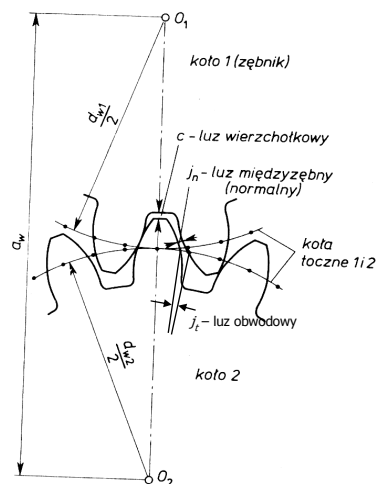


## Pojęcia podstawowe – luzy

**Luz wierzchołkowy  $c$**  – najmniejsza odległość w osi  $O_1O_2$  między walcem stóp jednego koła a walcem wierzchołków koła współpracującego

**Luz międzyzębny  $j_n$**  – najkrótsza odległość między niepracującymi bokami zęba przy istnieniu kontaktu boków pracujących

**Luz obwodowy  $j_t$**  – długość łuku tocznego o który można obrócić koło, aby doprowadzić boki niepracujące do styku



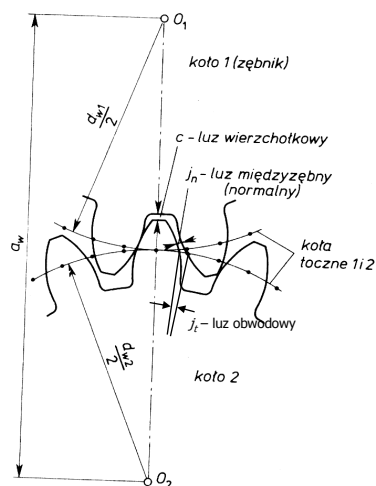
## Pojęcia podstawowe – odległość osi

**Zerowa odległość osi** – taka w której stykają się okręgi podziałowe

$$a = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{z_1 + z_2}{2} \cdot m$$

**Rzeczywista odległość osi** – taka w której stykają się okręgi toczne (walce zastępujące koła pracujące jak przekładnia cierna o stałym przełożeniu bez poślizgu)

$$a_w = \frac{d_{w1} + d_{w2}}{2}$$

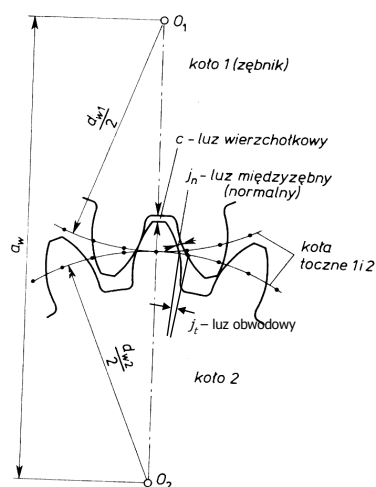


## Pojęcia podstawowe – odległość osi

**Odległość osi jest znormalizowana PN-76/M-88525**

**Szereg 1 (zalecany): 40; 50; 63; 80; 100; 125; 160; 200; 250 ...**

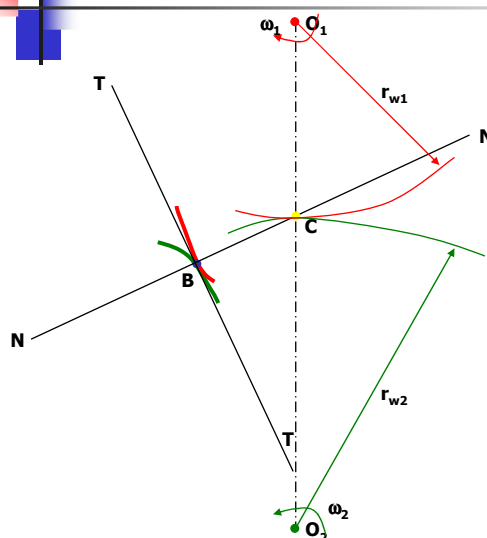
**Szereg 2 (dopuszczalny): 71; 90; 112; 140; 180; 224 ...**



## Podstawowe prawo ząbienia

Określa ono warunki jakie muszą spełniać zarysy zębów, aby zapewnić stałość przełożenia kinematycznego kół współpracujących

## Podstawowe prawo ząbienia



Dwa koła obracają się z prędkościami odpowiednio:  $\omega_1$  i  $\omega_2$

Zarys zębów styka się w punkcie B – punkt przyporu

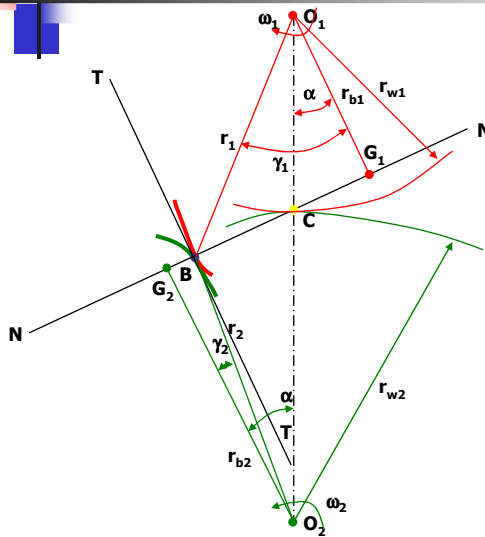
Przez punkt B prowadzimy proste:  
NN - normalną do styku zębów  
TT – styczną do styku zębów

Określamy punkt C na przecięciu prostych NN i  $O_1O_2$

Punkt C jest **biegunem ząbienia** a więc punktem podziału linii  $O_1O_2$  na koła toczne o promieniach  $r_{w1}$  i  $r_{w2}$



## Podstawowe prawo ząbienia



Wyznaczamy proste prostopadłe do prostej NN wychodzące odpowiednio z punktów  $O_1$  i  $O_2$  tworząc na przecięciu punkty  $G_1$  i  $G_2$

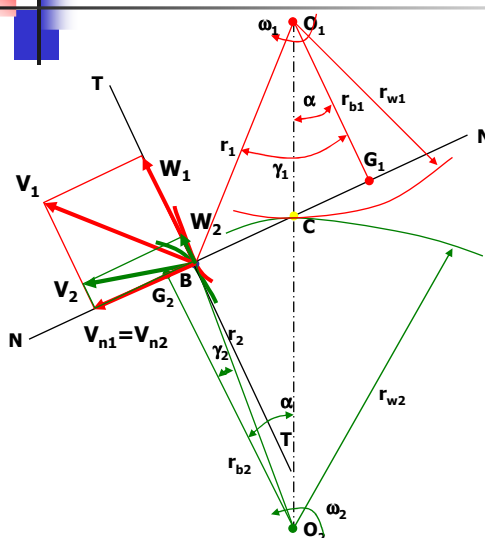
Odległości OG stanowią promień koła zasadniczego  $r_b$

Są one odchyłone od osi  $O_1O_2$  o kąt przyporu  $\alpha$

Punkt B oddalony jest od środków obrotu kół o promień odpowiednio  $r_1$  i  $r_2$

Promienie te są odchyłone od prostych OG o kąty odpowiednio  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$

## Podstawowe prawo ząbienia



Zakładając, że zęby są w stałym kontakcie oraz, że są nieodkształcalne to prędkości punktów styku wynoszą:

Prędkości są prostopadłe do promieni  $r$

Dla koła 1:

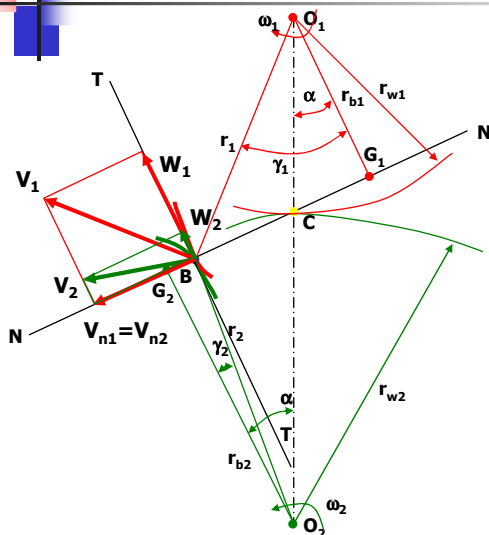
$$V_1 = \omega_1 \cdot r_1$$

Dla koła 2:

$$V_2 = \omega_2 \cdot r_2$$

Rozkładając te prędkości na proste NN i TT otrzymujemy odpowiednio prędkość normalną  $V_n$  i prędkość styczną  $W$

## Podstawowe prawo zązębienia



Założenie mówiące, że zęby są w stałym kontakcie oraz, że są nieodkształcalne to prędkości punktów powoduje, że:

$$V_{n1} = V_{n2}$$

Zatem:

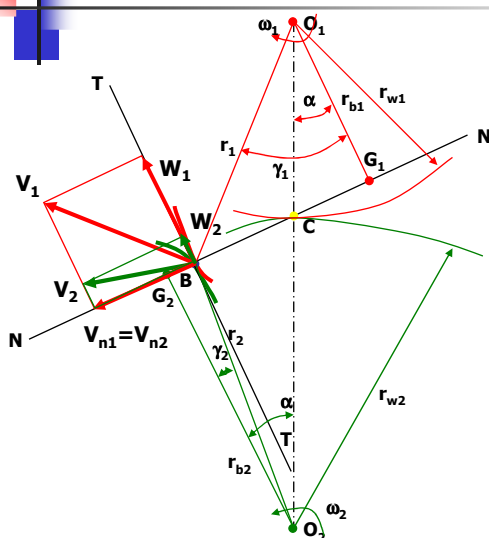
$$V_{n1} = V_1 \cdot \cos \gamma_1$$

$$V_{n2} = V_2 \cdot \cos \gamma_2$$

Stąd:

$$\omega_1 \cdot r_1 \cdot \cos \gamma_1 = \omega_2 \cdot r_2 \cdot \cos \gamma_2$$

## Podstawowe prawo zązębienia



Z rysunku wynika:

$$\cos \gamma_1 = \frac{r_{b1}}{r_1}$$

$$\cos \gamma_2 = \frac{r_{b2}}{r_2}$$

Zatem:

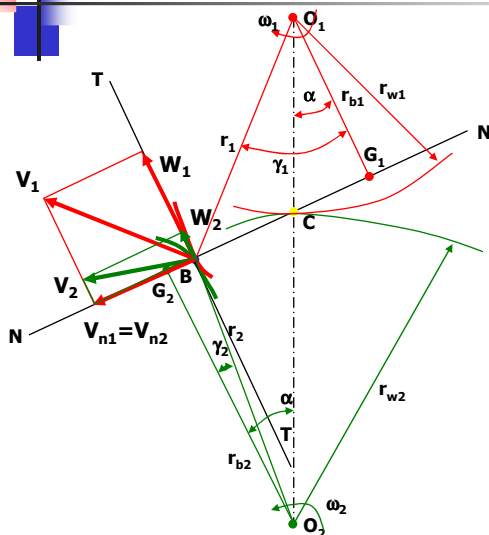
$$\omega_1 \cdot r_{b1} = \omega_2 \cdot r_{b2}$$

Ponieważ:

$$r_{b1} = r_{w1} \cdot \cos \alpha$$

$$r_{b2} = r_{w2} \cdot \cos \alpha$$

## Podstawowe prawo zążeńia



Otrzymujemy:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{b2}}{r_{b1}} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}$$

Przełożenie kinematyczne

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}$$

## Podstawowe prawo zążeńia

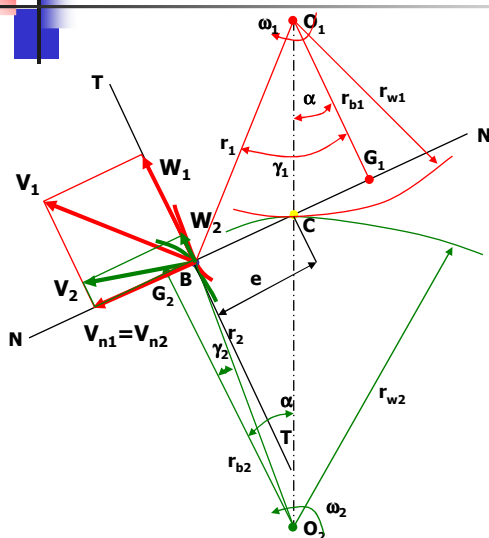
$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{w2}}{r_{w1}}$$

Podstawowe prawo zążeńia – prawo Willisa

W celu zapewnienia stałego przełożenia kinematycznego ( $i = const$ ) zarysy zębów powinny być takie, aby prosta **normalna NN** w **dowolnym punkcie styku B** dzieliła odcinek  $O_1O_2$  w stałym stosunku (aby punkt C był zawsze w tym samym miejscu)

Zarysy zębów spełniające ten warunek nazywamy **zarysami sprzężonymi**

## Poślizg względny



W odróżnieniu od prędkości normalnych gdzie:

$$V_{n1} = V_{n2}$$

Prędkości styczne dwóch zębów są różne, a różnica ich jest prędkością poślizgu:

$$V_s = W_2 - W_1$$

Wprowadzając odległość punktu B od punktu C możemy określić:

$$V_s = e \cdot (\omega_1 + \omega_2)$$

## Poślizg względny

Zatem względny poślizg wynosi:


$$\frac{V_s}{V} = \frac{e \cdot (\omega_1 + \omega_2)}{r_{w2} \cdot \omega_2} = \frac{e}{r_{w2}} \cdot \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} + 1 \right) = \frac{e}{r_{w2}} \cdot (i + 1)$$

**Wnioski:**

Prędkość poślizgu wzrasta wraz z odległością punktu przyporu B od punktu zazębienia C

Prędkość poślizgu wzrasta wraz z przełożeniem

Zęby zużywać się będą u wierzchołka i w dolnej części podstawy zęba gdzie prędkość poślizgu przy zazębieniu jest największa



## Zarysy zębów

**Zarys zębów powinien być sprzężony (spełniać prawo Willisa)**

**Dodatkowe cechy:**

- wytrzymałość
- technologiczność
- niewrażliwość na błędy odległości osi
- odporność na zużycie
- stałość kierunku sił międzyzębnych



## Zarysy zębów

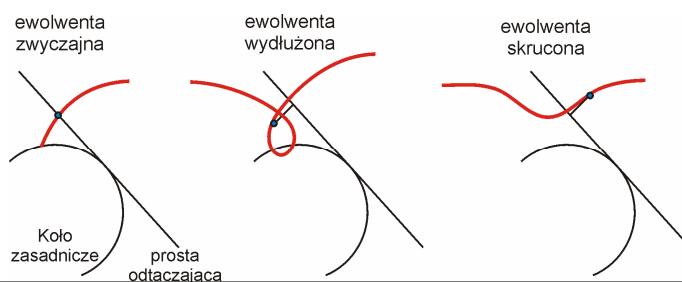
### Stosowane zarysy zębów

<p><b>Liniowe</b></p> <p><b>Kołowe</b></p>	}	<p>Pierwsze zarysy stosowane na koła zębate – obecnie całkowicie wycofane</p>
<p><b>Ortocykloidy</b> ( krzywa kreślona przez punkt koła toczącego się po prostej)</p> <p><b>Epicykloidy</b> (krzywa kreślona przez punkt koła toczącego się na zewnątrz innego koła)</p> <p><b>Hipocykloidy</b> (krzywa kreślona przez punkt koła toczącego się na wewnątrz innego koła)</p>	}	<p>Wyparty zarysy liniowe i kołowe a następnie zostały wyparte przez zarys ewolwentowy. Obecnie stosowane w mechanizmach zegarkowych. Zaleta: możliwość stosowania dużych przełożeń</p>
<p><b>Ewolwenta</b></p> <p><b>Kołowo-łukowe</b></p>	}	<p>Podstawowy obecnie stosowany zarys koła</p> <p>Najnowszy zarys. Charakteryzuje się małymi naciskami między zębami. Wadę stanowi konieczność produkcji kół jako par (brak uniwersalności i trudności obróbkowe)</p>

## Zarys ewolwentowy

**Ewolwenta** – linia będąca torem dowolnego punktu związanego z prostą toczącą się po okręgu bez poślizgu.

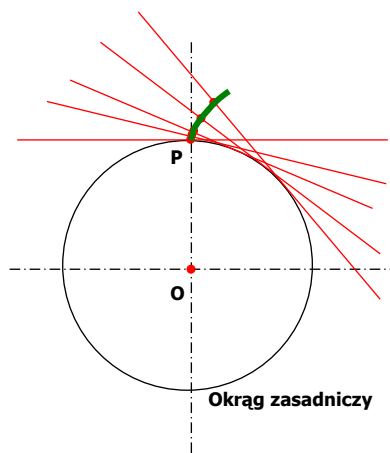
Okrąg po którym toczy się prosta nazywany jest **okręgiem zasadniczym**.



## Zarys ewolwentowy

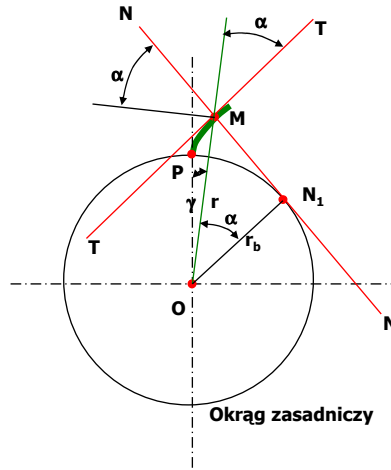
### Geometria ewolwenty

Prosta toczy się po okręgu zasadniczym a punkt na niej się znajdujący wykreśla ewolwentę



## Zarys ewolwentowy

### Geometria ewolwenty



Dla wybranego położenia prostej tworzącej mamy:

Prosta tworząca jest normalna do zarysu w punkcie M – punkt przyporu

Prosta TT styczna do ewolwenty w punkcie M

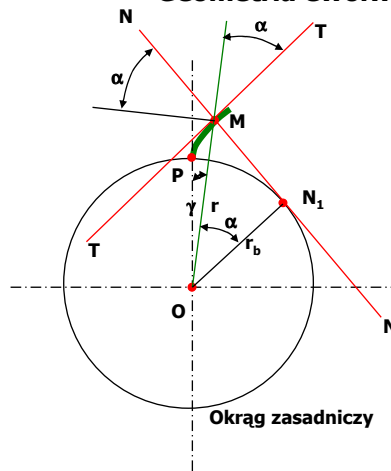
Promień  $r$  – łączący punkt O z M jest odchylony od osi OP o kąt  $\gamma$

Prosta tworząca styka się z okręgiem zasadniczym w punkcie  $N_1$

Kąt pomiędzy prostą NN a normalną do promienia  $r$  (OM) jest **Kątem zarysu ewolwenty**

## Zarys ewolwentowy

### Geometria ewolwenty



Ze sposobu powstawania ewolwenty wynika, że długość łuku  $PN_1$  jest równa odległości punktów  $MN_1$

Ponieważ:

$$PN_1 = r_b \cdot (\gamma + \alpha)$$

$$MN_1 = r_b \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Zatem:

$$r_b \cdot (\gamma + \alpha) = r_b \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\gamma = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$$

Kąt  $\gamma$  jest **funkcją ewolwentową** zwaną także **involutą**

$$\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$$



## Inwoluta

Inwoluta = funkcja ewolwentowa

$$\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{tg} \alpha - \alpha$$

Kąt podawany w [radianach]

Wartość inwoluty jest także podawana w tabelach.

**UWAGA!** Wartość inwoluty należy podawać minimum do 5 miejsca po przecinku np. 0,02389.



## Zarys ewolwentowy – zalety i wady

### Zalety:

Jest zarysem sprzężonym. Zachowuje tę cechę także przy zmianie odległości osi

Jest łatwy do wykonania. Uniwersalność narzędzi obróbkowych do wielu kół. Możliwość uzyskania dużych dokładności i małej chropowatości powierzchni styku.

Siła międzyzębna zachowuje stały kierunek w czasie współpracy zębów

Uniwersalność kół. Praca kół o różnych ilościach zębów i tych samych cechach geometrycznych.



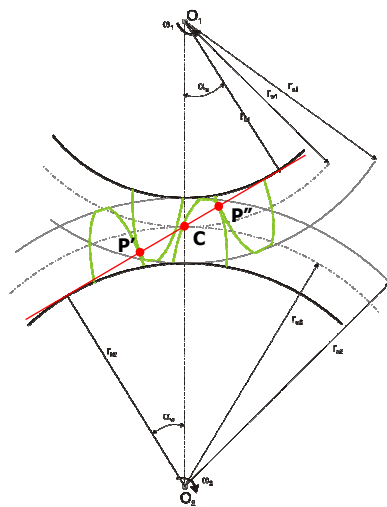
## Zarys ewolwentowy – zalety i wady

### Wady:

Mała powierzchnia styku (stykają się dwie powierzchnie wypukłe)  
Duże naciski są przyczyną zmniejszenia trwałości

Duże prędkości poślizgów przy zazębianiu i wyzębianiu się kół.  
Zwiększone zużycie głów i podstaw zębów.

## Zazębienie ewolwentowe

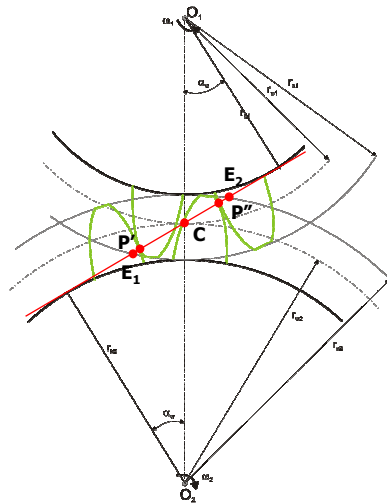


Dwa koła współpracujące mają wspólną linię normalną do punktów przyporu przecinającą linię  $O_1O_2$  w punkcie C. Linia ta jest styczna do kół zasadniczych.

Na linii tej występuje styk par zębów odpowiednio w punktach P' i P''

Linia ta zawiera wszystkie punkty przyporu zachodzące podczas współpracy obu kół. Nosi ona nazwę **Linii Przyporu**

## Zazębienie ewolwentowe

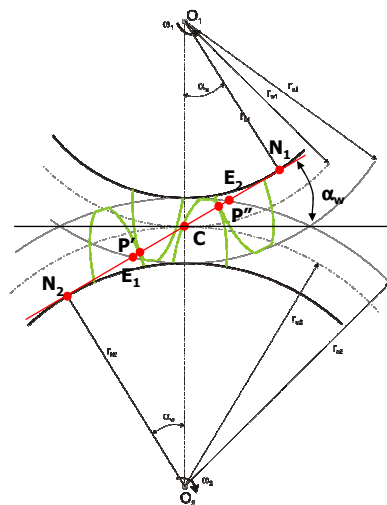


Ponieważ zarysy zębów są od góry ograniczone okręgiem wierzchołków zatem styk między kołami może zachodzić tylko na pewnym odcinku linii przyporu.

Są to odpowiednio punkty  $E_1$  i  $E_2$

Część linii przyporu ograniczona tymi punktami nosi nazwę odcinka przyporu

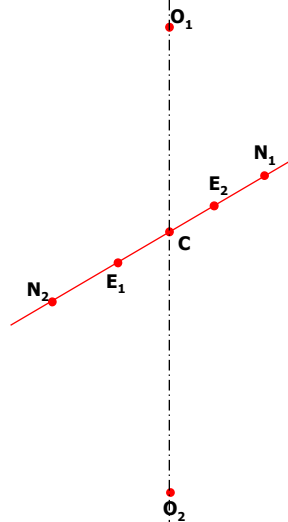
## Zazębienie ewolwentowe



Kąt zawarty między linią przyporu a linią normalną do osi  $O_1O_2$  w punkcie C nazywany jest **tocznym kątem przyporu**

Linia przyporu styka się z okręgami zasadniczymi w punktach  $N_1$  i  $N_2$

## Liczba przyporu

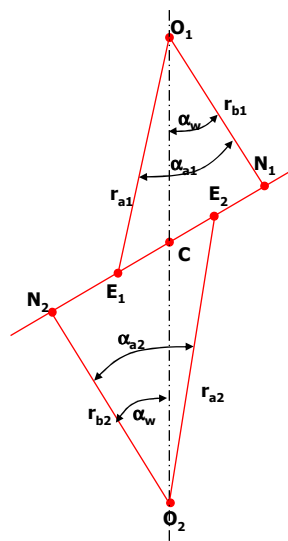


Liczba przyporu jest wskaźnikiem zazębienia, mówiącym ile par zębów jest jednocześnie we współpracy (średnio dla całego obrotu kół)

Można ją obliczyć jako stosunek długości odcinka przyporu do podziałki  $p$

$$\varepsilon = \frac{E_1 E_2}{p}$$

## Liczba przyporu



Analizując rysunek można zauważyć, że:

$$E_1 E_2 = N_1 E_1 + N_2 E_2 - N_1 N_2$$

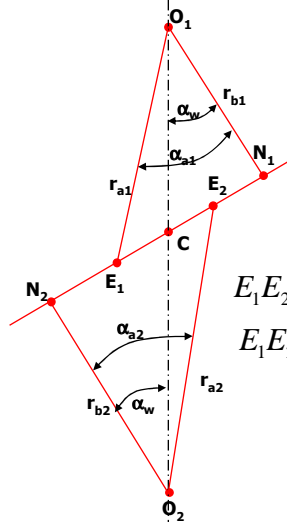
Wprowadzając odpowiednie kąty i promienie

Gdzie  $\alpha_a$  – kąt głów

$$\cos \alpha_{a1} = \frac{r_{b1}}{r_{a1}} = \frac{d_1}{d_{a1}} \cdot \cos \alpha_w$$

$$\cos \alpha_{a2} = \frac{r_{b2}}{r_{a2}} = \frac{d_2}{d_{a2}} \cdot \cos \alpha_w$$

## Liczba przyporu



Otrzymujemy:

$$N_1E_1 = r_{b1} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a1}$$

$$N_2E_2 = r_{b2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a2}$$

$$N_1N_2 = (r_{b1} + r_{b2}) \cdot \operatorname{tg} \alpha_w$$

Stąd:

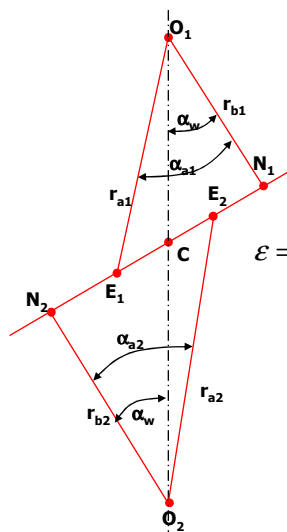
$$E_1E_2 = r_{b1} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a1} + r_{b2} \cdot \operatorname{tg} \alpha_{a2} - (r_{b1} + r_{b2}) \cdot \operatorname{tg} \alpha_w$$

$$E_1E_2 = r_{b1} \cdot (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + r_{b2} (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)$$

Podziałka wynosi:

$$p = \frac{\pi \cdot d_b}{z} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_b}{z}$$

## Liczba przyporu



Po przekształceniach  
otrzymujemy liczbę przyporu:

$$\varepsilon = \frac{1}{2 \cdot \pi} [z_1 \cdot (\operatorname{tg} \alpha_{a1} - \operatorname{tg} \alpha_w) + z_2 \cdot (\operatorname{tg} \alpha_{a2} - \operatorname{tg} \alpha_w)]$$

Dla zapewnienia ciągłości ząbkowania  
liczba przyporu powinna być większa od 1.

Ze względu na niedokładności  
wykonania przyjmuje się:

$$\varepsilon \geq 1,15 \div 1,25$$



## Zazębienie ewolwentowe

Analizując zazębienie można określić, że rzeczywista odległość osi wynosi:

$$a_w = \frac{r_{b1}}{\cos \alpha_w} + \frac{r_{b2}}{\cos \alpha_w}$$

Zatem:

$$a_w \cdot \cos \alpha_w = r_{b1} + r_{b2}$$

Jednocześnie z własności ewolwenty wynika:

$$r_{b1} = r_1 \cdot \cos \alpha$$

$$r_{b2} = r_2 \cdot \cos \alpha$$



## Zazębienie ewolwentowe

Jednocześnie wiemy, że zerowa odległość osi to:

$$a = r_1 + r_2$$

Zatem:

$$a_w \cdot \cos \alpha_w = a \cdot \cos \alpha$$

## Metody obróbki kół zębatach

Stosowane są dwie podstawowe metody obróbki kół zębatach:

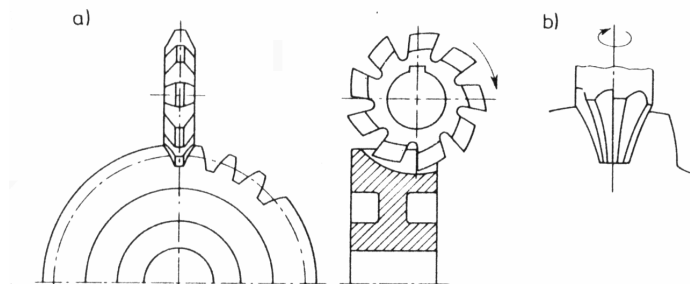
Metoda kształtowa

Metoda obwiedniowa

## Metody obróbki kół zębatach

### Metoda kształtowa

Polega na zastosowaniu narzędzia, którego część skrawająca ma kształt wrębu obrabianego koła.



Można zastosować:  
Frezowanie krążkowe, palcowe, dłutowanie, przeciąganie

## Metody obróbki kół zębatych

### Metoda kształtowa

Ze względu na to, że wymiary wrębu koła zależą od modułu oraz ilości zębów, narzędzia są specjalizowane do danego koła.

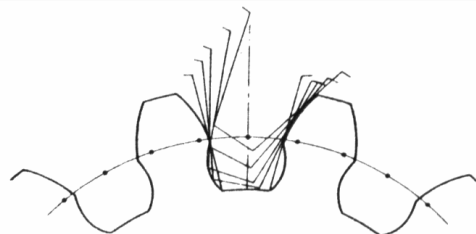
Dopuszczalne jest zastosowanie jednego narzędzia do kilku kół ale w ten sposób wprowadza się błędy w zarys kół.

Metoda stosowana rzadko. Głównie do kół o małym znaczeniu lub bardzo dużych.

## Metody obróbki kół zębatych

### Metoda obwiedniowa

Polega na wykorzystaniu prostego narzędzia współpracującego z nacinanym kołem. Zarys powstaje poprzez zazębienie się koła z narzędziem.



Narzędzie może mieć postać:

- listwy zębatej,
- koła zębatego
- ślimaka

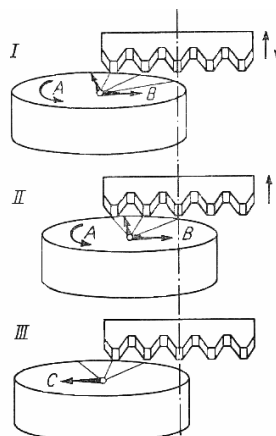
## Metody obróbki kół zębatach

### Metoda obwiedniowa Maaga

Narzędzie ma postać listwy zębatej.

Narzędzie wykonuje ruch roboczy (postępowo-zwrotny).

Koło wykonuje ruch obrotowy i postępowy.



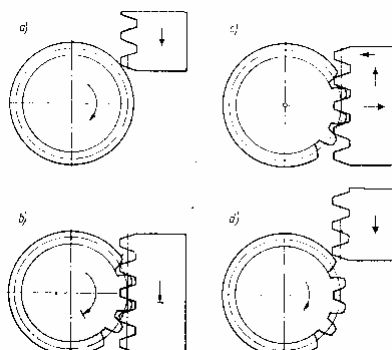
## Metody obróbki kół zębatach

### Metoda obwiedniowa Sunderlanda

Narzędzie ma postać listwy zębatej.

Narzędzie wykonuje ruch roboczy (postępowo-zwrotny) oraz pomocniczy (postępowy).

Koło wykonuje ruch obrotowy.





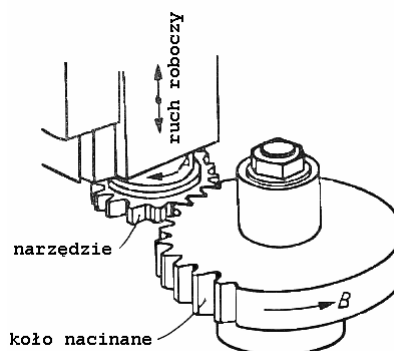
## Metody obróbki kół zębatych

### Metoda obwiedniowa Fellowsa

Narzędzie ma postać koła zębatego.

Narzędzie wykonuje ruch roboczy (postępowo-zwrotny) oraz pomocniczy (obrotowy).

Koło wykonuje ruch obrotowy. Narzędzie i koło współpracują ze sobą.



## Metody obróbki kół zębatych

### Metoda obwiedniowa Gleasona

Narzędzie ma postać ślimaka z wyciętymi rowkami wzdłuż osi narzędzia. Ślimak ma w przekroju kształt zębatki.

Narzędzie wykonuje ruch roboczy (obrotowy).

Koło wykonuje ruch obrotowy oraz postępowy (zbliża się do ślimaka). Narzędzie i koło współpracują ze sobą.

