



Podstawy Konstrukcji Maszyn

Wykład 5

Wały i osie

Dr inż. Jacek Czarnigowski



Pojęcia podstawowe

Osią lub wałem nazywamy element wykonujący ruchy obrotowe lub wahadłowe.

Najczęściej osadzony jest w łożyskach a na nim osadzone są inne części maszyn

←

Wał – element którego głównym zadaniem jest przenoszenie momentu obrotowego

↘

Oś – element obciążony jedynie momentem gnącym

Pojęcia podstawowe

Osie

element obciążony jedynie momentem gnącym



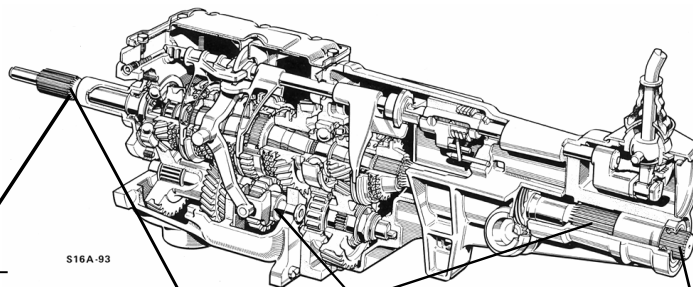
Stałe – kierunek działania obciążenia jest stały względem osi

Ruchome – obciążenie zmienia kierunek działania

Pojęcia podstawowe

Wały

element przenoszący głównie moment skręcający



Czynny – napędzający

Główny

Pomocniczy

Bierny – napędzany

Pojęcia podstawowe

Osie i wały

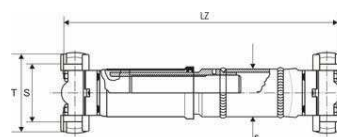
Gładkie



Kształtowe pełne



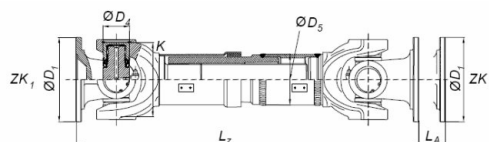
Kształtowe drążone



Jednolite



Składane



Wykorbione



Pojęcia podstawowe

Osie i wały

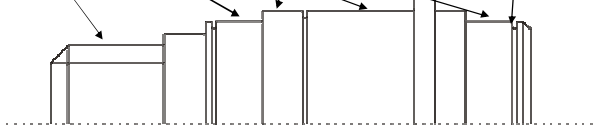
Pojęcia podstawowe

Osie i wały – elementy podstawowe

Czopy – powierzchnie na których następuje styk z innymi elementami

Powierzchnie swobodne –
powierzchnie przejściowe

Pierścienie i kołnierze –
powierzchnie oporowe dla
elementów osadzanych na
wałach



Czop ruchowy – element mocowany
przesuwa się w czasie pracy

Czopy spoczynkowy – element mocowany
nie przesuwa się w czasie pracy

Pojęcia podstawowe

Czopy - wymiary

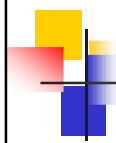
PN/M-85000

Zalecane:

10, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 25, 28, 32, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 70, 80 ...

Dopuszczane:

19, 24, 30, 38, 42, 56, 63, 65, 71, 75



Materiały

Stale węglowe:

E295, S275JR – wały maszynowe, osie średnie i małe obciążenie

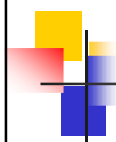
C35, C40, C45 – wały maszynowe większe obciążenia, duże naciski

Stale stopowe:

42CrMo4, 36CrNiMo4 – wały maszynowe, osie zmienne i udarowe

15Cr2, 16MnCr5 – nawęglane – duża odporność na ścieranie

Żeliwa sferoidalne – wały i osie odlewane lub kute (dobre tłumienie drgań)



Projektowanie wału lub osi

Etapy projektowania wału lub osi


1 etap: Projektowanie wstępne

Wstępne ukształtowanie na podstawie obliczeń uproszczonych oraz narzuconych ograniczeń wymiarowych

2 etap: Obliczenia sprawdzające

- Obliczenia sztywności
- obliczenia dynamiczne
- obliczenia zmęczeniowe


3 etap: Ostateczne ukształtowanie wału



Projektowanie wału lub osi – 1 etap

Projektowanie wstępne – obliczenia wytrzymałościowe

Osie	Wały
<p>Zginanie i rozciąganie (ściskanie)</p>	<p>Zginanie i rozciąganie (ściskanie) oraz skręcanie</p>



Projektowanie wału lub osi – 1 etap

Projektowanie wstępne – obliczenia wytrzymałościowe

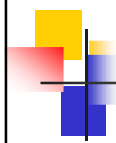
Osie Zginanie i rozciąganie (ściskanie)

$$\sigma_z = \sigma_g + \sigma_{r(c)}$$

$$\sigma_z = \frac{M_g}{W_x} + \frac{P_w}{F}$$

Siła wzdłużna

$\sigma_z \leq k_g$
 $k_{gj} \quad k_{go}$
 Z uwzględnieniem karbu
 $\delta = 1,5 \div 1,7$



Projektowanie wału lub osi – 1 etap

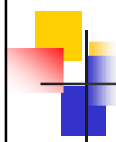
Projektowanie wstępne – obliczenia wytrzymałościowe

Wały **Zginanie** i rozciąganie (ściskanie) oraz **skręcanie**

Zatem niezbędne jest zastosowanie hipotezy Hubera

$$\sigma_z = \sqrt{(\sigma_g + \sigma_{r(c)})^2 + (\alpha \cdot \tau_s)^2} \quad \text{W przypadku przewagi naprężeń normalnych}$$

$$\tau_z = \sqrt{\left[\frac{1}{\alpha}(\sigma_g + \sigma_{r(c)})\right]^2 + (\tau_s)^2} \quad \text{W przypadku przewagi naprężeń stycznych}$$



Projektowanie wału lub osi – 1 etap

Projektowanie wstępne – obliczenia wytrzymałościowe

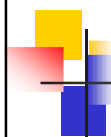
Gdzie:

α – współczynnik redukcyjny (materiał i sposób obciążenia)

Obciążenia tego samego typu:
$$\alpha = \frac{k_g}{k_s} = \frac{k_{go}}{k_{so}} = \frac{k_{gj}}{k_{sj}} \approx \sqrt{3}$$

Obciążenia różnych typów:
$$\alpha = \frac{k_{gj}}{k_{so}} \approx \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = \frac{k_{go}}{k_{sj}} \approx 2 \cdot \sqrt{3}$$



Projektowanie wału lub osi – 1 etap

Projektowanie wstępne – obliczenia wytrzymałościowe

Wały Zginanie i rozciąganie (ściskanie) oraz skręcanie

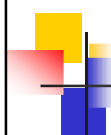
Najczęściej $\sigma_g \gg \sigma_{r(c)}$ Zatem rozciąganie (ściskanie jest pomijane)

$$\sigma_z = \sqrt{(\sigma_g)^2 + (\alpha \cdot \tau_s)^2}$$

W przypadku przewagi naprężeń normalnych

$$\tau_z = \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha} \sigma_g\right)^2 + (\tau_s)^2}$$

W przypadku przewagi naprężeń stycznych



Projektowanie wału lub osi – 1 etap

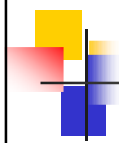
Projektowanie wstępne – obliczenia wytrzymałościowe

W pierwszym etapie projektowania nie posiadamy informacji o naprężeniach a tylko o obciążeniach.

$$\sigma_g = \frac{M_g}{W_x} \quad \tau_s = \frac{M_s}{W_o}$$

Dla przekrojów kołowych typowych dla wałów i osi

$$W_o = 2 \cdot W_x$$



Projektowanie wału lub osi – 1 etap

Projektowanie wstępne – obliczenia wytrzymałościowe

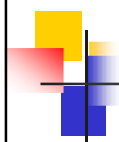
Zatem

$$\sigma_z = \frac{1}{W_x} \sqrt{(M_g)^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \cdot M_s\right)^2} = \frac{M_z}{W_x} \leq k_{go}$$

W przypadku przewagi naprężeń normalnych
 $M_s < 2 \cdot M_g$

$$\tau_z = \frac{1}{W_o} \sqrt{\left(\frac{2}{\alpha} M_g\right)^2 + (M_s)^2} = \frac{M_z}{W_o} \leq k_s \quad (k_{sj} \quad k_{so})$$

W przypadku przewagi naprężeń stycznych $M_s \geq 2 \cdot M_g$



Projektowanie wału lub osi – 1 etap

Projektowanie wstępne – obliczenia wytrzymałościowe

Stąd odpowiednio

W przypadku przewagi naprężeń normalnych

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_z}{\pi \cdot k_{go}}}$$

W przypadku przewagi naprężeń stycznych

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_z}{\pi \cdot k_s} \leftarrow k_{sj} \quad k_{so}}$$

Przykład 5.01 Projektowanie wału – 1 etap

Zaprojektować wstępnie wał z kołem zębatym o zębach śrubowych.

Dane:

$$M_s = 95,5 \text{ Nm}$$

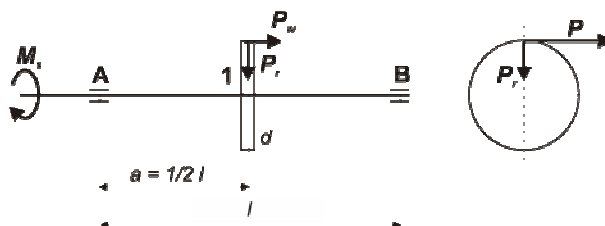
$$P = 3265 \text{ N}$$

$$P_w = 754 \text{ N}$$

$$P_r = 1182 \text{ N}$$

$$d = 58,50 \text{ mm}$$

$$l = 100 \text{ mm}$$



Materiał: stal 41Cr4

$$k_{go} = 110 \text{ MPa}$$

$$k_{sj} = 120 \text{ MPa}$$

Przykład 5.01 Projektowanie wału – 1 etap

1. Obliczenie obciążeń wału – reakcji

Obliczenia można prowadzić w dwóch prostopadłych

Płaszczyzna XZ

$$\sum M_{iA} = 0$$

$$P \cdot \frac{1}{2} \cdot l - R_{Bx} \cdot l = 0$$

$$R_{Bx} = \frac{1}{2} \cdot P = 1632,5 \text{ N}$$

$$\sum P_{iz} = 0$$

$$R_{Ax} - P + R_{Bx} = 0$$

$$R_{Ax} = P - R_{Bx} = 1632,5 \text{ N}$$

Przykład 5.01 Projektowanie wału – 1 etap

1. Obliczenie obciążeń wału – reakcji

Diagram showing a shaft of length l supported at points A and B. A force P is applied at point 1, which is at a distance $a = 1/2 l$ from A. The shaft is subjected to a torque M_s at A. The forces are decomposed into components P_r and P_w . The diagram shows the shaft in the YZ plane, with reaction forces R_{Ax} , R_{Bx} , R_{Ay} , and R_{By} .

Płaszczyzna YZ

$$\sum M_{iA} = 0$$

$$P_r \cdot \frac{1}{2} \cdot l + P_w \cdot \frac{d}{2} - R_{By} \cdot l = 0$$

$$R_{By} = \frac{1}{2} P_r + P_w \frac{d}{2 \cdot l} = 811,5 \text{ N}$$

$$\sum P_{iz} = 0$$

$$R_{Ay} - P_r + R_{By} = 0$$

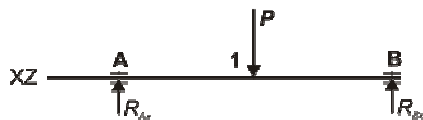
$$R_{Ay} = P_r - R_{By} = 370,5 \text{ N}$$

Przykład 5.01 Projektowanie wału – 1 etap

2. Obliczenie momentów zginających także w dwóch płaszczyznach

Obliczenia prowadzone są jedynie dla najważniejszych punktów wału – czyli dla czopów: osadzenie łożysk i koła zębatego (punkty A, B i 1)

Płaszczyzna XZ



Konieczna zmiana zasady
wyznaczania znaku momentu



$$M_{zxA} = 0$$

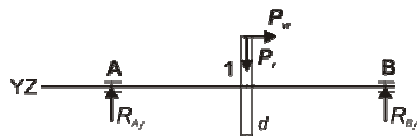
$$M_{xz1} = R_{Ax} \cdot \frac{1}{2} \cdot l = 81,63 \text{ Nm}$$

$$M_{zxB} = 0$$

Przykład 5.01 Projektowanie wału – 1 etap

2. Obliczenie momentów zginających także w dwóch płaszczyznach

Płaszczyzna YZ



$$M_{yzA} = 0$$

$$M_{yz1(\text{przed})} = R_{Ay} \cdot \frac{1}{2} \cdot l = 18,53 \text{ Nm}$$

$$M_{yz1(\text{po})} = R_{Ay} \cdot \frac{1}{2} \cdot l + P_w \cdot \frac{d}{2} = 40,58 \text{ Nm}$$

$$M_{yzB} = 0$$

Przykład 5.01 Projektowanie wału – 1 etap

3. Obliczenie wypadkowego momentu zginającego

Momenty zginające z dwóch płaszczyzn składamy geometrycznie

$$M_g = \sqrt{M_{xz}^2 + M_{yz}^2}$$

Zatem:

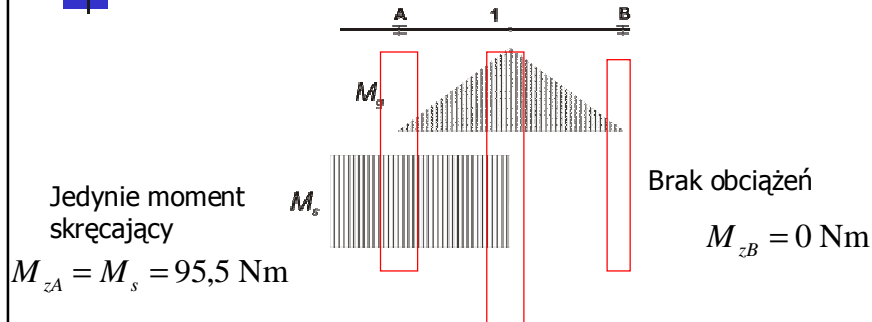
$$M_{gA} = 0$$

$$M_{g1} = \sqrt{M_{xz1}^2 + M_{yz1(\text{po})}^2} = 91,16 \text{ Nm}$$

$$M_{gB} = 0$$

Przykład 5.01 Projektowanie wału – 1 etap

4. Obliczenie momentu zastępczego



Oba momenty ale moment skręcający nie przeważa – redukcja na moment gnący

$$M_{zA} = \sqrt{M_{g1}^2 + \left(\frac{\alpha}{2} M_s\right)^2} \quad \alpha = \frac{k_{go}}{k_{sj}} = 0,92 \quad M_{zA} = 101,2 \text{ Nm}$$

Przykład 5.01 Projektowanie wału – 1 etap

5. Obliczenie średnic teoretycznych

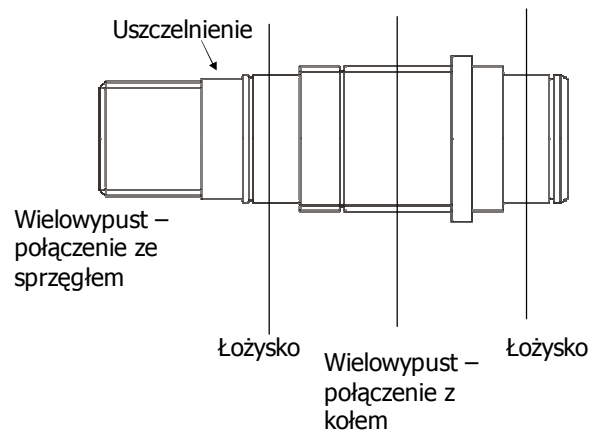
Podpora A: $d_A = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{zA}}{\pi \cdot k_{sj}}} = 15,94 \text{ mm}$

Koło zębate 1: $d_1 = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{zA}}{\pi \cdot k_{go}}} = 21,08 \text{ mm}$

Podpora B: $d_B = 0 \text{ mm}$

Przykład 5.01 Projektowanie wału – 1 etap

6. Wstępne projektowanie wału



Wymiary dobierane są z norm!

Projektowanie wału lub osi – 2 etap

Projektowanie sprawdzające 2.1 – obliczenia sztywności

Statyczne

Ugięcie pod wpływem obciążenia siłami

Dynamiczne

Niewyrównoważenie

Projektowanie wału lub osi – 2 etap

Projektowanie sprawdzające 2.1 – obliczenia sztywności

Sztywność statyczna - zginanie

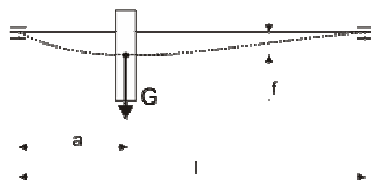
Obliczana jest z energii odkształcenia sprężystego element

$$\frac{d^2 f}{dl^2} = -\frac{M_g(l)}{E \cdot I_x}$$

Projektowanie wału lub osi – 2 etap

Projektowanie sprawdzające 2.1 – obliczenia sztywności

Sztywność statyczna dla wału gładkiego



$$f = \frac{G \cdot a^2 \cdot (l - a)^2}{3 \cdot l \cdot E \cdot I_x}$$

G – moduł sprężystości
postaciowej (moduł Kirhoffa)



Projektowanie wału lub osi – 2 etap

Projektowanie sprawdzające 2.1 – obliczenia sztywności

Sztywność statyczna - skręcanie

$$\phi = \int_l \frac{M_s}{G \cdot I_o} dl$$

Wartość względna

$$\varphi = \frac{\phi}{l} \approx \frac{M_s}{G \cdot I_o} [\text{rad} / \text{m}]$$



Projektowanie wału lub osi – 2 etap

Projektowanie sprawdzające 2.1 – obliczenia sztywności

Sztywność statyczna – wartości dopuszczalne

Zginanie:

$$f_{dop} = (0,0002 \div 0,0003) \cdot l$$

$$f_{dop} = (0,005 \div 0,01) \cdot m \quad \text{Koła zębate (m-moduł)}$$

Skręcanie:

$$\varphi_{dop} = 0,0025 [\text{rad} / \text{m}] \quad \text{Skręcanie obustronne}$$

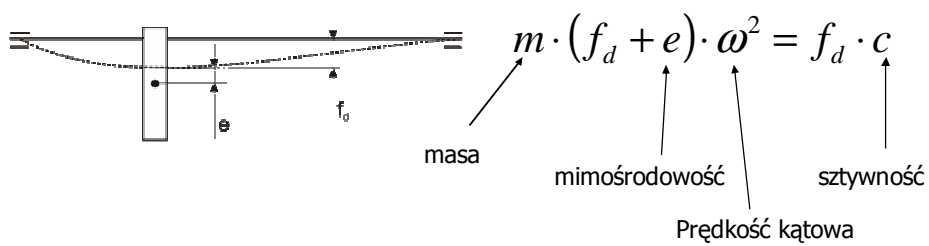
$$\varphi_{dop} = 0,004 [\text{rad} / \text{m}] \quad \text{Skręcanie jednostronne}$$

Projektowanie wału lub osi – 2 etap

Projektowanie sprawdzające 2.2 – obliczenia dynamiczne

Sztywność dynamiczna - zginanie

Wynika ona z mimośrodowości umieszczenia masy na wale



Projektowanie wału lub osi – 2 etap

Projektowanie sprawdzające 2.2 – obliczenia dynamiczne

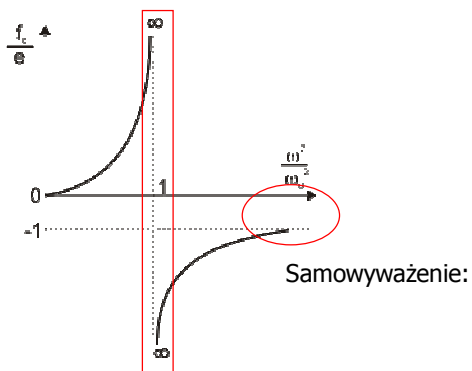
Sztywność dynamiczna - zginanie

$$f_d = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot e}{c - m \cdot \omega^2}$$

Przypadek szczególny:

$$c = m \cdot \omega^2 \quad f_d = +\infty$$

REZONANS



Projektowanie wału lub osi – 2 etap

Projektowanie sprawdzające 2.2 – obliczenia dynamiczne

Drgania rezonansowe – prędkość krytyczna

$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Zatem:

Dla wału gładkiego:

$$c = \frac{m \cdot g}{f}$$

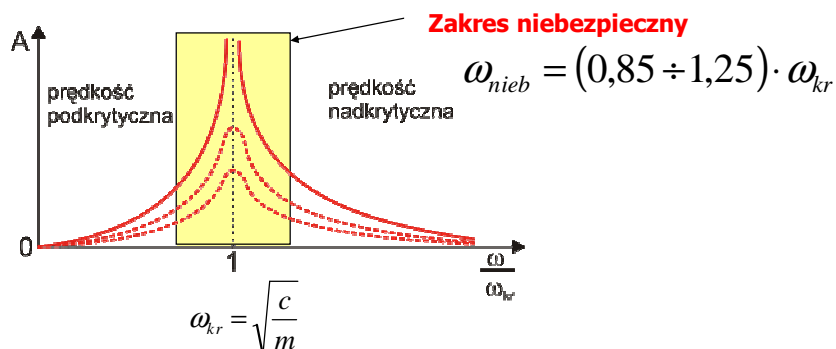
Statyczna strzałka ugięcia

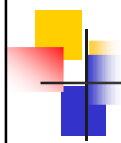
$$\omega_{kr} = \sqrt{\frac{g}{f}}$$

Projektowanie wału lub osi – 2 etap

Projektowanie sprawdzające 2.2 – obliczenia dynamiczne

Drgania rezonansowe – prędkość krytyczna

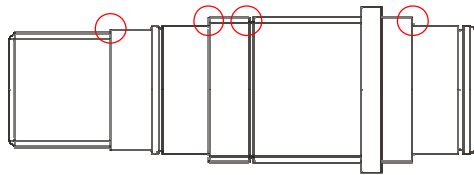




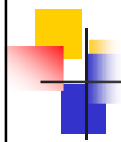
Projektowanie wału lub osi – 2 etap

Projektowanie sprawdzające 2.3 – obliczenia zmęzeniowe

Wyznaczenie rzeczywistego współczynnika bezpieczeństwa



Zgodnie z wykładem 3 – obliczenia zmęzeniowe



Projektowanie wału lub osi – 2 etap

Projektowanie sprawdzające 2.3 – obliczenia zmęzeniowe

MES – metoda elementów skończonych

Projektowanie wału lub osi – 3 etap

Końcowe kształtowanie wału

Uwzględnienie obliczeń sprawdzających



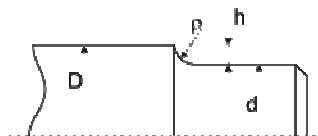
Projektowanie wału lub osi – uwagi konstruktorskie

1. Należy unikać zmniejszenia średnicy w części środkowej

Powoduje to spiętrzenie naprężeń w miejscu dużego obciążenia oraz zmniejsza sztywność wału (osi) zwiększając podatność na ugięcie – obniża prędkość krytyczną

2. Łagodne przejścia między średnicami i duże promienie przejścia

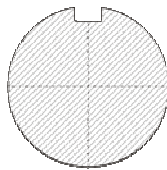
Działanie karbu.



$$\frac{D}{d} \leq 1,2$$

Projektowanie wału lub osi – uwagi konstruktorskie

3. Zaokrąglenie krawędzi frezów nacinających rowki



4. Czopy wałów powinny być gładkie (mała chropowatość)

Działanie karbu – stan powierzchni.