



Politechnika Lubelska

Katedra Podstaw Konstrukcji Maszyn i Mechatroniki

# Teoria maszyn i mechanizmów (TMM)

## Wykład 3

### Analiza kinematyczna – przekładnie zębate

# Przekładnie zębate - podstawowe informacje

**Głównym celem** stosowania przekładni zębatych jest dostosowanie momentu obrotowego i prędkości występujących na wale silnika do wartości wymaganych dla urządzenia odbiorczego lub organu roboczego. Dodatkowo kierunek i zwrot również może być zmieniony.

**Głównymi komponentami** przekładni zębatej są: koła zębate, korpus, wały, łożyska, smar i uszczelnienia.



Rys. [<http://www.ersgearbox.com/falk-gearbox-repair/>]

**Koła zębate** są uzębionymi częściami przenoszącymi moment obrotowy z wału napędowego na napędzany.

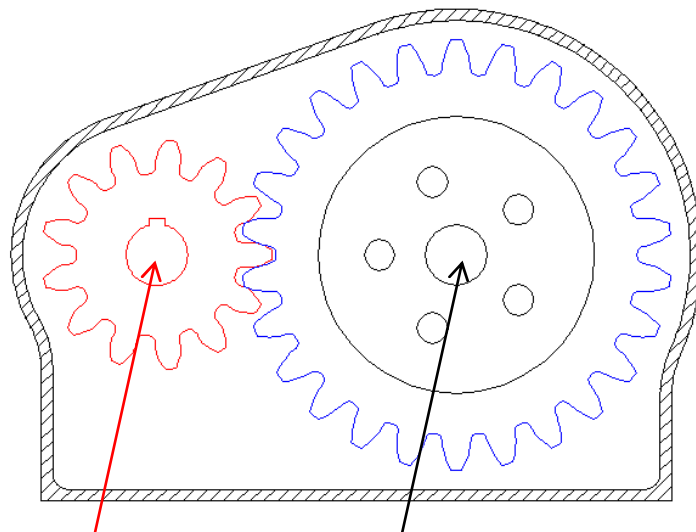


Rys. [[https://www.alibaba.com/product-detail/TZ-G-7-Micro-Standard-Size\\_60570542695.html](https://www.alibaba.com/product-detail/TZ-G-7-Micro-Standard-Size_60570542695.html)]

# Przekładnie zębate - podstawowe informacje

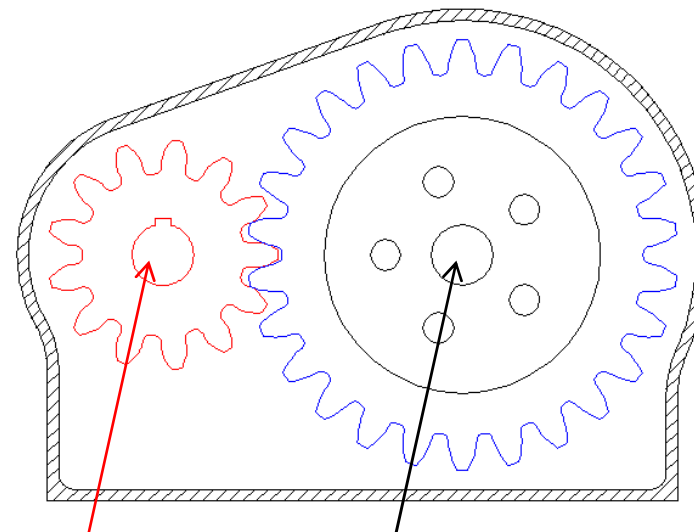
Przekładnie zębate najczęściej pracują jako **reduktory** (prędkość wału wyjściowego jest mniejsza, a moment obrotowy większy niż wału wejściowego), a w pewnych zastosowaniach jako **multiplikatory** (prędkość wału wyjściowego jest większa a moment obrotowy mniejszy niż wału wejściowego).

Reduktor



Wał wejściowy   Wał wyjściowy

Multiplikator



Wał wyjściowy   Wał wejściowy

Rys. [[https://en.wikipedia.org/wiki/Transmission\\_\(mechanics\)#/media/File:Gear\\_reducer.gif](https://en.wikipedia.org/wiki/Transmission_(mechanics)#/media/File:Gear_reducer.gif)]

# Typy przekładni zębatych

## I. Klasyfikacja przekładni zębatych według położenia osi kół zębatych i zgodnie z kształtem linii zębów:

1. Równoległe - osie kół zębatych są równoległe:
  - przekładnie walcowe o zębach prostych,
  - przekładnie walcowe o zębach śrubowych,
  - przekładnie walcowe o zębach daszkowych,
  - przekładnie zębatkowe,
  - przekładnie falowe,
  - przekładnie planetarne (obiegowe) z kołami walcowymi.
2. Kątowe (osie kół się przecinają):
  - przekładnie stożkowe o zębach prostych,
  - przekładnie stożkowe o zębach łukowych,
  - przekładnie stożkowe o zębach daszkowych (historyczne),
  - przekładnie planetarne (obiegowe) z kołami stożkowymi,
3. Wichrowate (osie kół się nie przecinają, ponieważ nie leżą w jednej płaszczyźnie):
  - przekładnie hipoidalne,
  - przekładnie spiroidalne,
  - przekładnie ślimakowe,
  - przekładnie śrubowe.

# Typy przekładni zębatych

## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 1. O stałych osiach:

- przekładnie walcowe o zębach prostych,
- przekładnie walcowe o zębach śrubowych,
- przekładnie walcowe o zębach daszkowych,
- przekładnie zębatkowe,
- przekładnie falowe,
- przekładnie stożkowe o zębach prostych,
- przekładnie stożkowe o zębach łukowych,
- przekładnie stożkowe o zębach daszkowych (historyczne),
- przekładnie hipoidalne,
- przekładnie spiroidalne,
- przekładnie ślimakowe,
- przekładnie śrubowe.

### 2. Przekładnie planetarne (obiegowe)

# Typy przekładni zębatych

## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 1. O stałych osiach:

- przekładnie walcowe o zębach prostych,
- przekładnie walcowe o zębach śrubowych,
- przekładnie walcowe o zębach daszkowych,
- przekładnie zębatkowe,
- przekładnie falowe,
- przekładnie stożkowe o zębach prostych,
- przekładnie stożkowe o zębach łukowych,
- przekładnie stożkowe o zębach daszkowych,
- przekładnie hipoidalne,
- przekładnie spiroidalne,
- przekładnie ślimakowe,
- przekładnie śrubowe.



Rys. [<http://doublehelicalgear.blogspot.com/>]

### 2. Przekładnie planetarne (obiegowe)

Opis – linia zębów jest odcinkiem równoległym do osi obrotu. Sprawność od 98 % do 99 %.

Główne cechy:

- |                         |            |
|-------------------------|------------|
| + najtańsze,            | – drgania, |
| + łatwe do wytwarzania, | – hałas.   |

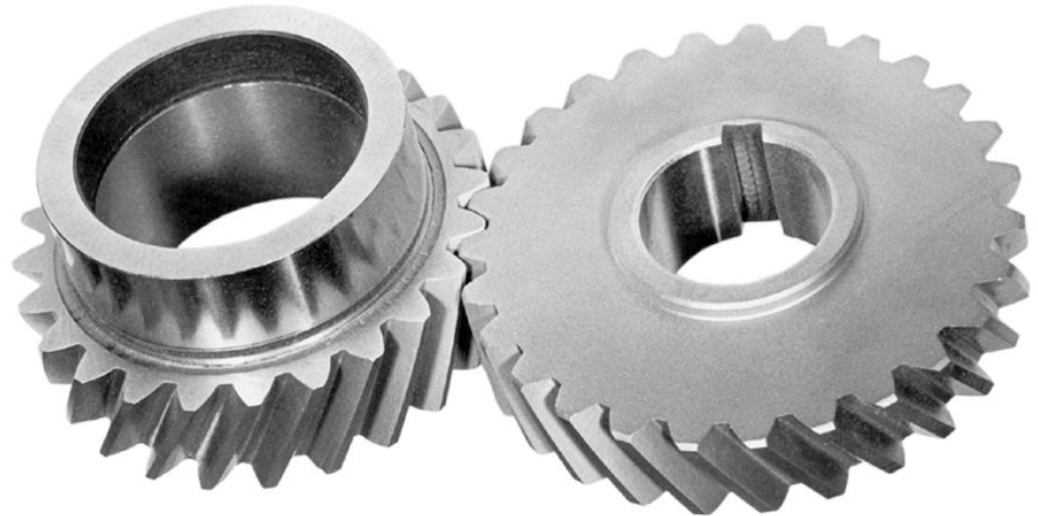
# Typy przekładni zębatych

## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 1. O stałych osiach:

- przekładnie walcowe o zębach prostych,
- przekładnie walcowe o zębach śrubowych,
- przekładnie walcowe o zębach daszkowych,
- przekładnie zębatkowe,
- przekładnie falowe,
- przekładnie stożkowe o zębach prostych,
- przekładnie stożkowe o zębach łukowych,
- przekładnie stożkowe o zębach daszkowych,
- przekładnie hipoidalne,
- przekładnie spiroidalne,
- przekładnie ślimakowe,
- przekładnie śrubowe.

### 2. Przekładnie planetarne (obiegowe)



Rys. [<http://www.paginasamarillas.com.gt/empresas/cedema-sa/guatemala-15796039>]

Opis – linia zębów jest linią śrubową. Sprawność od 96 % do 98 %.

Główne cechy:

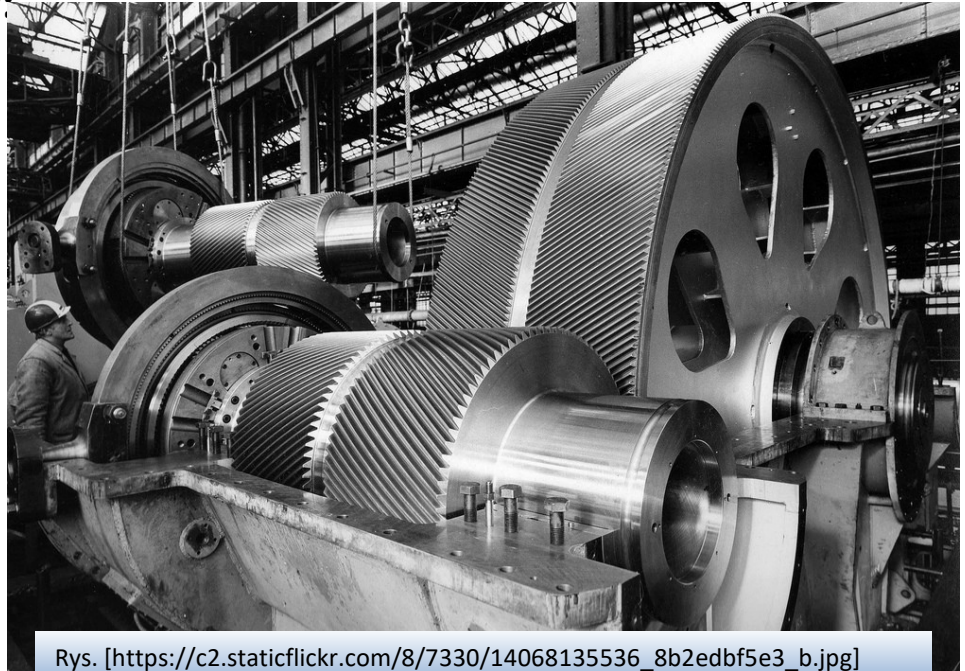
- + mniejszy poziom drgań i hałasu niż dla przekładni o zębach prostych,
- + większa wytrzymałość niż dla przekładni o zębach prostych,
- siła osiowa.

# Typy przekładni zębatych

## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 1. O stałych osiach:

- przekładnie walcowe o zębach prostych,
- przekładnie walcowe o zębach śrubowych,
- przekładnie walcowe o zębach daszkowych,
- przekładnie zębatkowe,
- przekładnie falowe,
- przekładnie stożkowe o zębach prostych,
- przekładnie stożkowe o zębach łukowych,
- przekładnie stożkowe o zębach daszkowych,
- przekładnie hipoidalne,



Rys. [[https://c2.staticflickr.com/8/7330/14068135536\\_8b2edbf5e3\\_b.jpg](https://c2.staticflickr.com/8/7330/14068135536_8b2edbf5e3_b.jpg)]

Opis – połowa zębów koła zębatego ma linię zęba o kierunku lewym, a druga połowa o kierunku prawym w postaci linii śrubowej. Zęby najczęściej wykonane są na jednym półwyrobie koła zębatego. Stosowane do przenoszenia wysokich mocy.



### 2. O zmiennych osiach:

Główne cechy:

- + mniejszy poziom drgań i hałasu niż dla przekładni o zębach prostych,
- + większa wytrzymałość niż dla przekładni o zębach prostych,
- + brak siły osiowej,
- droższe niż przekładnie o zębach śrubowych,
- trudniejsze w wykonaniu niż koła o zębach śrubowych.

Rys. [<http://www.solucoesindustriais.com.br/empresa/metas-e-artefatos/engrenagens-pozelli/produtos/acessorios/engrenagem-helicoidal-dupla>]

# Typy przekładni zębatych

## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 1. O stałych osiach:

- przekładnie walcowe o zębach prostych,
- przekładnie walcowe o zębach śrubowych,
- przekładnie walcowe o zębach daszkowych,
- przekładnie zębatkowe,
- przekładnie falowe,
- przekładnie stożkowe o zębach prostych,
- przekładnie stożkowe o zębach łukowych,
- przekładnie stożkowe o zębach daszkowych,
- przekładnie hipoidalne,
- przekładnie spiroidalne,
- przekładnie ślimakowe,
- przekładnie śrubowe.



Rys. [<http://www.directindustry.com/industrial-manufacturer/helical-toothed-rack-pinion-215774.html>]

### 2. Przekładnie planetarne (obiegowe)

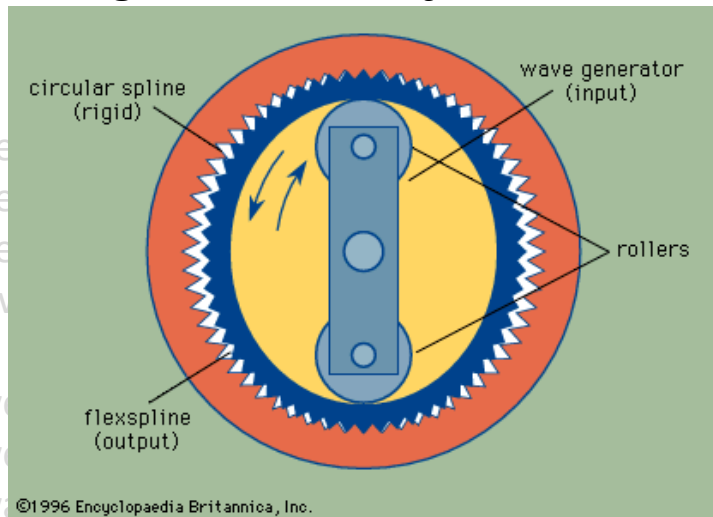
Opis – przekładnia zamienia ruch obrotowy na postępowy lub odwrotnie. Zęby są nacięte na prostoliniowej listwie. Listwa zębata jest kołem o średnicy równej nieskończoności z zębami prostymi albo skośnymi.

# Typy przekładni zębatych

## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 1. O stałych osiach:

- przekładnie walcowe
- przekładnie walcowe
- przekładnie walcowe
- przekładnie zębatkowe
- przekładnie falowe,
- przekładnie stożkowe
- przekładnie stożkowe
- przekładnie stożkowe
- przekładnie hipoidalne
- przekładnie spiroidalne,
- przekładnie ślimakowe,
- przekładnie śrubowe.

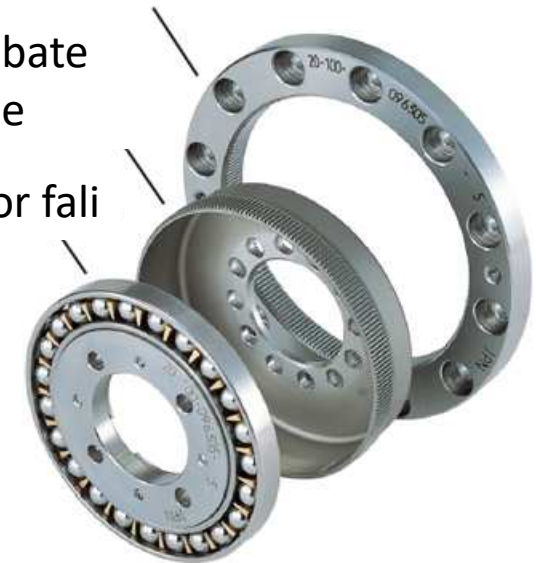


Rys. [<https://www.britannica.com/technology/Harmonic-Drive/images-videos>]

Koło zębate o zazębieniu wewnętrznym

Koło zębate podatne

Generator fali



Rys. [<http://www.robotyka.com/teoria.php/teoria.32>]

### 2. Przekładnie planetarne (obieg

Opis – uzyskiwanie dużych przełożeń przy stosunkowo małej zajmowanej objętości.

Główne cechy:

+ cichobieżność,

+ płynności i dokładności przekazywanego ruchu,

• wartość przełożeń: 30 – 320,

- sprawność: 0,7 – 0,85 (rodzaj generatora fali, wielkość przełożenia).

# Typy przekładni zębatych

## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 1. O stałych osiach:

- przekładnie walcowe o zębach prostych,
- przekładnie walcowe o zębach śrubowych,
- przekładnie walcowe o zębach daszkowych,
- przekładnie zębatkowe,
- przekładnie falowe,
- przekładnie stożkowe o zębach prostych,
- przekładnie stożkowe o zębach łukowych,
- przekładnie stożkowe o zębach daszkowych,
- przekładnie hipoidalne,
- przekładnie spiroidalne,
- przekładnie ślimakowe,



Rys. [[http://www.corristore.top/gears-c-84\\_185/](http://www.corristore.top/gears-c-84_185/)]

Opis – zęby nacięte są na poboczniczy stożka, a linia zębów jest odcinkiem.

Przekładnie stożkowe są stosowane do przenoszenia ruchu (momentu obrotowego) pomiędzy wałami, których osie nie są równoległe, a kąt najczęściej wynosi  $90^\circ$ .

Główne cechy:

- + proste do projektowania i łatwe do wykonywania,
- hałas przy większych prędkościach.

# Typy przekładni zębatych

## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 1. O stałych osiach:

- przekładnie walcowe o zębach prostych,
- przekładnie walcowe o zębach śrubowych,
- przekładnie walcowe o zębach daszkowych,
- przekładnie zębatkowe,
- przekładnie falowe,
- przekładnie stożkowe o zębach prostych,
- przekładnie stożkowe o zębach łukowych,
- przekładnie stożkowe o zębach daszkowych,
- przekładnie hipoidalne,
- przekładnie spiroidalne,
- przekładnie ślimakowe,
- przekładnie śrubowe.



Rys. [<http://infoline.com/jay-jagannath-industries>]

### 2. Przekładnie planetarne (ob Opis – linia zębów jest krzywą.

#### Główne cechy:

- + mniejsze drgania i hałas niż dla przekładni z zębami prostymi,
- + większa wytrzymałość niż dla przekładni z zębami prostymi,
- kosztowne i trudne w projektowaniu i wytwarzaniu,

# Typy przekładni zębatych

## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 1. O stałych osiach:

- przekładnie walcowe o zębach prostych,
- przekładnie walcowe o zębach śrubowych,
- przekładnie walcowe o zębach daszkowych,
- przekładnie zębatkowe,
- przekładnie falowe,
- przekładnie stożkowe o zębach prostych,
- przekładnie stożkowe o zębach łukowych,
- przekładnie stożkowe o zębach daszkowych (historyczne),
- przekładnie hipoidalne,
- przekładnie spiroidalne,
- przekładnie ślimakowe,
- przekładnie śrubowe.



Rys. [[https://en.wikipedia.org/wiki/Herringbone\\_gear](https://en.wikipedia.org/wiki/Herringbone_gear)]

Przekładnia została wykonana przez Citroëna i zamontowana około 1927 w Czechach w elektrowni wodnej łącząc turbinę Francisa z generatorem. Pracowała bez uszkodzeń do 2011.

### 2. Przekładnie plane

Rys. [[http://www.solucoesindustriais.com.br/images/produtos/imagens\\_10195/p\\_engrenagem-helicoidal-dupla-11.jpg](http://www.solucoesindustriais.com.br/images/produtos/imagens_10195/p_engrenagem-helicoidal-dupla-11.jpg)]



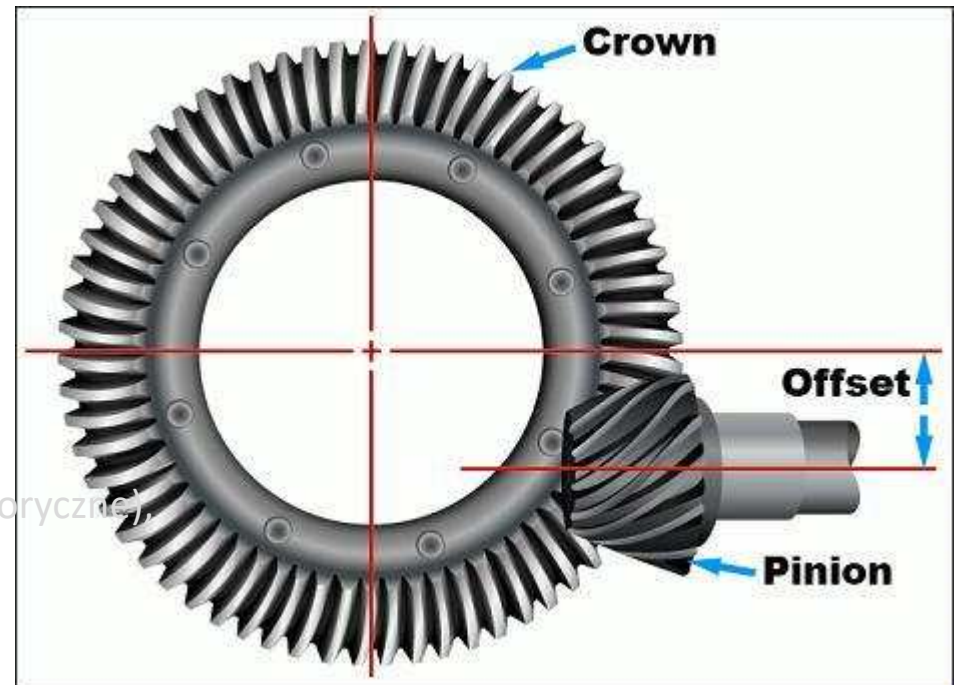
Przekładnie te stosowane były w pojazdach Citroëna

# Typy przekładni zębatych

## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 1. O stałych osiach:

- przekładnie walcowe o zębach prostych,
- przekładnie walcowe o zębach śrubowych,
- przekładnie walcowe o zębach daszkowych,
- przekładnie zębatkowe,
- przekładnie falowe,
- przekładnie stożkowe o zębach prostych,
- przekładnie stożkowe o zębach łukowych,
- przekładnie stożkowa o zębach daszkowych (historyczne),
- przekładnie hipoidalne,
- przekładnie spiroidalne,
- przekładnie ślimakowe,
- przekładnie śrubowe.



Rys. [<https://www.myodesie.com/wiki/index/returnEntry/id/3000>]

### 2. Przekładnie planetarne (obiegowe)

Opis – główną różnicą między przekładniami stożkowymi a hipoidalnymi jest przesunięcie osi zębniaka względem jednej z głównych osi koła zębatego (talerzowego). Zęby są projektowane dla zadanej odległości.

# Typy przekładni zębatych

## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

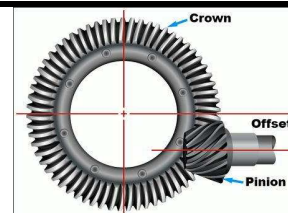
### 1. O stałych osiach:

- przekładnie walcowe o zębach prostych
- przekładnie walcowe o zębach skośnych
- przekładnie walcowe o zębach prostych z korym
- przekładnie zębatkowe,
- przekładnie falowe,
- przekładnie stożkowe o zębach prostych
- przekładnie stożkowe o zębach skośnych
- przekładnie stożkowa o zębach prostych z korym
- przekładnie hipoidalne,
- przekładnie spiroidalne,
- przekładnie ślimakowe,
- przekładnie śrubowe.

### 2. Przekładnie planetarne

### Porównanie właściwości przekładni hipoidalnych i stożkowych

| Właściwość               | Przekładnia hipoidalna                                   | Przekładnia stożkowa           |
|--------------------------|----------------------------------------------------------|--------------------------------|
| Płynność zazębienia      | Bardzo dobra                                             | Dobra                          |
| Wytrzymałość na zginanie | Większa – około 30 % w zależności od wartości odsunięcia |                                |
| Odporność na pitting     | Większa – około 175 %                                    |                                |
| Odporność na zatarcie    | Większa - około 200 %                                    |                                |
| Prędkość poślizgu        | Okolo 200 % mniejsza                                     |                                |
| Sprawność                | Okolo 96 %                                               | Okolo 99 %                     |
| Przełożenie              | Lepsza do większych przełożeń                            | Lepsza do mniejszych przełożeń |

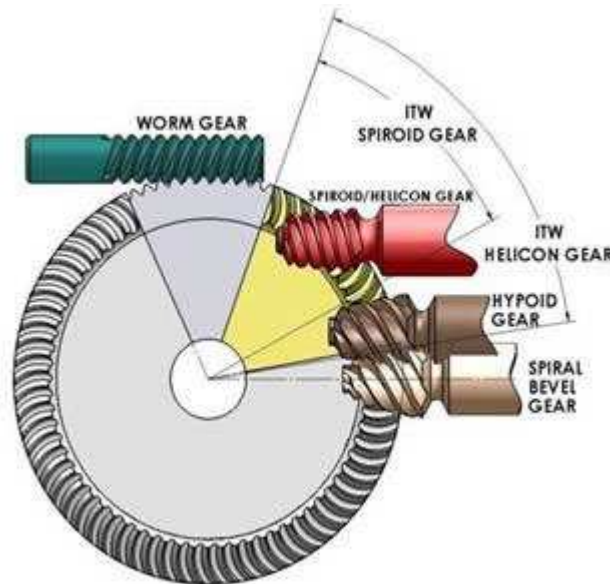


# Typy przekładni zębatych

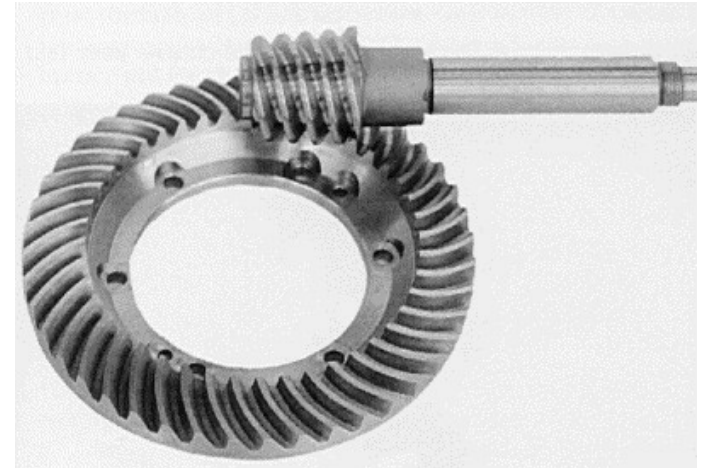
## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 1. O stałych osiach:

- przekładnie walcowe o zębami prostymi
- przekładnie walcowe o zębami skośnymi
- przekładnie walcowe o zębami kółkami
- przekładnie zębatkowe,
- przekładnie falowe,
- przekładnie stożkowe o zębami prostymi
- przekładnie stożkowe o zębami skośnymi
- przekładnie stożkowa o zębami kółkami
- przekładnie hipoidalne,
- **przekładnie spiroidalne,**
- przekładnie ślimakowe,
- przekładnie śrubowe.



Rys. [<https://www.medital.co.il/products/electro-mechanical-actuator>]



Rys. [<https://engineersworld06.wordpress.com/2017/03/04/disli-secimi/>]

### 2. Przekładnie planetarne (ol

Opis – rodzina przekładni spiroidalnych składa się z przekładni typu Helicon i Planoid oraz typu Spiroidalnego.

Dla większych niż dla przekładni hipoidalnych wartości odsunięć zębniak zaczyna wyglądać jak stożkowy ślimak i wtedy przekładnia określana jest jako spiroidalna.

Typ Helicon różni się od typu Spiroidalnego tym, że zębniak nie jest stożkowy tylko walcowy.

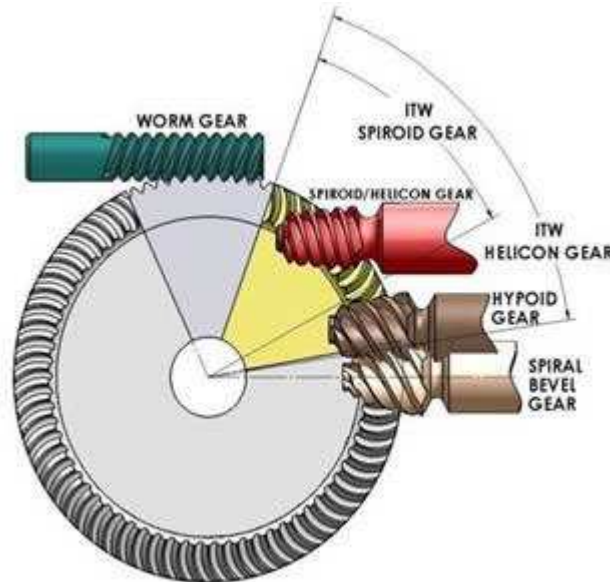
Typ Planoid stosowany jest do mniejszych przełożeń niż typ Spiroidalny, odsunięcie jest również mniejsze - zbliżone do odsunięcia hipoidalnego.

# Typy przekładni zębatych

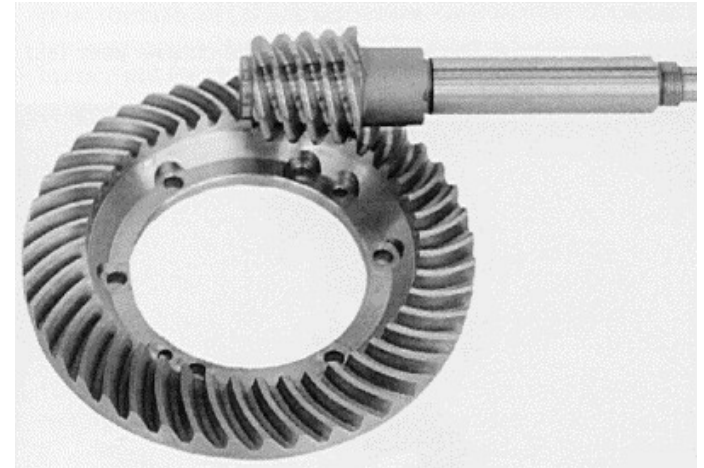
## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 1. O stałych osiach:

- przekładnie walcowe o zębami prostymi
- przekładnie walcowe o zębami skośnymi
- przekładnie walcowe o zębami kółkami
- przekładnie zębatkowe
- przekładnie falowe
- przekładnie stożkowe o zębami prostymi
- przekładnie stożkowe o zębami skośnymi
- przekładnie stożkowa o zębami kółkami
- przekładnie hipoidalne
- **przekładnie spiroidalne**
- przekładnie ślimakowe
- przekładnie śrubowe.



Rys. [<https://www.medital.co.il/products/electro-mechanical-actuator>]



Rys. [<https://engineersworld06.wordpress.com/2017/03/04/disli-secimi/>]

### 2. Przekładnie planetarne (ol

Przekładnie typu Helicon są odpowiednie dla przełożeń od 4:1 do 400:1. Przekładnie typu Spiroidalne są odpowiednie dla przełożeń 10:1 lub większych. Przekładnie typu Planoid są stosowane dla przełożeń mniejszych niż 10:1

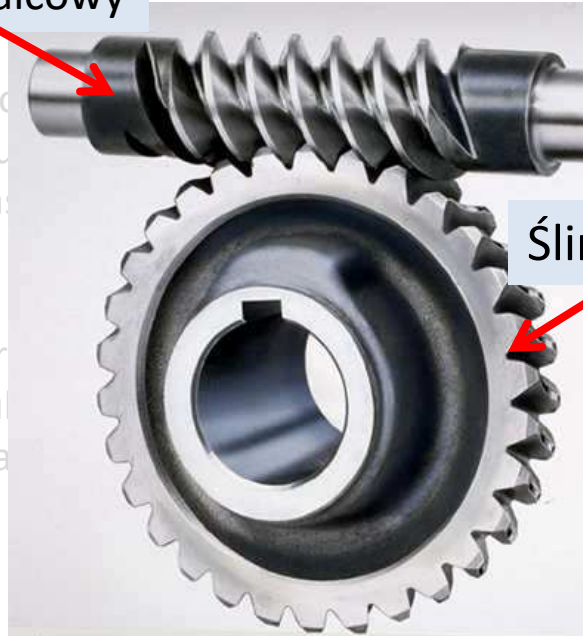
# Typy przekładni zębatych

## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 1. O stałych osiach:

- przekładnie walcowe o zębach prostych
- przekładnie walcowe o zębach śrubowych
- przekładnie walcowe o zębach dętych
- przekładnie zębatkowe,
- przekładnie falowe,
- przekładnie stożkowe o zębach prostych
- przekładnie stożkowe o zębach łukowych
- przekładnie stożkowa o zębach dętych
- przekładnie hipoidalne,
- przekładnie spiroidalne,
- przekładnie ślimakowe,
- przekładnie śrubowe.

Ślimak walcowy



Rys. [<https://www.indiamart.com/gp-engineering-fabrics/>]

Ślimacznica



Ślimak globoidalny

Rys. [<http://www.globalcncindia.in/industrial-gears.html>]

### 2. Przekładnie planetarne

Opis – przekładnie ślimakowe są często stosowane do przenoszenia momentu między wałami o osiach prostopadłych i przy jednoczesnym wymaganym dużym przełożeniu z zakresu od 10:1 do 60:1. Ślimak ma wykonany ząb lub zęby wzdłuż linii śrubowej. Sprawność wynosi od 45 % do 90 %. Większość tego typu przekładni jest samohamowna.

# Typy przekładni zębatych

## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 1. O stałych osiach:

- przekładnie walcowe o zębach prostych,
- przekładnie walcowe o zębach śrubowych,
- przekładnie walcowe o zębach daszkowych,
- przekładnie zębatkowe,
- przekładnie falowe,
- przekładnie stożkowe o zębach prostych,
- przekładnie stożkowe o zębach łukowych,
- przekładnie stożkowa o zębach daszkowych (hipoidalne),
- przekładnie hipoidalne,
- przekładnie spiroidalne,
- przekładnie ślimakowe,
- przekładnie walcowe śrubowe.



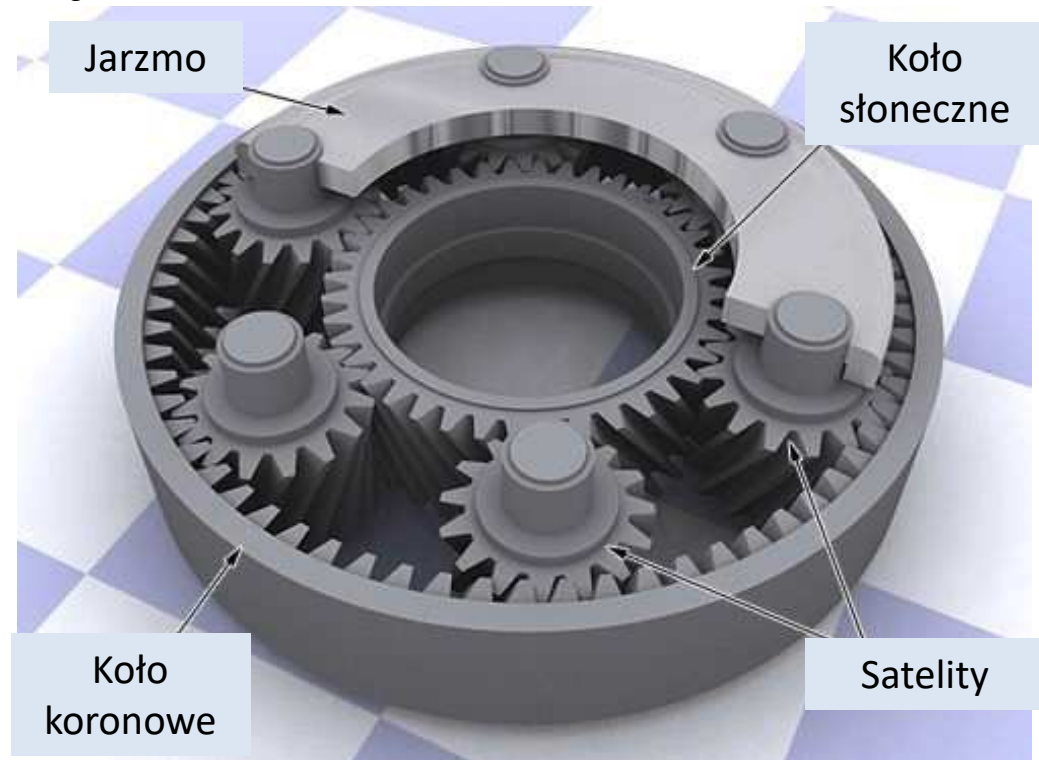
Rys. [<http://www.madisamakina.com/katalog/kategorie/listele-2411/>]

- ### 2. Przekładnie planetarne (obiegowe)
- Opis – osie kół zębatych są najczęściej prostopadłe. Oba koła są prawe albo lewe. Występują duże prędkości poślizgu ograniczające zastosowanie do średnich obciążeń. Sprawność wynosi od 50 % do 90 %.

# Typy przekładni zębatych

## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z możliwością ruchu osi kół zębatych względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 2. Przekładnie planetarne (obiegowe)



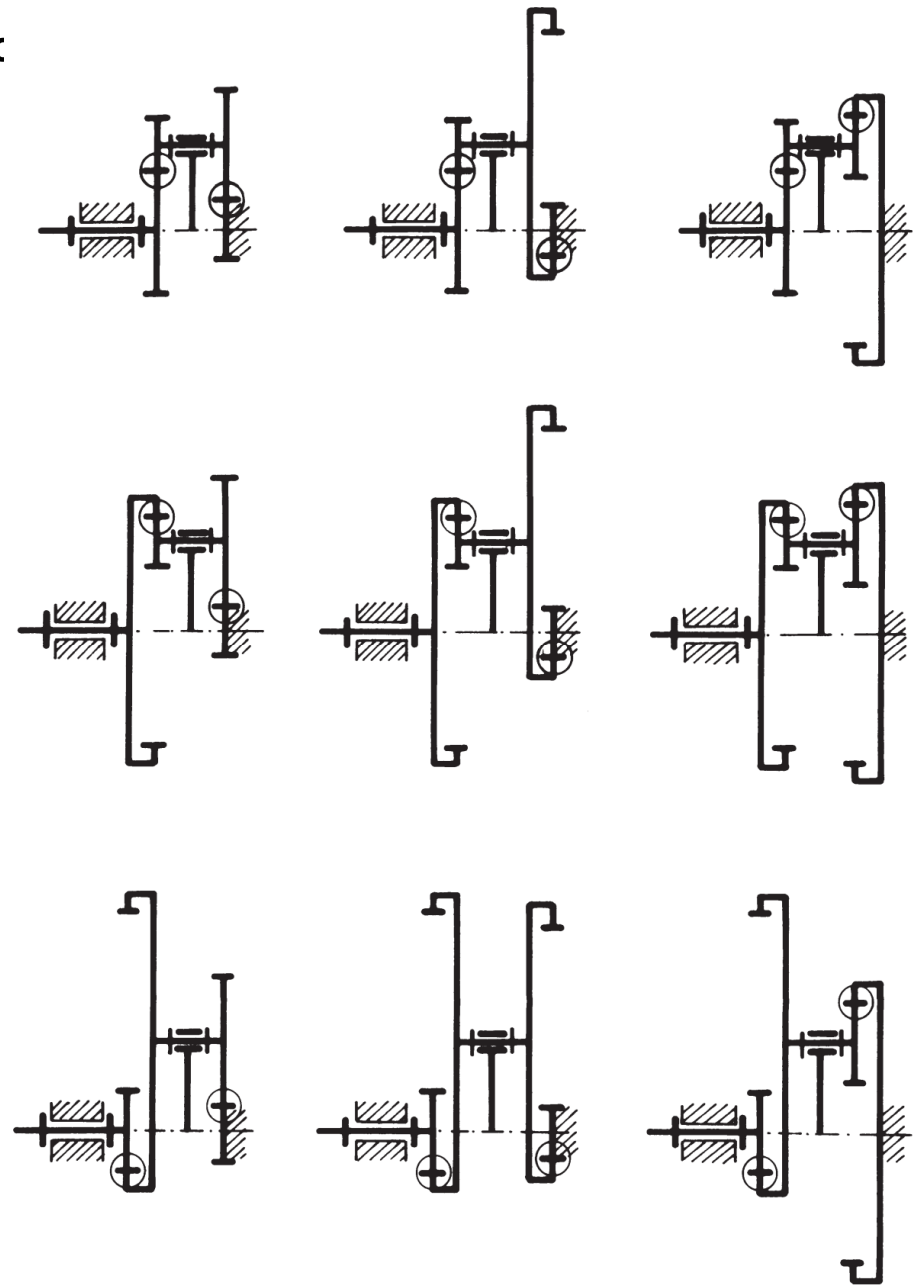
Rys. [[http://www.carbibles.com/transmission\\_bible\\_pg2.html](http://www.carbibles.com/transmission_bible_pg2.html)]

Opis – przekładnia planetarna może mieć dwa stopnie swobody i wtedy określana jest jako przekładnia różnicowa. Przy jednym stopniu swobody koło koronowe, słoneczne albo jarzmo należy unieruchomić. Przekładnia zmienia się w przekładnię o osiach stałych przy nieruchomym jarzmie. Może pracować jako reduktor lub multiplikator z zachowanym albo nie kierunkiem obrotów. Ze stosunkowo małej objętości można uzyskać znaczne przełożenie.

# Typy przekładni zębatych

## II. Klasyfikacja przekładni zębatych zgodnie z m.c. względem korpusu i według kształtu linii zębów:

### 2. Przekładnie planetarne (obiegowe)



Rys. Możliwe odmiany przekładni planetarnych dwurzędowych złożonych z czterech kół zębatych [Miller S.: *Teoria maszyn i mechanizmów. Analiza układów kinematycznych*. WPW, Wrocław 1996]

# Obliczanie przełożeń przekładni zębatych

**Przełożeniem** nazywa się stosunek prędkości kątowej  $\omega_1$  członu napędzającego (czynnego) 1 do prędkości kątowej  $\omega_2$  członu napędzanego (biernego) 2

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Przełożenie przekładni o osiach stałych jest stosunkowo proste do określenia na podstawie zależności kinematycznych lub geometrycznych. Dla przekładni o osiach równoległych określa się również znak przełożenia. Przełożenie jest dodatnie, jeśli kierunek obrotów koła czynnego i biernego jest zgodny, a ujemny - jeśli przeciwny. Przekładnie kątowe oraz z osiami wchrowatymi nie mają określanego znaku przełożenia i podaje się je jako dodatnie.

# Obliczanie przełożeń przekładni zębatych o osiach stałych

Przełożenie przekładni walcowej o zazębieniu wewnętrznym jest równe:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

$$v_1 = v_2 \quad v_1 = \omega_1 \frac{d_1}{2} \quad v_2 = \omega_2 \frac{d_2}{2}$$

$$\omega_1 \frac{d_1}{2} = \omega_2 \frac{d_2}{2} \quad \omega_1 d_1 = \omega_2 d_2 \quad d_1 = z_1 m \quad d_2 = z_2 m$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{z_2 m}{z_1 m} = \frac{z_2}{z_1} = i_{12}$$

gdzie:

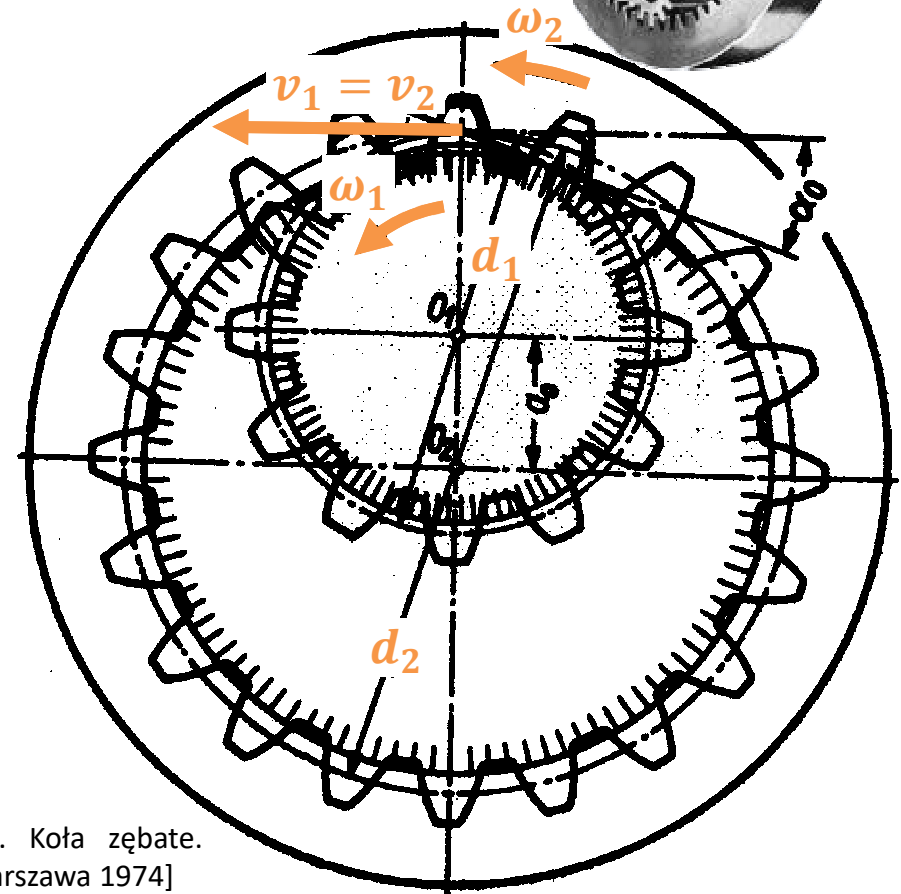
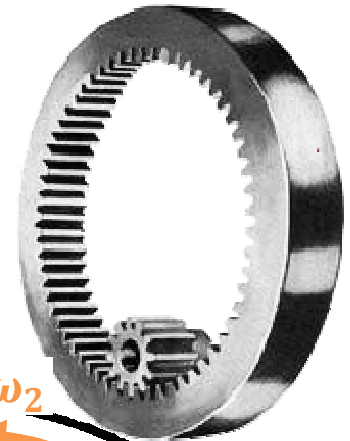
$\omega_1$  – prędkość kątowna koła czynnego,

$\omega_2$  – prędkość kątowna koła biernego,

$z_1$  – liczba zębów koła czynnego,

$z_2$  – liczba zębów koła biernego.

Rys. [<https://www.indiamart.com/jay-jalaram-engineering-fabrication/industrial-gears.html>]



Rys. [Ochęduszek K. Koła zębate. Konstrukcja. WNT, Warszawa 1974]

# Obliczanie przełożeń przekładni zębatych o osiach stałych

Przełożenie przekładni walcowej o zazębieniu zewnętrznym jest równe:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}$$

gdzie:

$\omega_1$  – prędkość kątowna koła czynnego,

$\omega_2$  – prędkość kątowna koła biernego,

$z_1$  – liczba zębów koła czynnego,

$z_2$  – liczba zębów koła biernego.



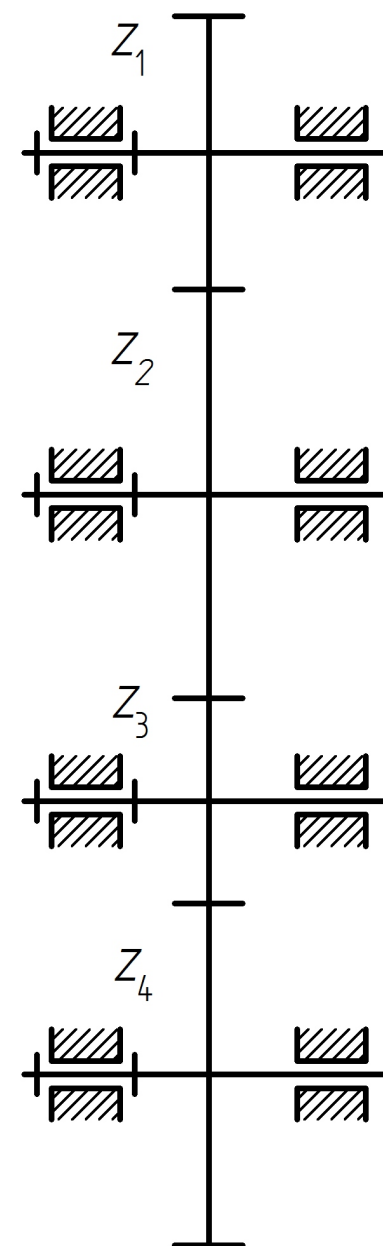
Rys. [<http://www.paginasamarillas.com.gt/empresas/cedema-sa/guatemala-15796039>]

# Obliczanie przełożeń przekładni zębatych o osiach stałych

Koła zębate mogą tworzyć złożone mechanizmy. Napęd może być przekazywany w sposób szeregowy lub równoległy.

Przełożenie przekładni szeregowej, widocznej na tym rysunku, zależy wyłącznie od liczby zębów koła czynnego 1 i wyjściowego 4. Koła pośrednie nie zmieniają przełożeń, a są stosowane w celu zwiększenia odległości między osiami lub zmiany kierunku obrotów.

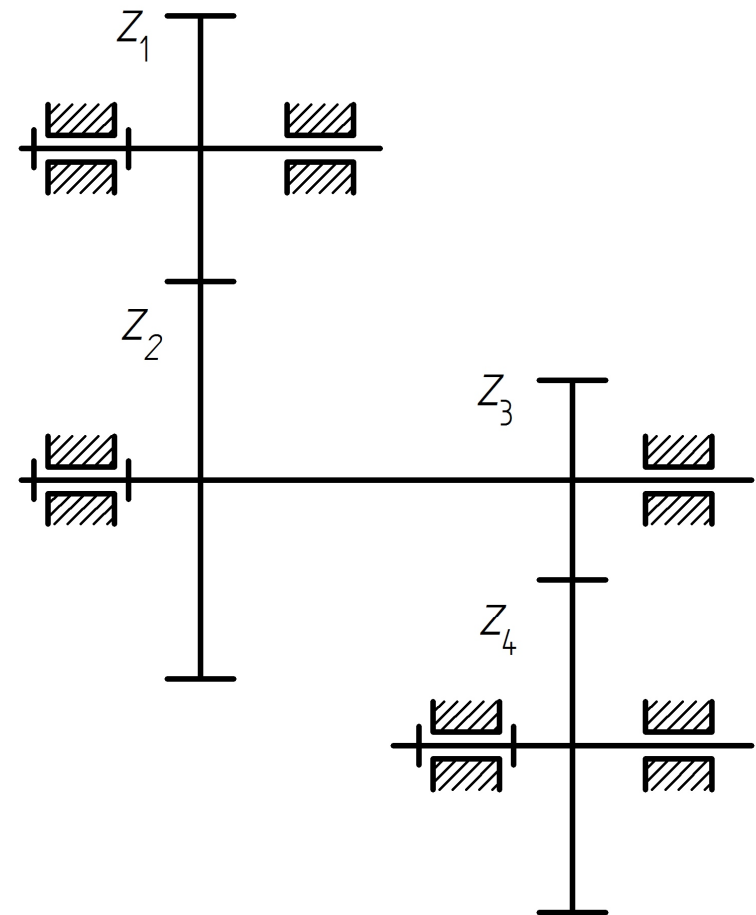
$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1}$$



# Obliczanie przełożeń przekładni zębatych o osiach stałych

W przypadku równoległego przekazywania napędu przełożenie całkowite jest równe iloczynowi przełożeń poszczególnych stopni przekładni. Układ równoległy jest stosowany w celu uzyskania dużego przełożenia przy zwartej konstrukcji.

$$i_{14} = i_{12} \cdot i_{34} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$$

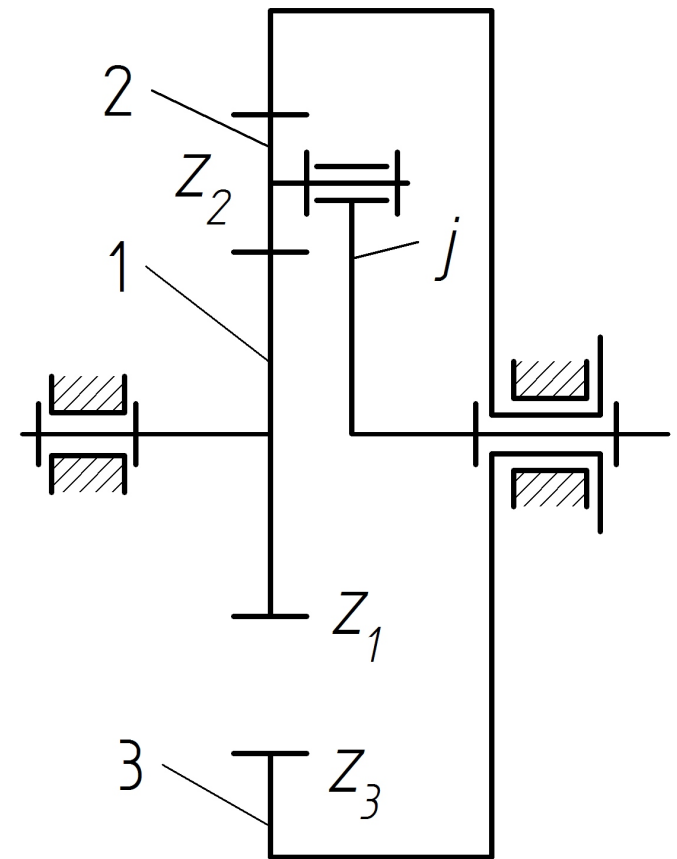


# Obliczanie przełożeń przekładni zębatych o osiach ruchomych

W przekładniach planetarnych satelita połączony z jarzmem wykonuje ruch płaski. Sprawia to, że wyznaczenie przełożenia nie jest zadaniem trywialnym. Wypracowano różne podejścia wyznaczania go. Zostaną przedstawione dwie metody:

- metoda analityczna (Willisa),
- metoda tabelaryczna (Swampa).

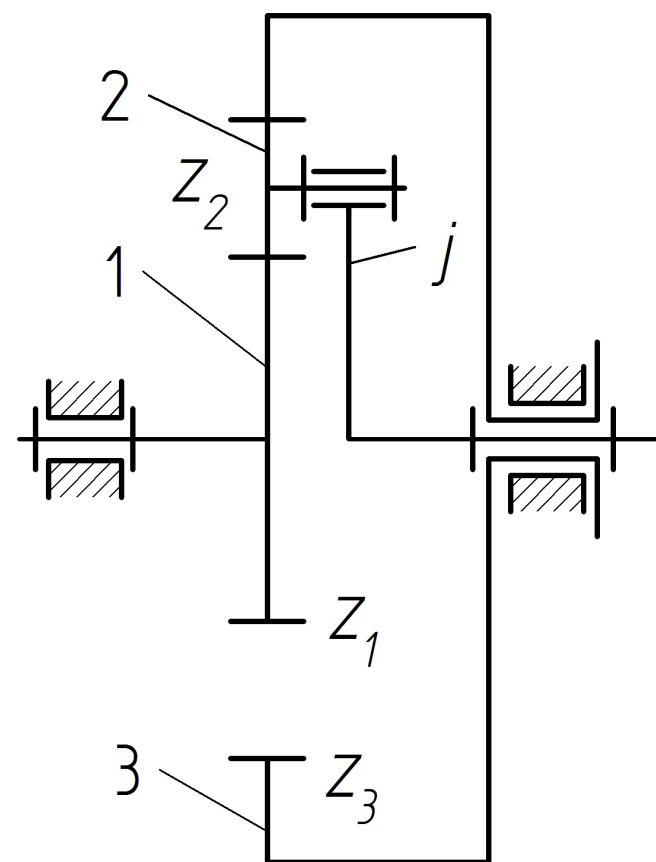
Obie metody opierają się w swoim założeniu na doprowadzeniu do sytuacji, w której jarzmo względem korpusu staje się nieruchome.



# Obliczanie przełożeń przekładni planetarnych - metoda Willisa

Wzór Willisa zostanie określony dla przekładni o dwóch stopniach swobody przedstawionej na rysunku.

Koło słoneczne 1 wykonuje ruch obrotowy z prędkością kątową  $\omega_1$ , koło koronowe 3 z prędkością kątową  $\omega_3$ , a jarzmo z prędkością kątową  $\omega_j$ .

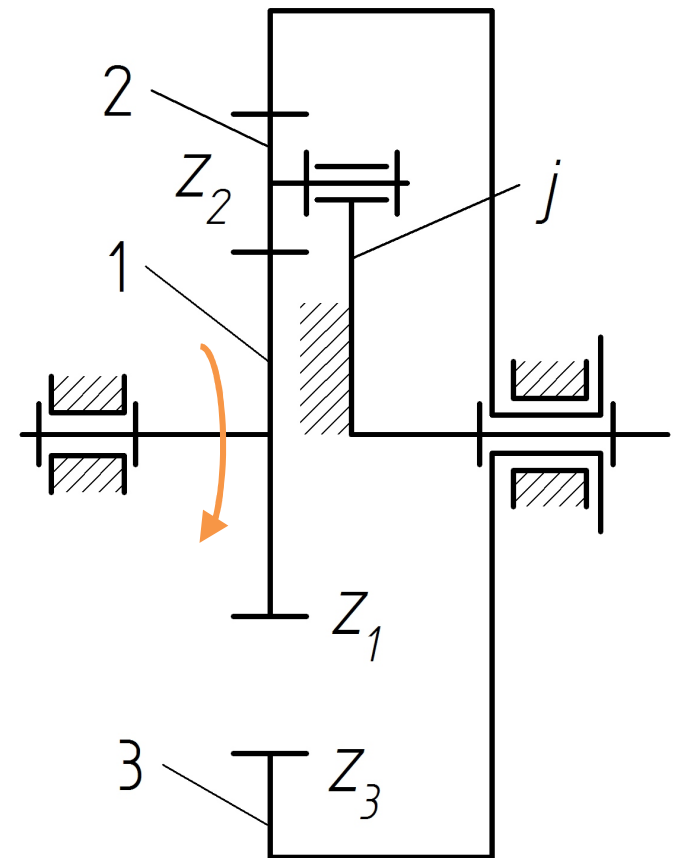


# Obliczanie przełożeń przekładni planetarnych - metoda Willisa

Następnie zmieniające się prędkości kątowe członów 1, 3 oraz  $j$  o wartość  $-\omega_j$ . Nie wpływa to na względne prędkości kątowe między członami, a więc i na przełożenie. Na skutek tego działania prędkość kątowa jarzma  $j$  wynosi  $\omega_j - \omega_j = 0$ . Przekładnia planetarna została więc sprowadzona do przekładni o osiach stałych (patrz rys.), w których obliczanie przełożeń jest proste. W tym przypadku napęd przekazywany jest w sposób szeregowy, a więc satelita nie wpływa na wartość przełożenia a tylko na kierunek obrotów. Prędkość kątowa koła słonecznego 1 wynosi  $\omega_1 - \omega_j$  a koła koronowego  $\omega_3 - \omega_j$ . Wzór na przełożenie dla członu napędzającego 1 i napędzanego 3 ma postać:

$$i_{13}^j = \frac{\omega_1 - \omega_j}{\omega_3 - \omega_j}$$

$i_{13}^j$  Oznacza przełożenie pomiędzy kołem czynnym 1 a biernym 3, przy nieruchomym jarzmie  $j$



# Obliczanie przełożeń przekładni planetarnych - metoda Willisa

$$i_{13}^j = \frac{\omega_1 - \omega_j}{\omega_3 - \omega_j}$$

Jest to wzór Willisa umożliwiający wyznaczanie przełożeń w przekładni planetarnej dla wszystkich kombinacji członów czynnych i biernych.

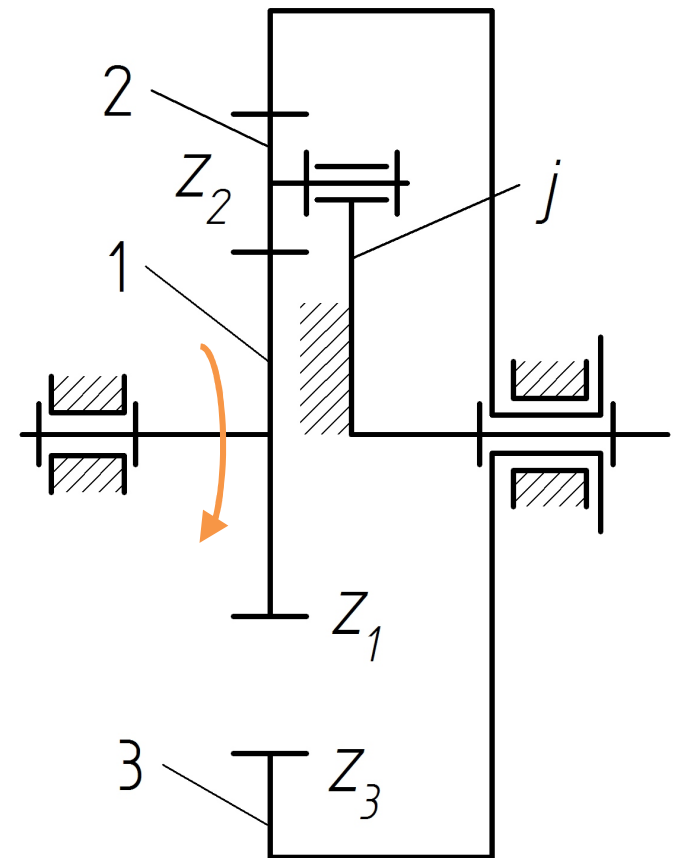
Obliczanie przełożeń z jego użyciem zostanie przedstawione dla trzech przykładów.

## Przykład 1

Człon czynny – 1, człon bierny – 3, człon nieruchomy –  $j$

$$i_{13}^j = ?$$

$$i_{13}^j = \frac{\omega_1 - \omega_j}{\omega_3 - \omega_j} = \frac{\omega_1 - 0}{\omega_3 - 0} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2} = -\frac{z_3}{z_1}$$



# Obliczanie przełożeń przekładni planetarnych - metoda Willisa

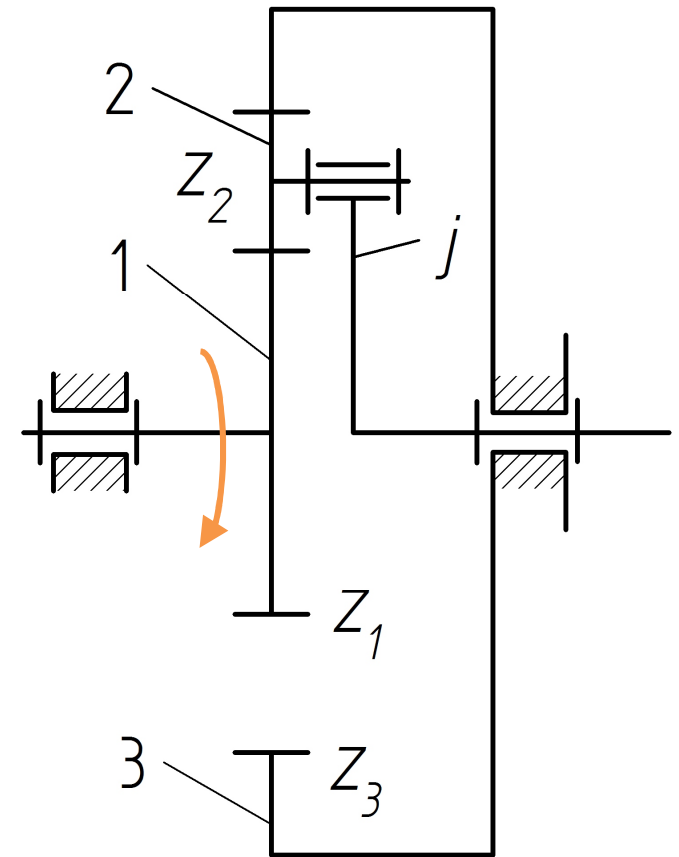
## Przykład 2

Człon czynny – 1, człon bierny –  $j$ , człon nieruchomy – 3

$i_{1j}^3 = ?$

$$i_{13}^j = \frac{\omega_1 - \omega_j}{\omega_3 - \omega_j} = \frac{\omega_1 - \omega_j}{0 - \omega_j} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_j} = 1 - i_{1j}^3$$

$$i_{1j}^3 = 1 - i_{13}^j = 1 + \frac{z_3}{z_1}$$



# Obliczanie przełożeń przekładni planetarnych - metoda Willisa

## Przykład 3

Człon czynny – 3, człon bierny –  $j$ , człon nieruchomy – 1

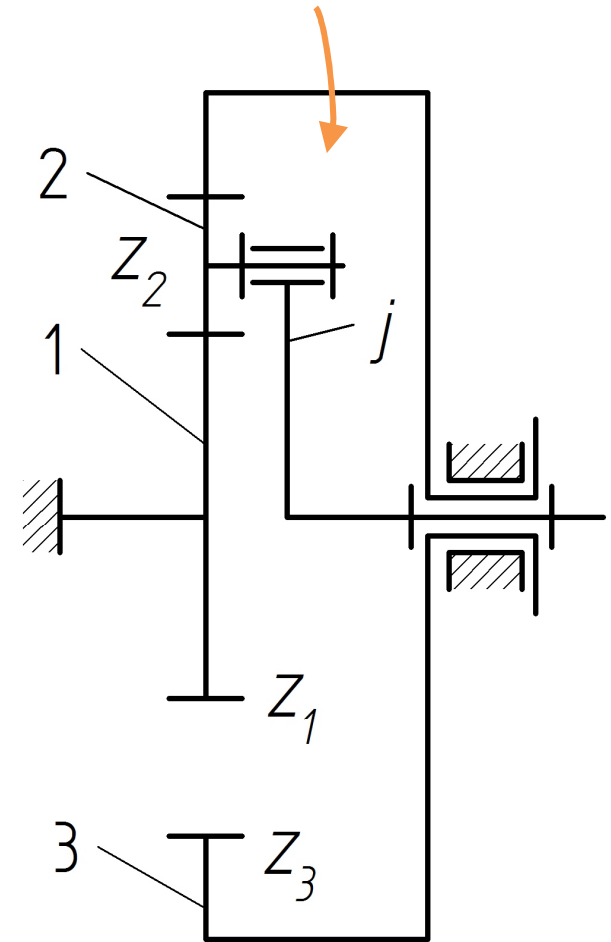
$$i_{3j}^1 = ?$$

$$i_{13}^j = \frac{\omega_1 - \omega_j}{\omega_3 - \omega_j} \cdot \frac{1}{(i_{13}^j)^2}$$

$$\frac{1}{i_{13}^j} = \frac{1}{\frac{\omega_1 - \omega_j}{\omega_3 - \omega_j}} = \frac{\omega_3 - \omega_j}{\omega_1 - \omega_j} = i_{31}^j$$

$$i_{31}^j = \frac{\omega_3 - \omega_j}{\omega_1 - \omega_j} = \frac{\omega_3 - \omega_j}{0 - \omega_j} = 1 - \frac{\omega_3}{\omega_j} = 1 - i_{3j}^1$$

$$i_{3j}^1 = 1 - i_{31}^j = 1 - \frac{z_2}{z_3} \left( -\frac{z_1}{z_2} \right) = 1 + \frac{z_1}{z_3}$$



# Obliczanie przełożeń przekładni planetarnych - metoda Willisa

Szybszą metodą stosowania wzoru Willisa jest przenoszenie wskaźników przełożenia  $i$ . Z przykładu 2 wynika, że zamiana dolnego prawego wskaźnika z górnym, równoznaczna ze zmianą członu biernego na nieruchomy i odwrotnie, powoduje zmianę znaku przełożenia i dodanie liczby jeden ( $i_{13}^j = 1 - i_{1j}^3$ ). Natomiast zamiana członu czynnego na bierny i odwrotnie (przykład 3), widoczna jako przemieszczenie dolnych wskaźników, skutkuje tym, że przełożenie jest odwrotnością (wynika to z definicji) ( $\frac{1}{i_{13}^j} = i_{31}^j$ ).

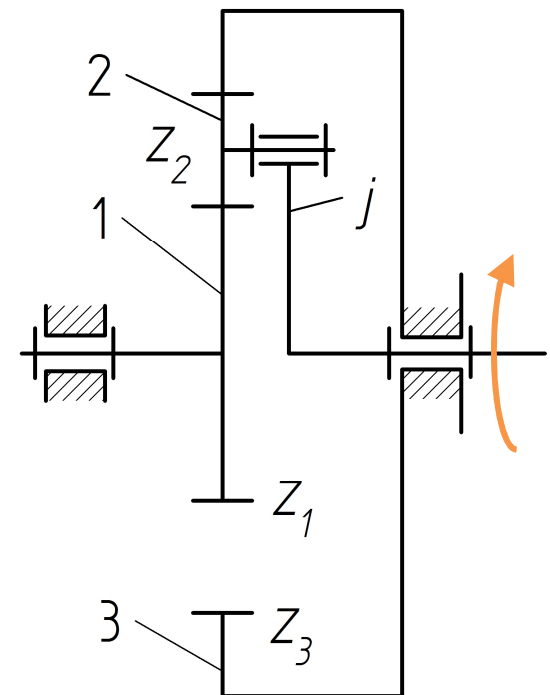
Przedstawione to będzie w poniższym przykładzie.

## Przykład

Człon czynny –  $j$ , człon bierny –  $1$ , człon nieruchomy –  $3$

$i_{j1}^3 = ?$

$$i_{j1}^3 = \frac{1}{i_{1j}^3} = \frac{1}{1 - i_{13}^j} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{z_2 z_3}{z_1 z_2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{z_3}{z_1}}$$



# Obliczanie przełożeń przekładni planetarnych - metoda tablicowa

Metoda tablicowa Swampa bazuje na prawidłowości (zasadzie superpozycji), że położenia końcowe członów nie są uzależnione od tego, czy człon porusza się jednocześnie tak jak w rzeczywistym mechanizmie czy w przyjętej sekwencji. Tak jak było już wspomniane, istota metody sprowadza się do wybrania takiej kolejności ruchów, aby traktować jarzmo jako człon nieruchomy.

W pierwszym kroku zakłada się, że wszystkie człony przekładni, z wyjątkiem korpusu, zachowują się jak sztywno połączone i wykonują jeden obrót albo poruszają się z prędkością i zwrotem jarzma  $\omega_j$ . Wartości przemieszczenia lub prędkości członów wpisuje się do pierwszego wiersza tabeli. W drugim kroku człon odzyskuje stopnie swobody, ponieważ jarzmo wykonało już swój ruch, w dalszej części analizy traktowane jest jako nieruchome. W przypadku przekładni z jednym stopniem swobody należy człon nieruchomy przemieścić do pozycji początkowej, poprzez nadanie przemieszczenia albo prędkość o zwrocie przeciwnym niż w pierwszym kroku ( $-\omega_j$ ). Powoduje to ruch reszty ogniw, które należy obliczyć z uwzględnieniem kierunków obrotów, pamiętając że jarzmo jest nieruchome. Wyniki wpisywane są w drugim wierszu. Jeśli natomiast przekładnia ma dwa stopnie swobody, to przemieszczany jest do pozycji początkowej człon napędzający. W trzecim wierszu sumowane są przemieszczenia albo ruchy członów.

## Obliczanie przełożeń przekładni planetarnych - metoda tablicowa

Dla przekładni o dwóch stopniach swobody nadawane jest jeszcze znane przemieszczenie członu napędzającego i wyznaczane są ruchy pozostałych ogniw (przy nieruchomym jarzmie), a wyniki wpisywane są do czwartego wiersza. W piątym wierszu następuje sumowanie. Znając prędkości albo przemieszczenia członów można wyznaczyć dowolne przełożenie lub prędkość członu. Liczba kroków (wierszy w tabeli) zależy od stopnia złożoności przekładni.

# Obliczanie przełożeń przekładni planetarnych - metoda tablicowa

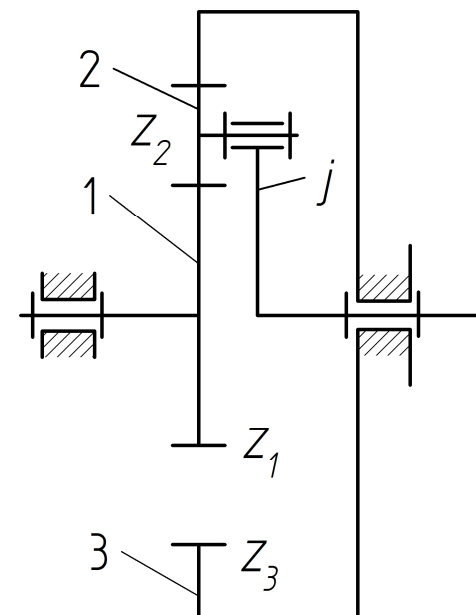
## Przykład 1

Określ prędkości kątowe członów przekładni planetarnej (służącej do napędu kieratu – członem czynnym jest jarzmo a biernym koło słoneczne) o jednym stopniu swobody i oblicz wszystkie możliwe przełożenia.

Satelita rzadko jest członem czynnym albo biernym, dlatego dla przedstawionego przykładu najczęściej w tabeli nie tworzy się dodatkowej kolumny. Dla lepszego zrozumienia istoty metody uwzględniono jednak i taki przypadek.

Ilość możliwych przełożeń  $i$  dla  $n$  – członów wynosi

$$i = n! = 3! = 6$$

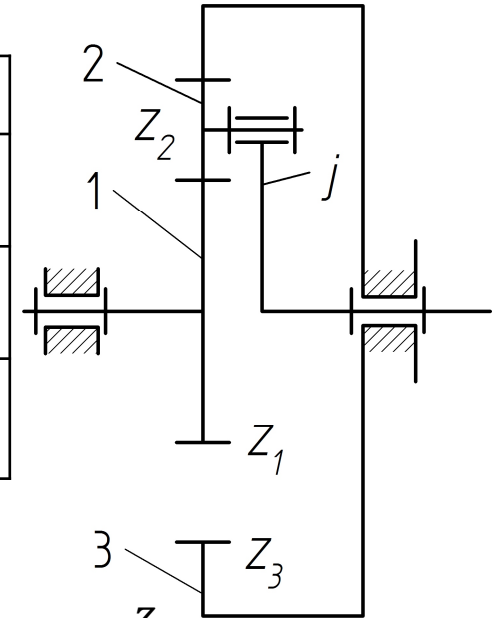


| Lp. | Wykonany ruch                         | Koło słoneczne 1                            | Satelita 2                                  | Koło koronowe 3 | Jarzmo $j$ |
|-----|---------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------|------------|
| 1.  | Obrót wszystkich członów o $\omega_j$ | $\omega_j$                                  | $\omega_j$                                  | $\omega_j$      | $\omega_j$ |
| 2.  | Obrót koła koronowego o $-\omega_j$   | $\omega_j \frac{Z_3}{Z_1}$                  | $-\omega_j \frac{Z_3}{Z_2}$                 | $-\omega_j$     | 0          |
| 3.  | Suma 1+2                              | $\omega_j \left(1 + \frac{Z_3}{Z_1}\right)$ | $\omega_j \left(1 - \frac{Z_3}{Z_2}\right)$ | 0               | $\omega_j$ |

# Obliczanie przełożeń przekładni planetarnych - metoda tablicowa

Przykład 1 cd.

| Lp. | Wykonany ruch                         | Koło słoneczne 1                            | Satelita 2                                  | Koło koronowe 3 | Jarzmo $j$ |
|-----|---------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------|------------|
| 1.  | Obrót wszystkich członów o $\omega_j$ | $\omega_j$                                  | $\omega_j$                                  | $\omega_j$      | $\omega_j$ |
| 2.  | Obrót koła koronowego o $-\omega_j$   | $\omega_j \frac{z_3}{z_1}$                  | $-\omega_j \frac{z_3}{z_2}$                 | $-\omega_j$     | 0          |
| 3.  | Suma 1+2                              | $\omega_j \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right)$ | $\omega_j \left(1 - \frac{z_3}{z_2}\right)$ | 0               | $\omega_j$ |



$$i_{j1}^3 = \frac{\omega_j}{\omega_1} = \frac{\omega_j}{\omega_j \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{z_3}{z_1}}$$

$$i_{1j}^3 = \frac{\omega_1}{\omega_j} = \frac{\omega_j \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right)}{\omega_j} = \frac{1 + \frac{z_3}{z_1}}{1} = 1 + \frac{z_3}{z_1}$$

$$i_{21}^3 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\omega_j \left(1 - \frac{z_3}{z_2}\right)}{\omega_j \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right)} = \frac{1 - \frac{z_3}{z_2}}{1 + \frac{z_3}{z_1}}$$

$$i_{12}^3 = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_j \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right)}{\omega_j \left(1 - \frac{z_3}{z_2}\right)} = \frac{1 + \frac{z_3}{z_1}}{1 - \frac{z_3}{z_2}}$$

$$i_{2j}^3 = \frac{\omega_2}{\omega_j} = \frac{\omega_j \left(1 - \frac{z_3}{z_2}\right)}{\omega_j} = 1 - \frac{z_3}{z_2}$$

$$i_{j2}^3 = \frac{\omega_j}{\omega_2} = \frac{\omega_j}{\omega_j \left(1 - \frac{z_3}{z_2}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{z_3}{z_2}}$$

# Obliczanie przełożeń przekładni planetarnych - metoda tablicowa

Przykład 1 cd.

$$i_{j1}^3 = \frac{\omega_j}{\omega_1} = \frac{1}{1 + \frac{z_3}{z_1}} \Rightarrow \omega_1 = \omega_j \left( 1 + \frac{z_3}{z_1} \right)$$

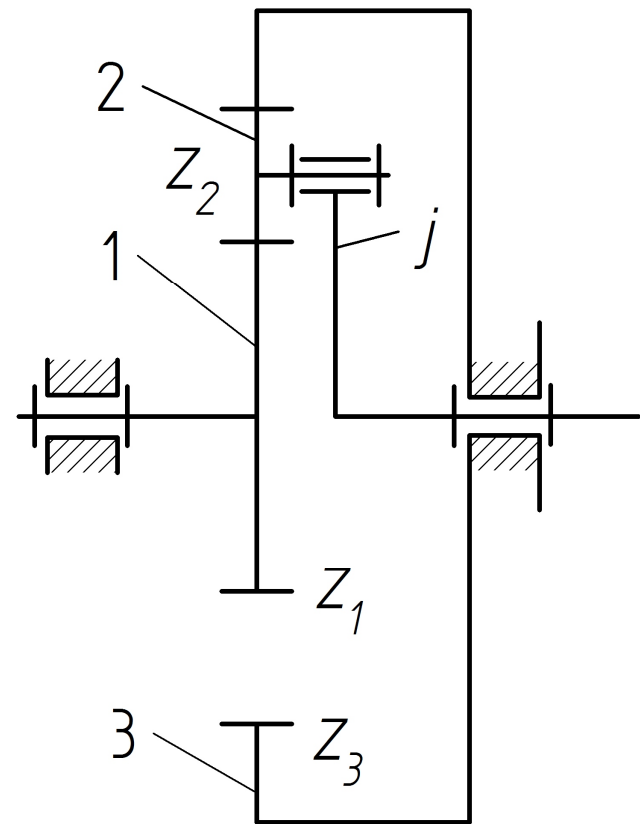
$$i_{1j}^3 = \frac{\omega_1}{\omega_j} = 1 + \frac{z_3}{z_1} \Rightarrow \omega_j = \frac{\omega_1}{1 + \frac{z_3}{z_1}}$$

$$i_{21}^3 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1 - \frac{z_3}{z_2}}{1 + \frac{z_3}{z_1}} \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 \frac{1 + \frac{z_3}{z_1}}{1 - \frac{z_3}{z_2}}$$

$$i_{12}^3 = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1 + \frac{z_3}{z_1}}{1 - \frac{z_3}{z_2}} \Rightarrow \omega_2 = \omega_1 \frac{1 - \frac{z_3}{z_2}}{1 + \frac{z_3}{z_1}}$$

$$i_{2j}^3 = \frac{\omega_2}{\omega_j} = 1 - \frac{z_3}{z_2} \Rightarrow \omega_j = \frac{\omega_2}{1 - \frac{z_3}{z_2}}$$

$$i_{j2}^3 = \frac{\omega_j}{\omega_2} = \frac{1}{1 - \frac{z_3}{z_2}} \Rightarrow \omega_2 = \omega_j \left( 1 - \frac{z_3}{z_2} \right)$$

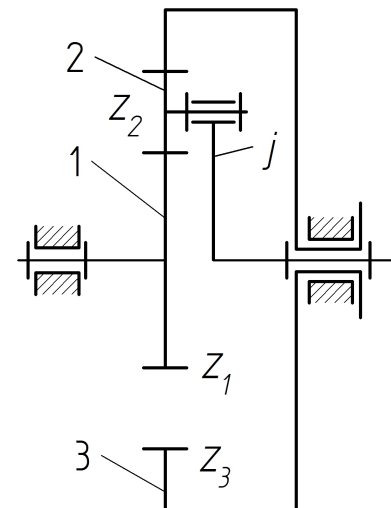


# Obliczanie przełożeń przekładni planetarnych - metoda tablicowa

## Przykład 2

Określ prędkości kątowne członów przekładni planetarnej o dwóch stopniach swobody. Członem o znanym ruchu jest jarzmo i koło koronowe 3.

Sposób rozwiązania w pierwszych trzech krokach jest taki sam jak w przykładzie 1. Należy dodatkowo uwzględnić ruch koła koronowego 3 w kroku czwartym.



| Lp. | Wykonany ruch                         | Koło słoneczne 1                                                       | Satelita 2                                                             | Koło koronowe 3 | Jarzmo j   |
|-----|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------|
| 1.  | Obrót wszystkich członów o $\omega_j$ | $\omega_j$                                                             | $\omega_j$                                                             | $\omega_j$      | $\omega_j$ |
| 2.  | Obrót koła koronowego o $-\omega_j$   | $\omega_j \frac{Z_3}{Z_1}$                                             | $-\omega_j \frac{Z_3}{Z_2}$                                            | $-\omega_j$     | 0          |
| 3.  | Suma wierszy 1+2                      | $\omega_j \left(1 + \frac{Z_3}{Z_1}\right)$                            | $\omega_j \left(1 - \frac{Z_3}{Z_2}\right)$                            | 0               | $\omega_j$ |
| 4.  | Obrót koła koronowego o $\omega_3$    | $-\omega_3 \frac{Z_3}{Z_1}$                                            | $\omega_3 \frac{Z_3}{Z_2}$                                             | $\omega_3$      | 0          |
| 5.  | Suma wierszy 3+4                      | $\omega_j \left(1 + \frac{Z_3}{Z_1}\right) - \omega_3 \frac{Z_3}{Z_1}$ | $\omega_j \left(1 - \frac{Z_3}{Z_2}\right) + \omega_3 \frac{Z_3}{Z_2}$ | $\omega_3$      | $\omega_j$ |

# Obliczanie przełożeń przekładni planetarnych - metoda tablicowa

Przykład 2 cd.

| Lp. | Wykonany ruch                         | Koło słoneczne 1                                                       | Satelita 2                                                             | Koło koronowe 3 | Jarzyno $j$ |
|-----|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-----------------|-------------|
| 1.  | Obrót wszystkich członów o $\omega_j$ | $\omega_j$                                                             | $\omega_j$                                                             | $\omega_j$      | $\omega_j$  |
| 2.  | Obrót koła koronowego o $-\omega_j$   | $\omega_j \frac{z_3}{z_1}$                                             | $-\omega_j \frac{z_3}{z_2}$                                            | $-\omega_j$     | 0           |
| 3.  | Suma wierszy 1+2                      | $\omega_j \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right)$                            | $\omega_j \left(1 - \frac{z_3}{z_2}\right)$                            | 0               | $\omega_j$  |
| 4.  | Obrót koła koronowego o $\omega_3$    | $-\omega_3 \frac{z_3}{z_1}$                                            | $\omega_3 \frac{z_3}{z_2}$                                             | $\omega_3$      | 0           |
| 5.  | Suma wierszy 3+4                      | $\omega_j \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right) - \omega_3 \frac{z_3}{z_1}$ | $\omega_j \left(1 - \frac{z_3}{z_2}\right) + \omega_3 \frac{z_3}{z_2}$ | $\omega_3$      | $\omega_j$  |

Prędkość koła słonecznego 1, przy znanym ruchu jarzma i koła koronowe 3, wynosi:

$$\omega_1 = \omega_j \left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right) - \omega_3 \frac{z_3}{z_1}$$

a satelity:

$$\omega_2 = \omega_j \left(1 - \frac{z_3}{z_2}\right) + \omega_3 \frac{z_3}{z_2}$$

