



Politechnika Lubelska

Katedra Podstaw Konstrukcji Maszyn i Mechatroniki

Teoria maszyn i mechanizmów (TMM)

Wykład 2

Analiza kinematyczna

Informacje ogólne

Kinematyka zajmuje się badaniem ruchu bez uwzględnienia przyczyn go powodujących. Opis ruchu wymaga dwóch podstawowych jednostek: długości w metrach i czasu w sekundach. Pozostałe jednostki są pochodnymi. Ruch jest pojęciem względnym i jego opis zależy od przyjętego układu odniesienia.

W zadaniu analizy zakłada się, że ruch członu napędzającego jest znany, a poszukiwane są parametry ruchu pozostałych członów mechanizmu względem podstawy. Celem analizy kinematycznej może być wyznaczenie:

- położenia członów lub torów punktów,
- prędkości,
- przyspieszeń.

Informacje ogólne

Typy ruchu ciała sztywnego:

1. Ruch płaski:

- postępowy - prostoliniowy i krzywoliniowy,
- obrotowy.

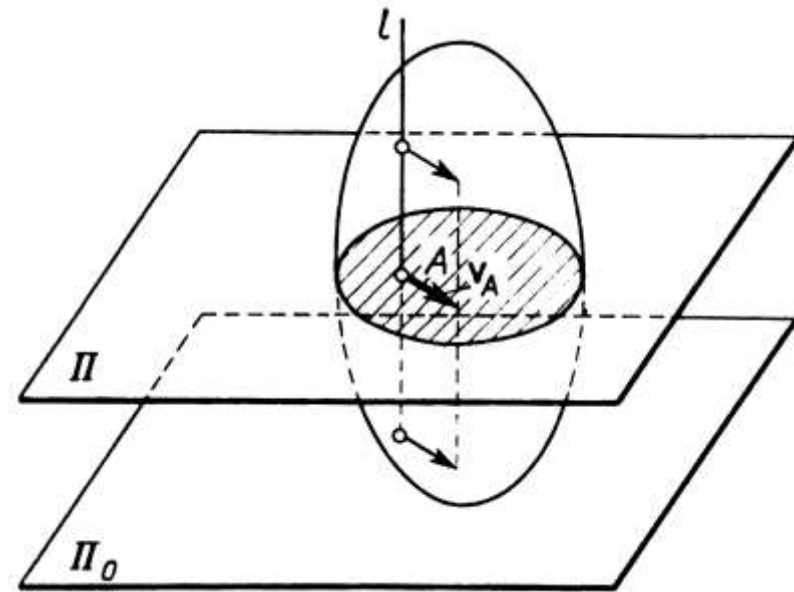
2. Ruch przestrzenny:

- kulisty,
- śrubowy,
- ogólny.

Ruch płaski ciała sztywnego zachodzi wtedy, jeśli wszystkie punkty ciała poruszają się w płaszczyznach równoległych do pewnej nieruchomej płaszczyzny.

Rozszerzając tę definicję na wszystkie człony ruchome mechanizmu wydziela się grupę zwaną *mechanizmami płaskimi*.

Większość mechanizmów stosowanych w praktyce zalicza się do tej grupy.



Rys. [Leyko 2012]

Informacje ogólne

1. Ruch postępowy

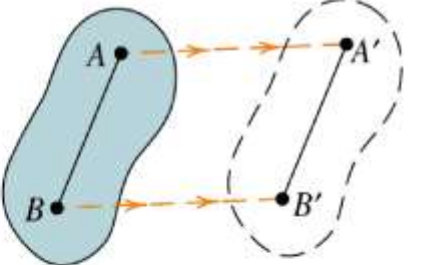
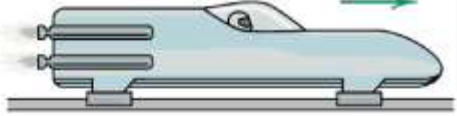
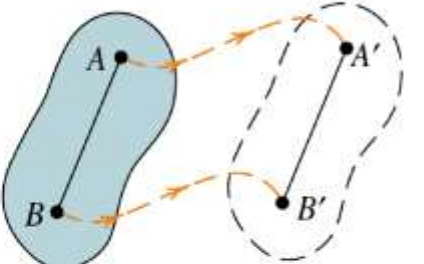
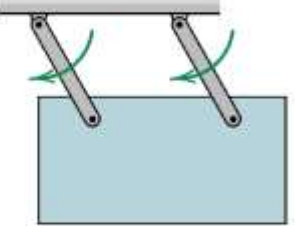
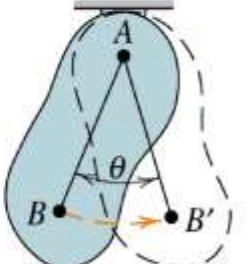
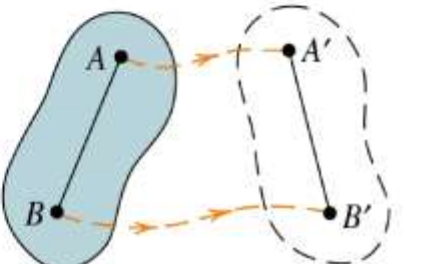
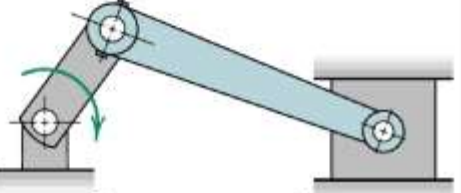
1.1. Ruch prostoliniowy

1.2 Ruch krzywoliniowy

2. Ruch obrotowy

Ruch płaski

Podział ruch płaskiego

(a) Rectilinear translation		Example  Rocket test sled
(b) Curvilinear translation		 Parallel-link swinging plate
(c) Fixed-axis rotation		 Compound pendulum
(d) General plane motion		 Connecting rod in a reciprocating engine

Informacje ogólne

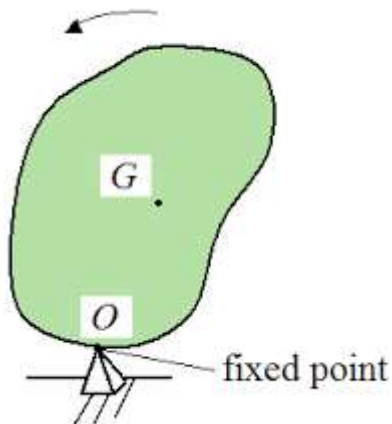
Podział ruchu przestrzennego

Ruch ogólny



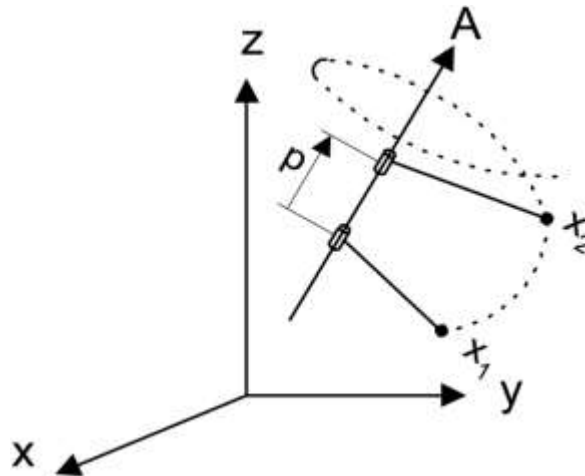
Rys. [<http://www.4wdmechanix.com/Video-Youth-Wins-Ride-in-4WD-Desert-Race-Car%21?r=1>]

Ruch kulisty



Rys. [<http://www.real-world-physics-problems.com/kinetic-energy.html>]

Ruch śrubowy



Rys. [<http://biomechanical.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1841517>]



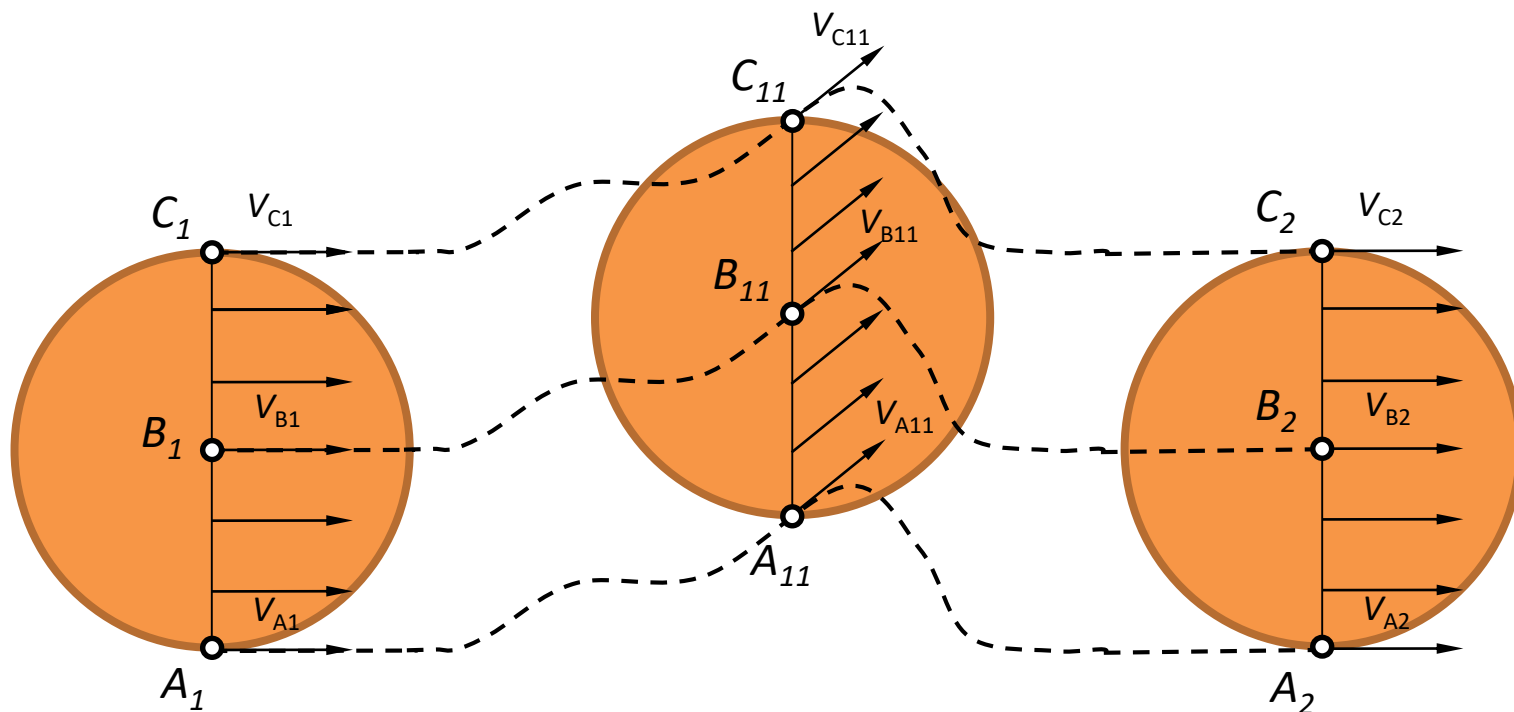
Rys. [<http://kmodl.library.cornell.edu/model.php?m=1>]

Ruch postępowy

„Człon jest w **ruchu postępowym** wtedy, gdy dowolny odcinek, związany z tym członem, zachowuje we wszystkich fazach ruchu położenie równoległe” [Miller 1996].

Dlatego w ruchu tym tory wszystkich punktów członu są identyczne, tak jak i prędkości i przyspieszenia.

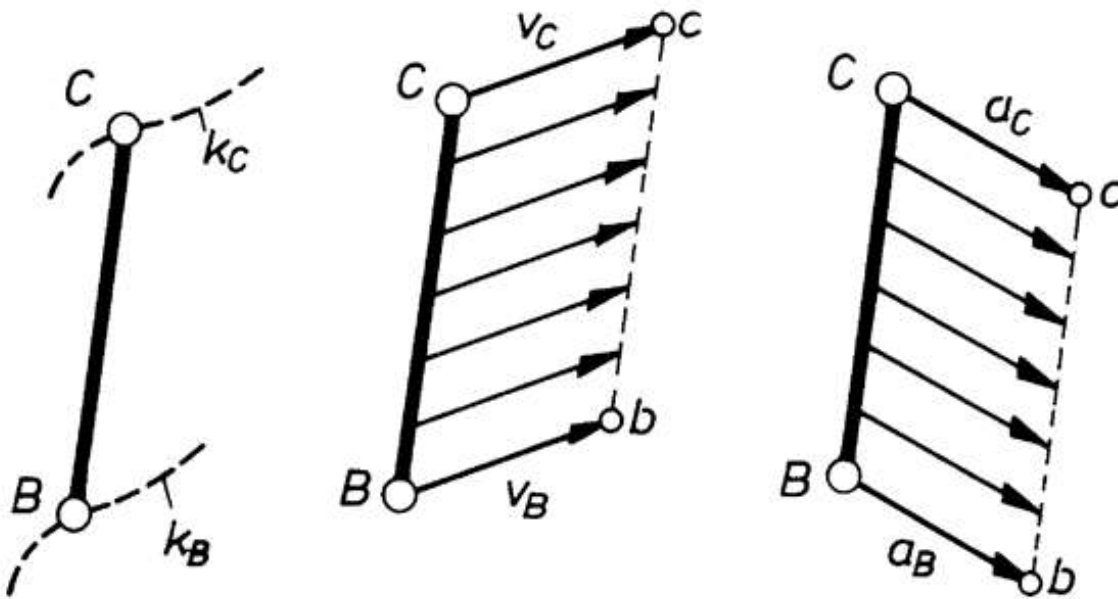
W ruchu prostoliniowym tory są linią prostą a w krzywoliniowym krzywą.



Ruch postępowy

$$v = ds/dt, \quad \text{Prędkość [m/s]}$$

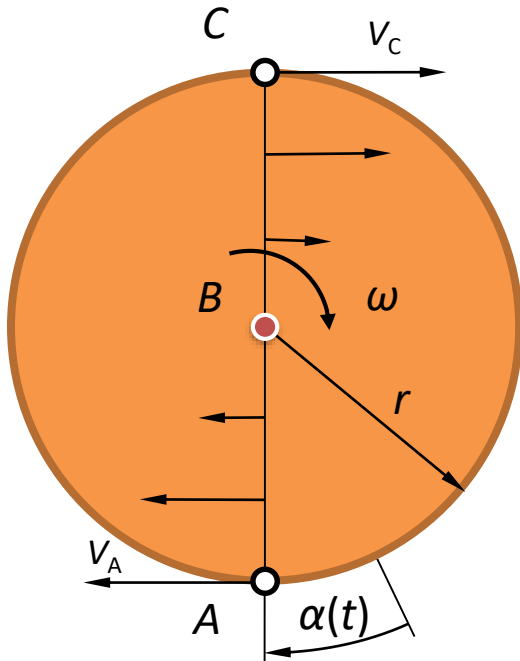
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{Przyspieszenie [m/s}^2\text{]}$$



$$v_B = v_C = v_i, \quad \omega = 0, \\ a_B = a_C = a_i, \quad \varepsilon = 0,$$

Ruch obrotowy

Ruch obrotowy występuje wtedy, jeśli tory wszystkich punktów ciała zakreślają okręgi, których środki leżą na wspólnej prostej zwanej osią obrotu. Oznacza to, że każdy punkt ciała obraca się o taki sam kąt.



$$\omega = \frac{\pi n}{30} [\text{rad/s}] \quad n [\text{obr/min}]$$

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha} \quad \text{Prędkość kątowa [rad/s]}$$

$$v_A = v_C = \omega \cdot r, \quad \text{Prędkość liniowa [m/s]}$$
$$v_B = 0.$$



Rys. [<http://energyeducation.ca/encyclopedia/Gear>]

Ruch obrotowy

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\alpha}{dt} \right) = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \ddot{\alpha} \quad \text{Przyspieszenie kątowe [rad/s}^2\text{]}$$

$$a_n = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

Przyspieszenie normalne

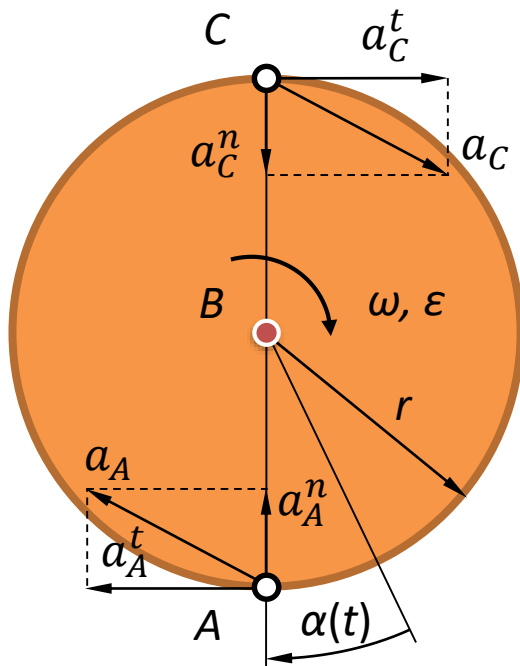
$$a_t = \varepsilon r$$

Przyspieszenie styczne

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = r \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

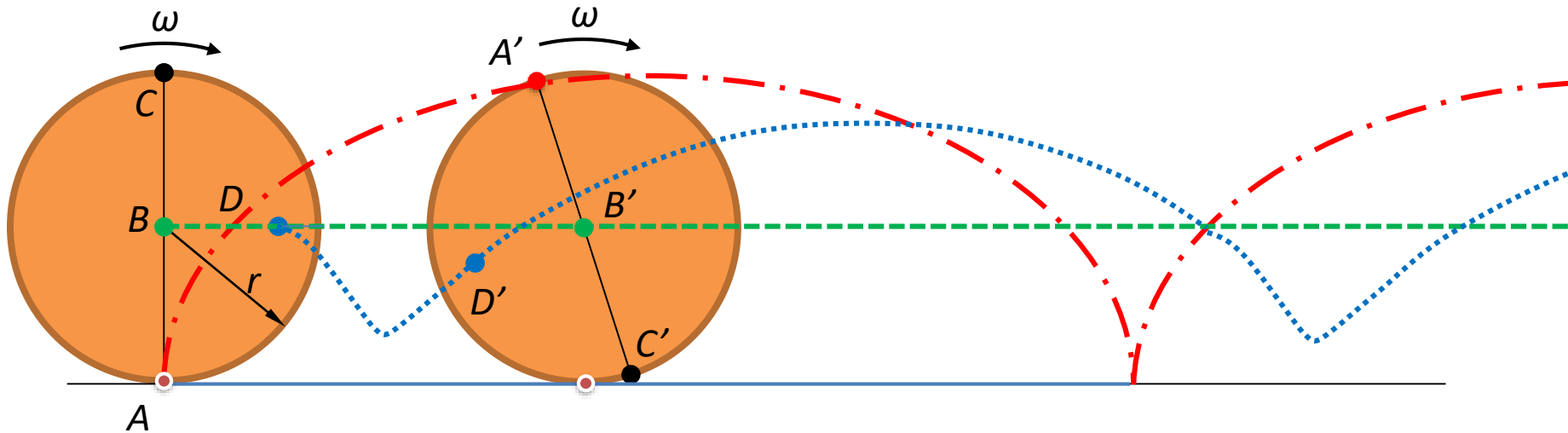
$$a_A = a_c$$

$$a_B = 0$$



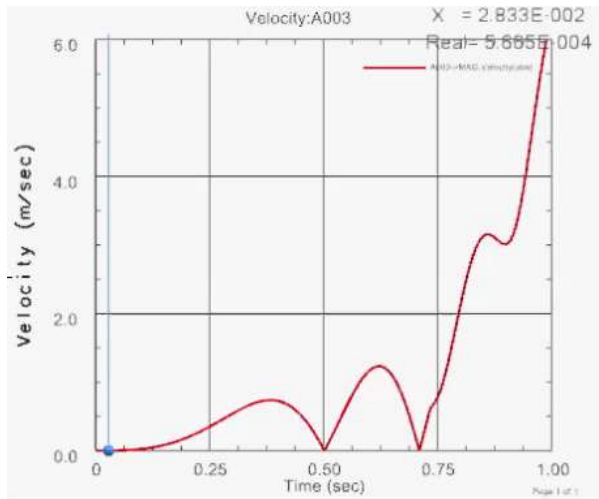
Ruch płaski

Przypominając, **ruch płaski** ciała sztywnego zachodzi wtedy, jeśli wszystkie punkty ciała poruszają się w płaszczyznach równoległych do pewnej nieruchomej płaszczyzny. Ruch postępowy i obrotowy są szczególnymi przypadkami ruchu płaskiego.

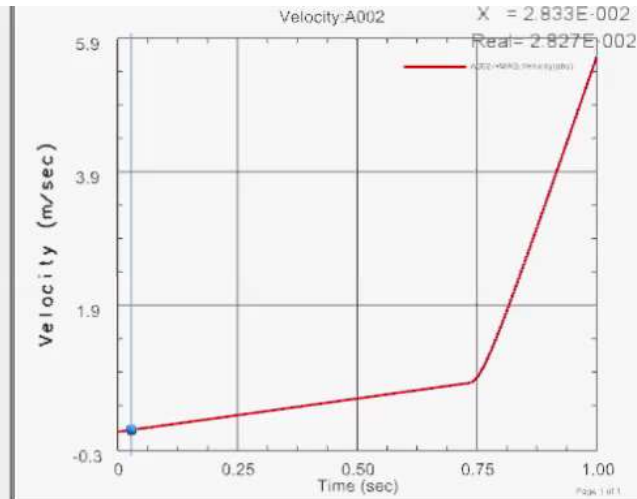


Ruch płaski

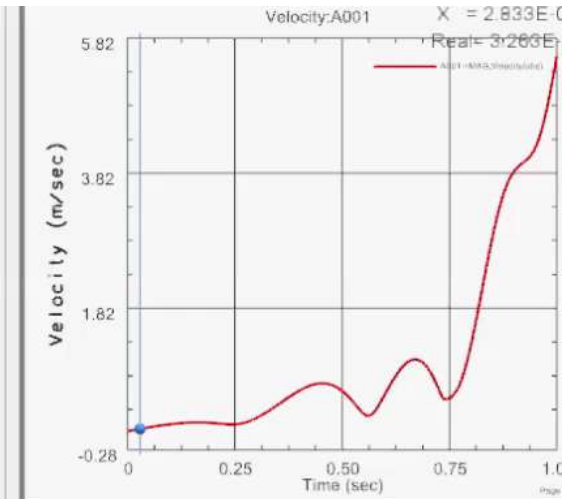
Tory punktów, wartości prędkości i przyspieszeń są w ogólności różne od siebie.



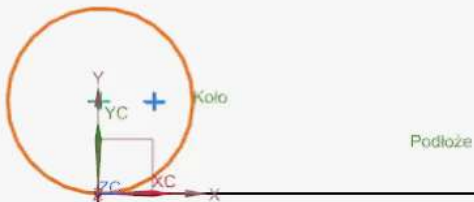
Chwilowy środek obrotu (na początku symulacji)



Środek koła



Niebieski punkt



Ruch płaski – metody analizy

1. Na podstawie równania ruchu i jego postaci po zróżniczkowaniu określa się położenia, prędkości i przyspieszenia.

W celu ułatwienia analizy ruchu płaskiego może on być traktowany jako:

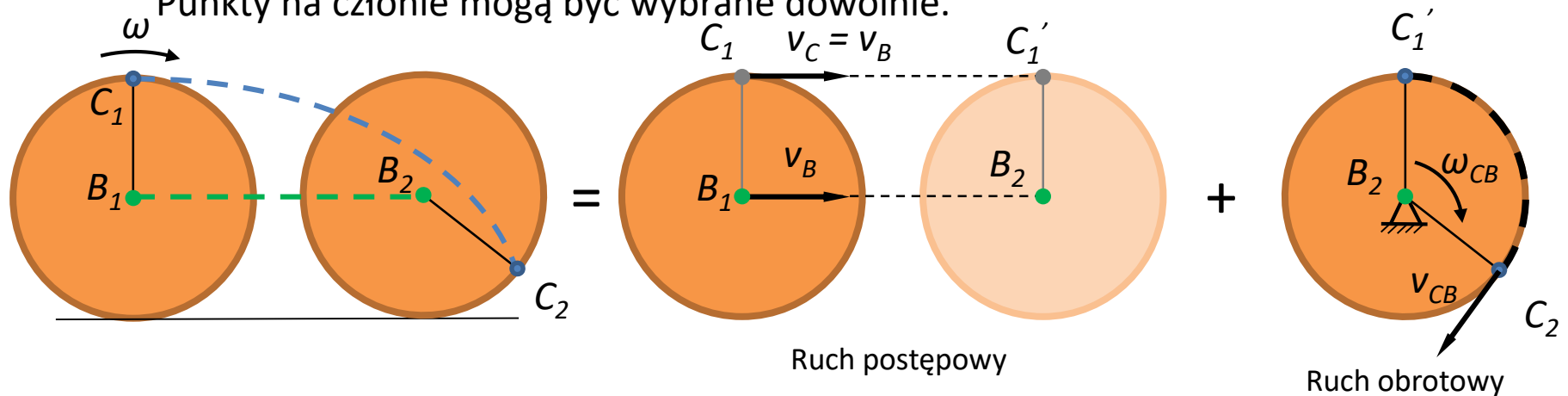
2. **Złożony** z ruchu postępowego i obrotowego.
3. **Obrotowy** wokół chwilowego środka obrotu.
4. Trzecią możliwością obliczenia prędkości członu w tym ruchu to skorzystanie z *zależności między prędkościami punktów ciała sztywnego (metoda rzutów prędkości)*.

Ruch płaski jako ruch złożony z ruchu postępowego i obrotowego

Metoda ta umożliwia wyznaczenie prędkości punktu członu sztywnego, jeśli znana jest:

- prędkość jednego punktu (wartość, kierunek),
- kierunek szukanej prędkości.

Ruch członu, **w nieskończenie krótkim okresie czasu**, jest traktowany jako złożony z dwóch ruchów - postępowego i obrotowego. W pierwszym kroku przemieszcza się koło z prędkością v_B z punktu B_1 do B_2 , a następnie obraca względem tego punktu B_2 do momentu osiągnięcia przez punkt C_1' pozycji C_2 . Punkty na członie mogą być wybrane dowolnie.



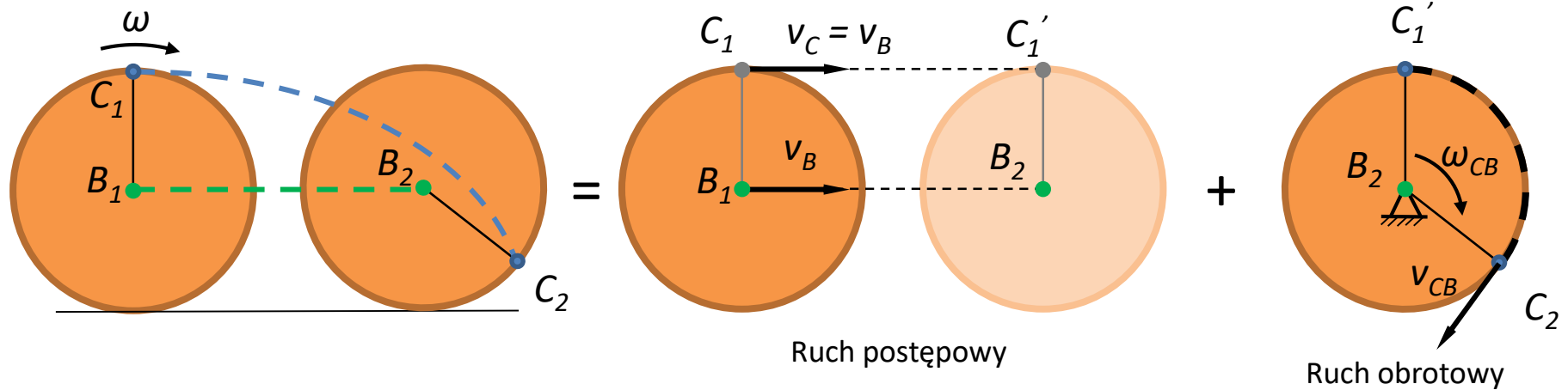
Ruch płaski jako ruch złożony z ruchu postępowego i obrotowego

Prędkość punktu C równa jest sumie prędkości punktu B w ruchu postępowym i prędkości punktu C względem punktu B w ruchu obrotowym:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$$

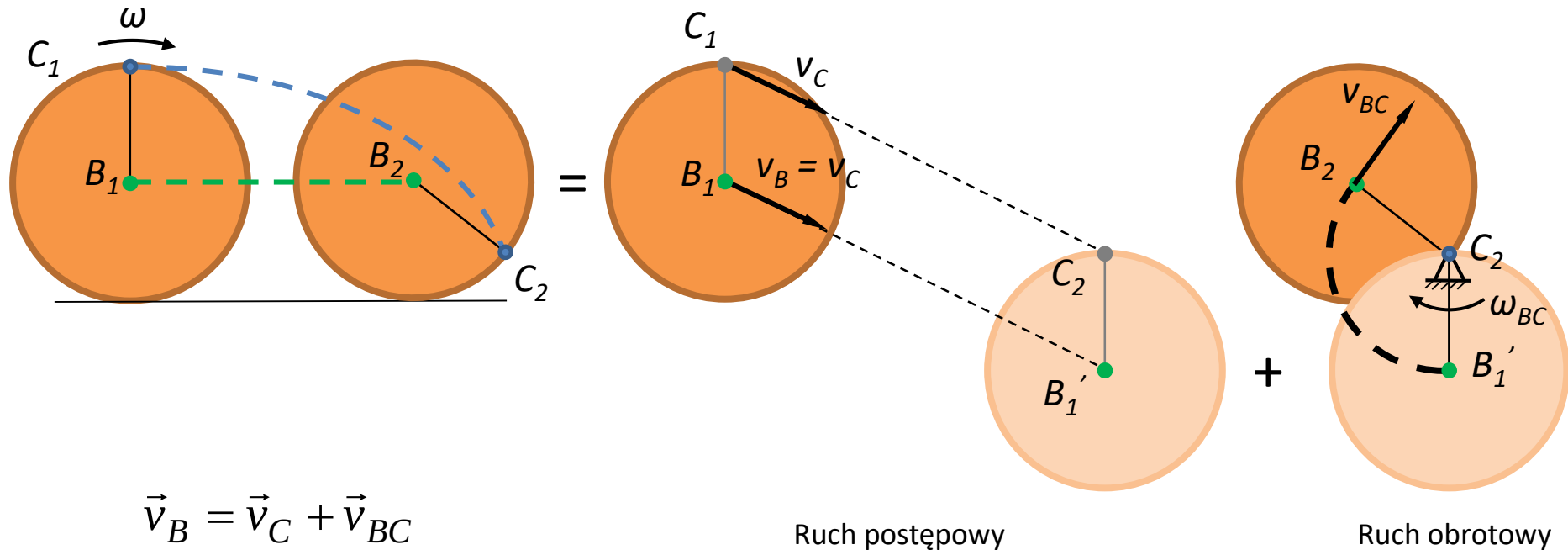
Prędkość względna jest zawsze prostopadła do prostej przechodzącej przez rozważane punkty i jest równa:

$$v_{CB} = \omega_{CB} r$$



Ruch płaski jako ruch złożony z ruchu postępowego i obrotowego

To samo przemieszczenie można rozpatrywać przemieszczając człon postępowo w celu zmiany położenia punktu z C_1 na C_2 , a następnie obrót względem tego punktu tak, aby punkt B_1' osiągnął położenie B_2 .



$$\vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{BC}$$

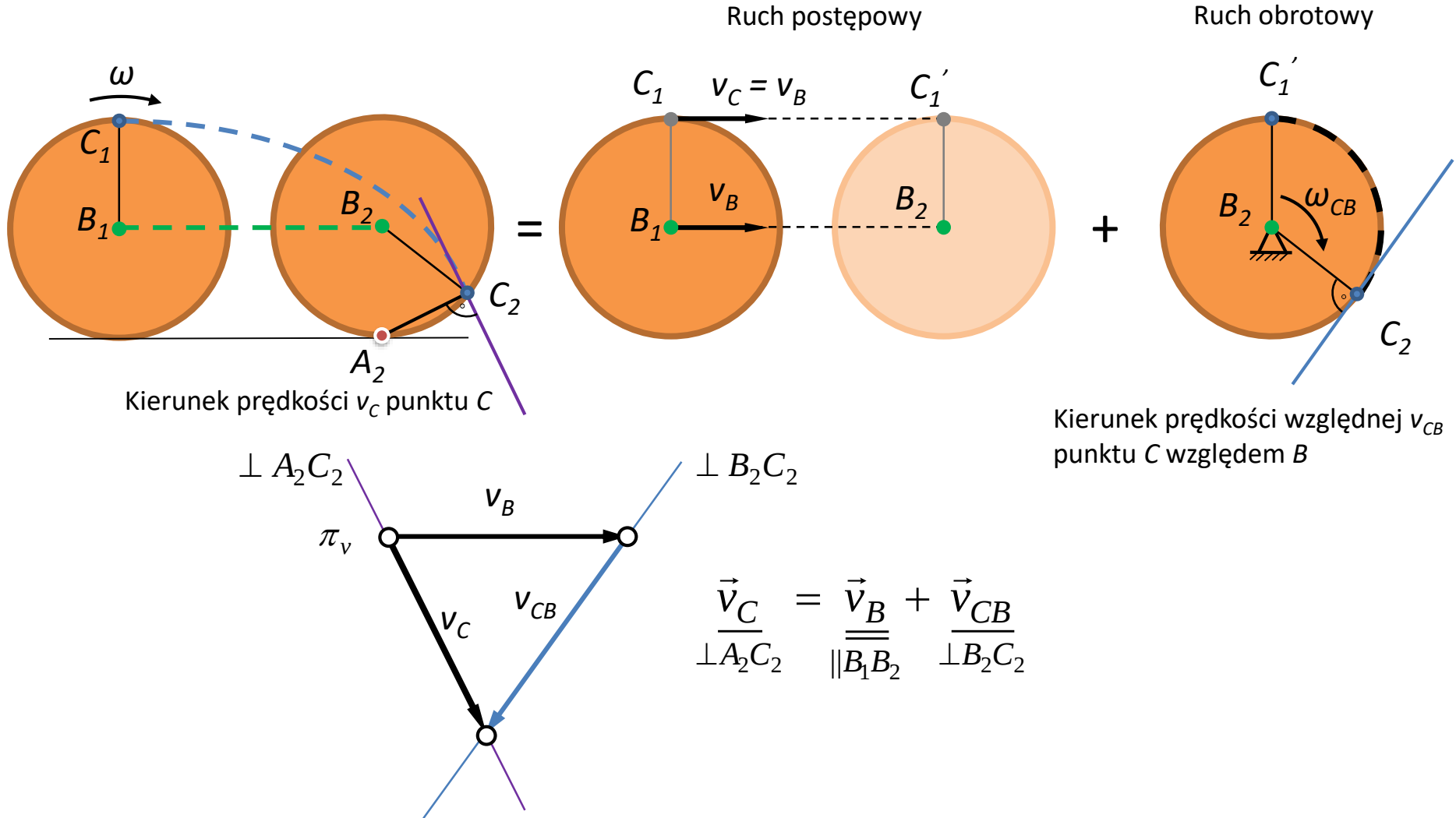
$$\vec{v}_{BC} = \omega_{BC} r$$

$$\vec{v}_{BC} = -\vec{v}_{CB}$$

Prędkości względne punktów członu są równe co do wartości i mają przeciwne zwroty.

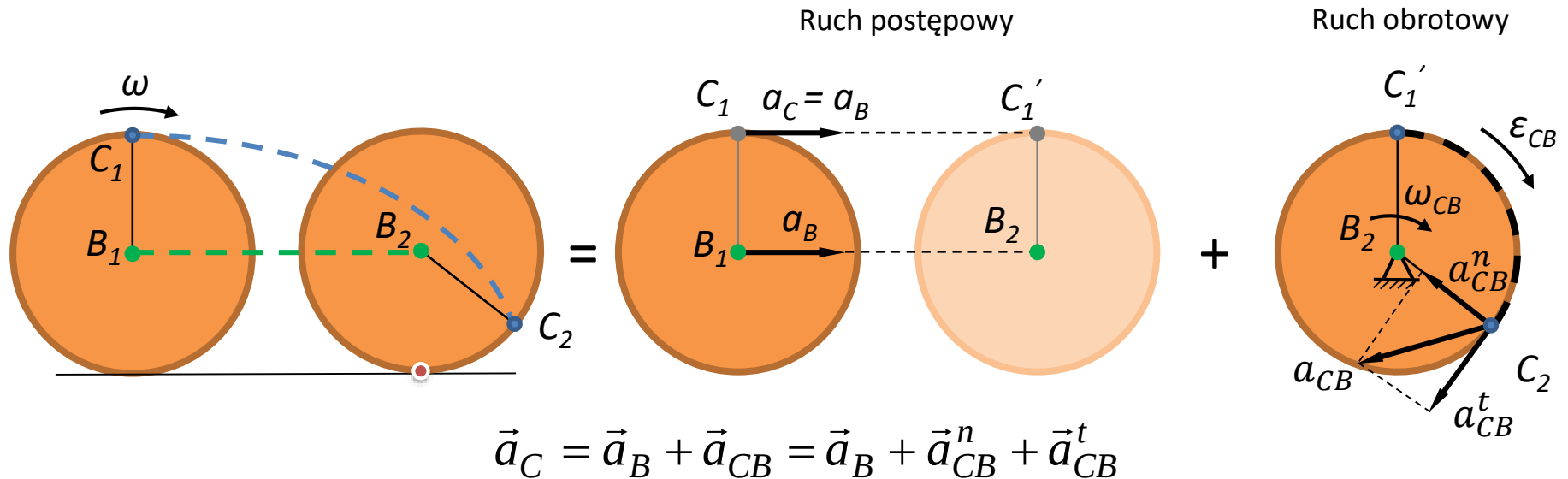
Ruch płaski jako ruch złożony z ruchu postępowego i obrotowego

Mając informacje o prędkości jednego punktu i kierunku szukanej prędkości oraz prędkości względnej, możemy ją wyznaczyć graficznie.



Ruch płaski jako ruch złożony z ruchu postępowego i obrotowego

W analogiczny sposób wyznacza się przyspieszenie punktu jako sumę przyspieszenia w ruchu postępowym i przyspieszenia względnego punktu w ruchu obrotowym.



Przyspieszenie względne a_{CB} składa się z przyspieszenia normalnego i stycznego, ponieważ człon wykonuje ruch obrotowy:

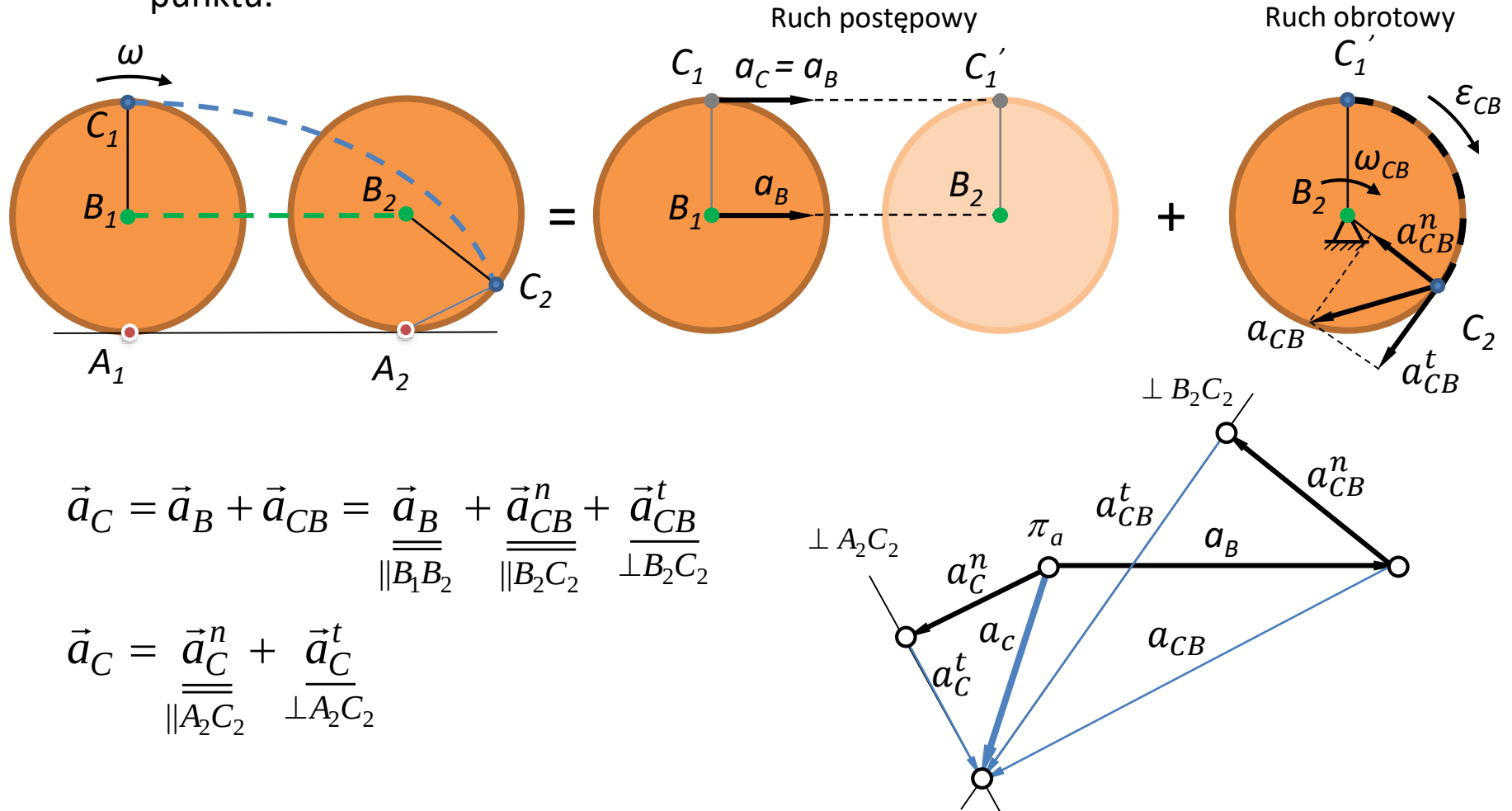
$$\vec{a}_{CB} = \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^t$$

$$a_{CB}^n = \omega_{CB}^2 r = \frac{v_{CB}^2}{r}$$

$$\vec{a}_{CB}^t = \vec{\varepsilon}_{CB} \times \vec{r}$$

Ruch płaski jako ruch złożony z ruchu postępowego i obrotowego

Znając przyspieszenie jednego punktu członu sztywnego oraz przyspieszenie względne normalne, kierunek przyspieszenia stycznego i kierunek szukanego przyspieszenia, możliwe jest graficzne wyznaczenie przyspieszenia drugiego punktu.

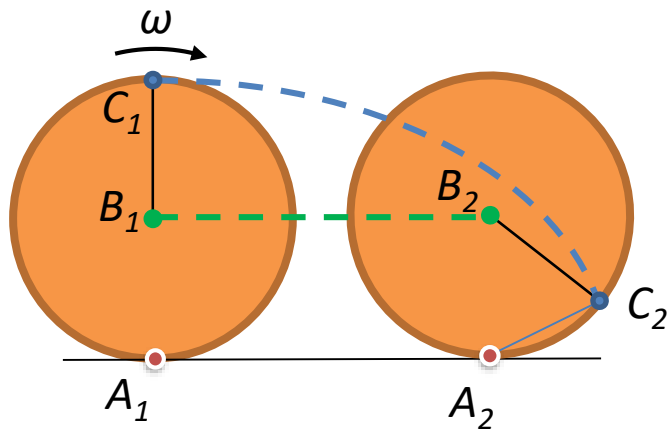


Ruch płaski jako ruch złożony z ruchu postępowego i obrotowego

W przypadku znajomości przyspieszenia punktu B i wyznaczaniu przyspieszenia punktu C metoda jest analogiczna i obowiązują zależności:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC}$$

$$\vec{a}_{CB} = -\vec{a}_{BC}$$



Podane wzory są słuszne dla dowolnie
wybranych punktów

Ruch płaski jako chwilowy ruch obrotowy

Do wyznaczenia prędkości dowolnego punktu członu sztywnego w praktyce wymagana jest znajomość:

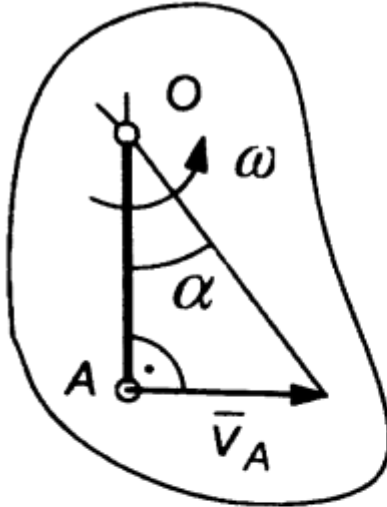
- prędkości jednego punktu,
- położenia chwilowego środka obrotu.

Dowolne przemieszczenie członu w ruchu płaskim może być przedstawione jako nieskończenie krótki ruch obrotowy wokół chwilowego środka obrotu. Środek ten ma prędkość równą zero tylko w rozważanym momencie. W następnej chwili jego położenie jest inne.

Ruch płaski jako chwilowy ruch obrotowy

Przykłady wyznaczania chwilowego środka obrotu uwidocznione są na poniższych rysunkach

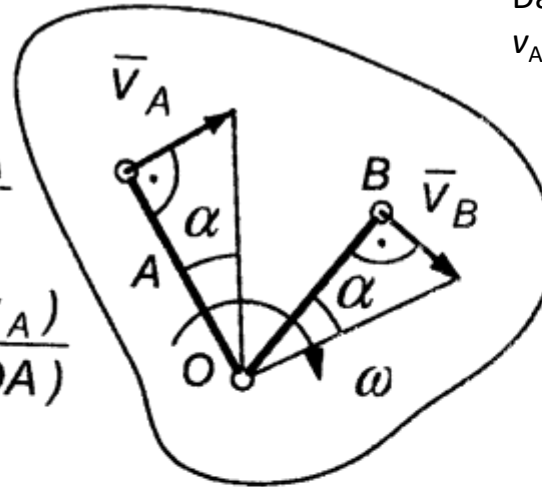
Dane:
 v_A, ω



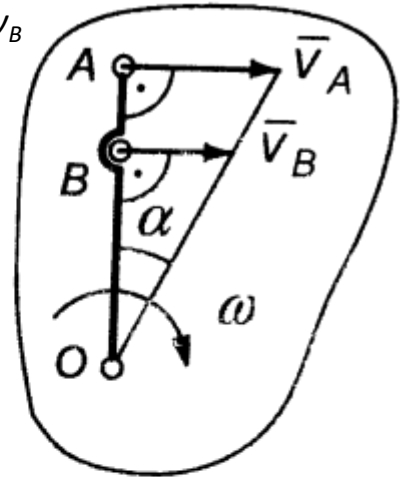
Dane:
 v_A, v_B

$$OA = \frac{v_A}{\omega}$$

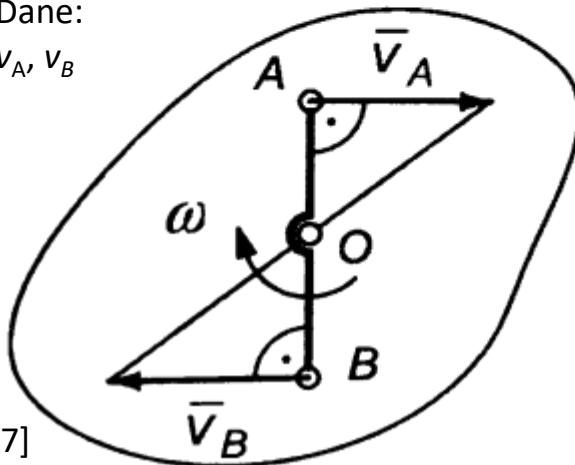
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(v_A)}{(OA)}$$



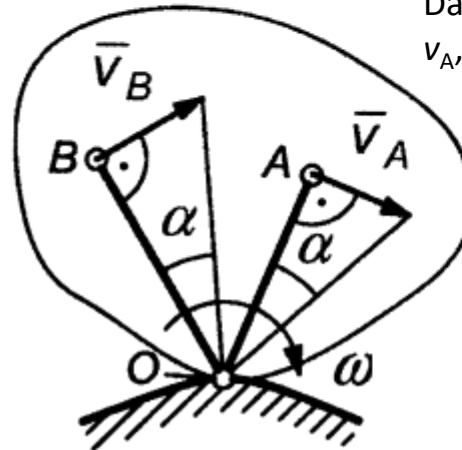
Dane:
 v_A, v_B



Dane:
 v_A, v_B



Dane:
 v_A, v_B

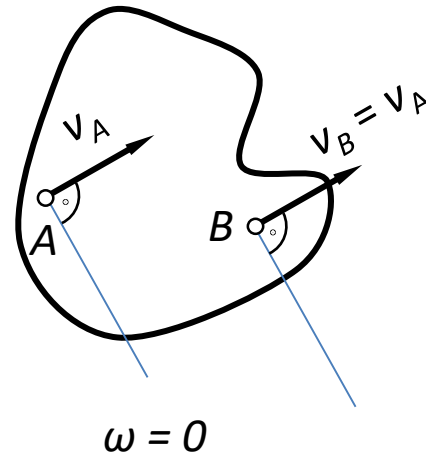
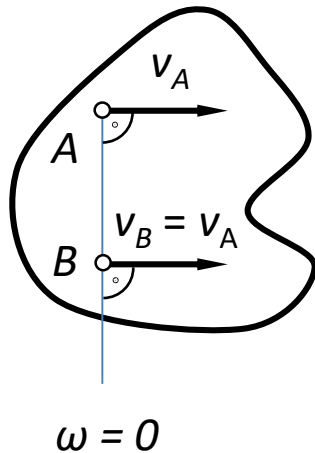


$$\omega = \frac{v_A}{OA} = \frac{v_B}{OB}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(v_A)}{(OA)} = \frac{(v_B)}{(OB)}$$

Ruch płaski jako chwilowy ruch obrotowy

Jeżeli człon porusza się ruchem postępowym, dla którego jak pamiętamy prędkość kątowa jest równa zero, chwilowy środek obrotu znajduje się w nieskończoności.



Ruch płaski jako chwilowy ruch obrotowy

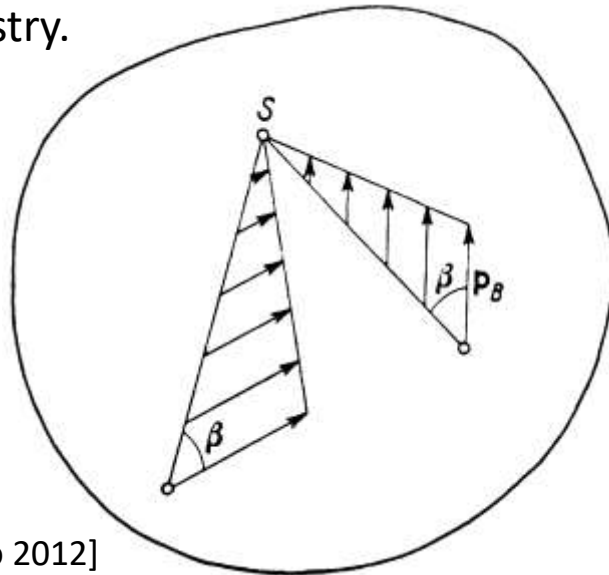
Do wyznaczenia przyspieszenia dowolnego punktu członu sztywnego w praktyce wymagana jest znajomość:

- przyspieszeń dwóch punktów.

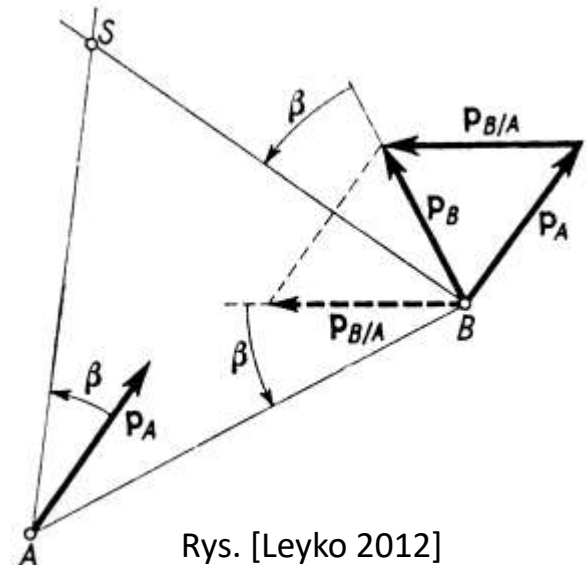
Analogicznie do chwilowego środka obrotu, istnieje również chwilowy środek przyspieszeń tzn. punkt, dla którego przyspieszenie w danej chwili jest równe zero.

Nie jest to często stosowana metoda ze względu na wymaganą znajomość przyspieszeń aż dwóch punktów. Potencjalne zastosowanie może być w przypadku członów z liczbą parów większą niż dwa.

Kąt β jaki tworzy wektor przyspieszenia z prostą przechodzącą przez chwilowy środek obrotu i początek wektora przyspieszenia jest stały i nie zależy od wybranego punktu. Jest to zawsze kąt ostry.



Rys. [Leyko 2012]



Rys. [Leyko 2012]

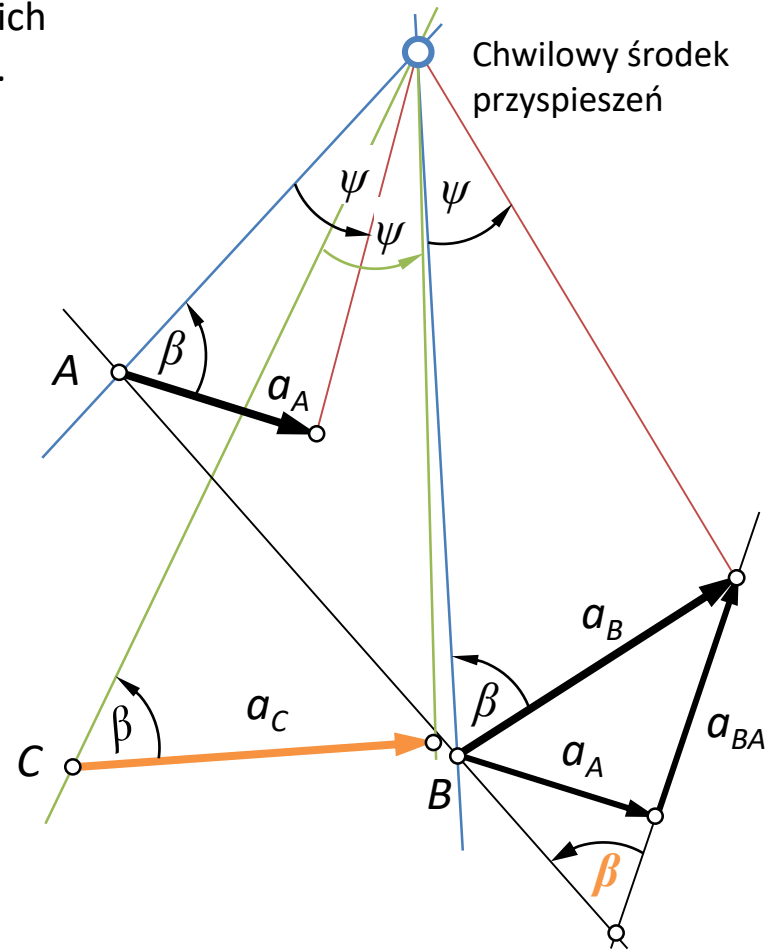
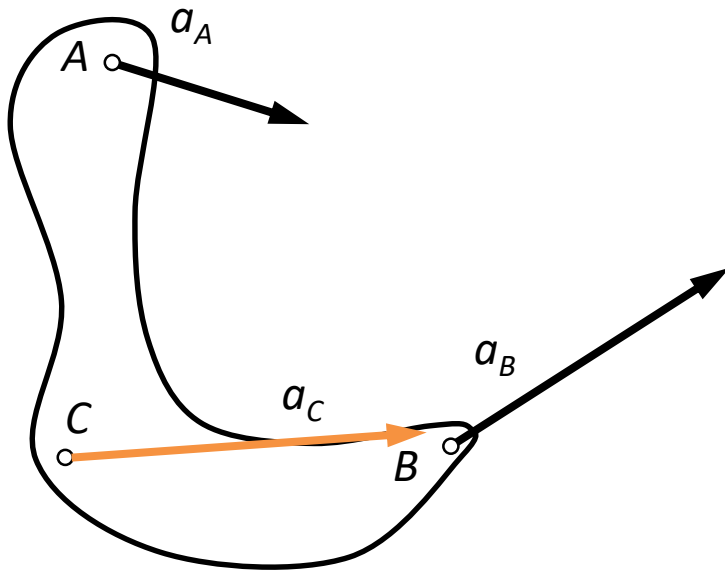
Ruch płaski jako chwilowy ruch obrotowy

Przykład

Wyznaczyć przyspieszenie punktu C członu sztywnego metodą chwilowego środka przyspieszenia znając przyspieszenia punktów A i B .

W rozwiązaniu korzysta się z zależności $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}$ w celu określenia kąta β , wyznaczonego przez przyspieszenie względne a_{BA} i prostą przechodzącą przez punkty A i B . Następnie, pamiętając, że kąt ψ jest stały dla wszystkich punktu członu, wyznacza się przyspieszenie punktu C .

Więcej szczegółów o tej metodzie można uzyskać w Leyko 2012 i Młynarski 1992.



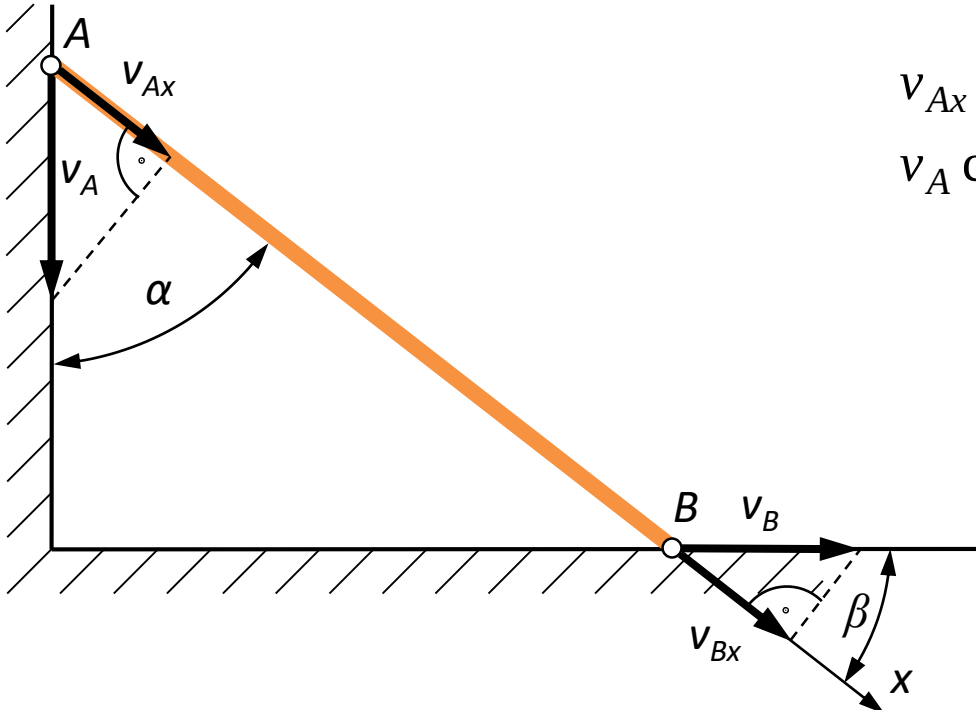
Ruch płaski - metoda rzutów prędkości

Metoda ta umożliwia wyznaczenie prędkości punktu członu sztywnego, jeśli znana jest:

- prędkość jednego punktu,
- kierunek szukanej prędkości.

Zależność między prędkościami punktów ciała sztywnego wynika ze stałej dzielącej ich odległości.

Metoda ta bazuje na twierdzeniu, że rzuty prędkości dowolnych punktów ciała sztywnego, leżących na wspólnej prostej, na tę prostą, są sobie równe.



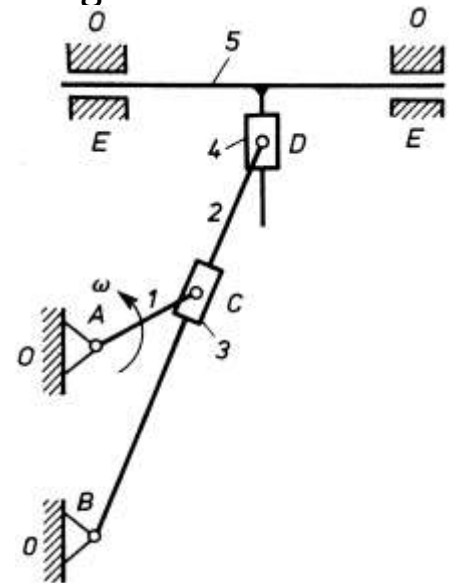
$$v_{Ax} = v_{Bx}$$
$$v_A \cos(\alpha) = v_B \cos(\beta)$$

Ruch względny

W technice spotyka się mechanizmy, w których jeden człon porusza się po drugim członie również będącym w ruchu. Dobrym przykładem jest ruchoma prowadnica i suwak. Bezpośrednie wyznaczenie prędkości i przyspieszenia suwaka względem podstawy (układu nieruchomego) jest zadaniem trudnym. Dlatego ruch suwaka rozpatruje się jeszcze względem drugiego ruchomego układu sztywno związanego z prowadnicą. W mechanice stosuje się następującą terminologię do określenia tych ruchów:

- **ruch bezwzględny** – ruch członu względem nieruchomego układu odniesienia,
- **ruch względny** – ruch członu względem ruchomego układu odniesienia,
- **ruch unoszenia** – ruch ruchomego układu względem nieruchomego układu.

W przykładzie ruchomej prowadnicy i suwaka *ruch bezwzględny* jest to ruch suwaka względem podstawy, *ruch względny* to ruch suwaka względem prowadnicy, a *ruch unoszenia* to ruch prowadnicy względem podstawy.



Rys. Mechanizm napędu stołu strugarki poprzecznej [Morecki 1987]

Ruch względny

Wzory na obliczanie prędkości i przyspieszeń z zastosowaniem ruchu względnego zostaną przedstawione na przykładzie suwaka i ruchomej prowadnicy.

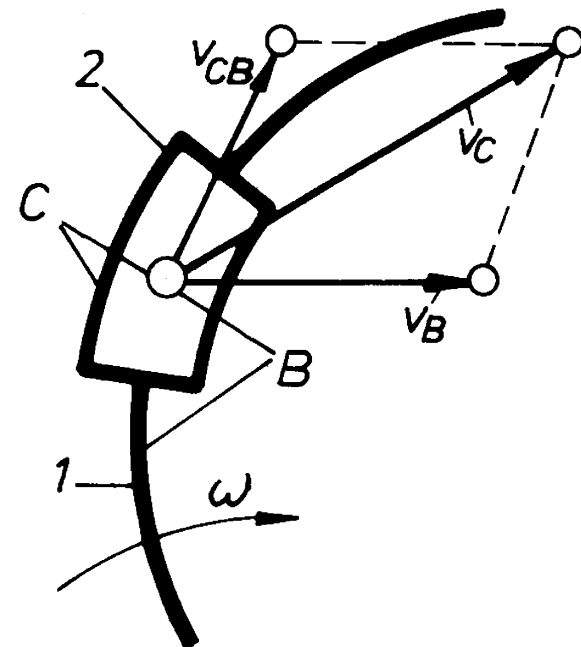
Prędkość suwaka v_C w punkcie C jest równa:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$$

v_{CB} - jest to prędkość względna (w ruchu względnym) punktu C względem B i jest zawsze styczną do prowadnicy (prowadnica nieruchoma, suwak ruchomy).

v_B - jest to prędkość punktu B , czyli unoszenia. Punkt B należy do prowadnicy i w rozpatrywanym momencie pokrywa się z punktem C należącym do suwaka.

Prędkość punktu B wynika z ruchu prowadnicy i powinna być znana. Prowadnica może być w ruchu postępowym, obrotowym lub płaskim.



Ruch względny

Przyspieszenie punktu C względem B jest równe:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}$$

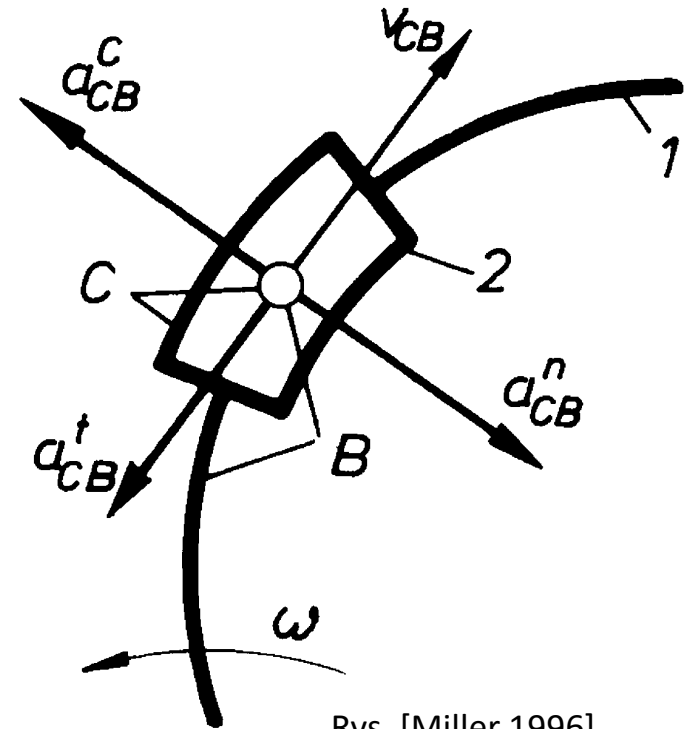
a_{CB} przyspieszenie punktu C względem B

$$\vec{a}_{CB} = \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^t + \vec{a}_{CB}^c$$

Przyspieszenie
normalne

Przyspieszenie
styczne

Przyspieszenie
Coriolisa



Rys. [Miller 1996]

Ruch względny

a_{CB}^n Przyspieszenie normalne

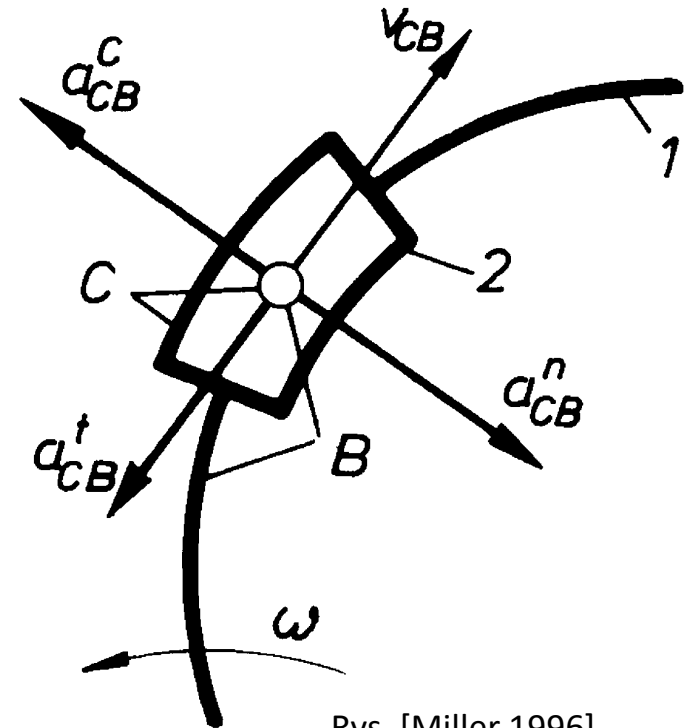
$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{\rho}$$

Zwrot przyspieszenia jest zgodny z promieniem krzywizny prowadnicy i skierowany jest w stronę jej środka.

ρ - promień krzywizny prowadnicy.

Jeśli prowadnica jest prostoliniowa ($\rho = \infty$), przyspieszenie normalne wynosi 0

$$\vec{a}_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{\infty} = 0$$



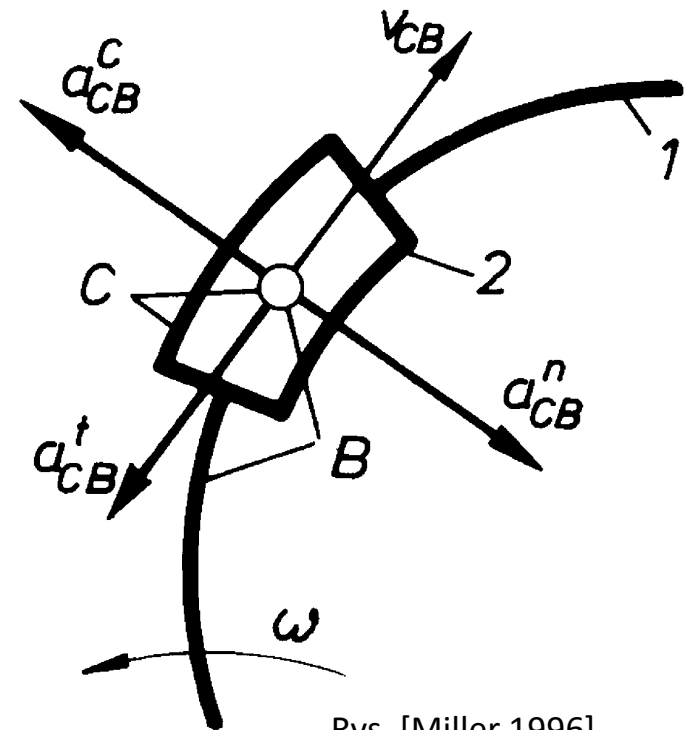
Rys. [Miller 1996]

Ruch względny

a_{CB}^t Przyspieszenie styczne

$$a_{CB}^t = \frac{dv_{CB}}{dt}$$

Kierunek przyspieszenia stycznego jest styczny do toru (prowadnicy)



Rys. [Miller 1996]

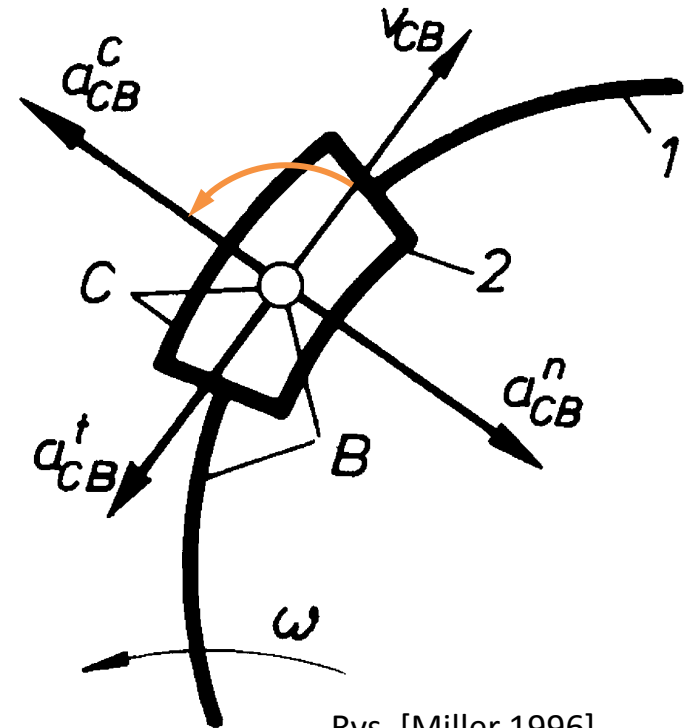
Ruch względny

a_{CB}^c Przyspieszenie Coriolisa

$$\vec{a}_{CB}^c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{CB}$$

Kierunek przyspieszenia Coriolisa jest wyznaczany przez obrót wektora prędkości względnej v_{CB} o kąt prosty, w kierunku zgodnym z prędkością kątową ω .

Przyspieszenie Coriolisa jest równe 0, kiedy prędkość kątowa $\omega = 0$ (prowadnica jest nieruchoma albo porusza się ruchem postępowym) lub prędkość względna $v_{CB} = 0$ (suwak nie porusza się względem prowadnicy).



Rys. [Miller 1996]

Metody analizy kinematycznej mechanizmów

Metody analizy:

- analityczne,
- numeryczne,
- wykreślne (graficzne),
- doświadczalne.

Występują też ich kombinacje jak połączenie metod analitycznych i graficznych – metody grafoanalityczne.

Z powodu formy zajęć oraz zalet w postaci prostoty wyznaczania i pomocy w zrozumieniu istoty analizy kinematycznej, będziemy stosować metodę grafoanalityczną.

Ile metod inżynier powinien znać?

Metody analityczne

Bazując na zależnościach geometrycznych ruch mechanizmu opisywany jest za pomocą wzorów matematycznych. Stosowane są w tym celu: zapis wektorowy, macierzowy, równania trygonometryczne czy algebraiczne. Uzyskuje się na tej drodze zależności opisujące położenia ogniów. Następnie można otrzymać wzory na prędkość i przyspieszenie różniczkując je względem czasu.

Metody analityczne są trudne i pracochłonne. Otrzymane wyniki są natomiast cenne, ponieważ:

- umożliwiają analizę wpływu geometrii mechanizmu na jego kinematykę,
- mogą być stosowane dla każdego mechanizmu określonego typu,
- uzyskuje się rozwiązanie dla wszystkich możliwych położeń z bardzo dużą dokładnością.

Metody analityczne – metoda wieloboku wektorowego

Jest to jedna z podstawowych metod stosowana do analizy mechanizmów płaskich metodami analitycznymi. Na podstawie schematu kinematycznego tworzony jest wielobok wektorowy. Początki i końce wektorów wyznaczone są przez położenia par kinematycznych. Ponieważ wektory tworzą wielobok, równanie przyjmuje postać:

$$\sum_{i=1}^n \vec{l}_i = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \dots + \vec{l}_n = 0$$

gdzie $\vec{l}_i$ są wektorami należącymi do wieloboku

Ile równań skalarnych może być napisanych dla mechanizmu płaskiego?

Ile niewiadomych można wyznaczyć?

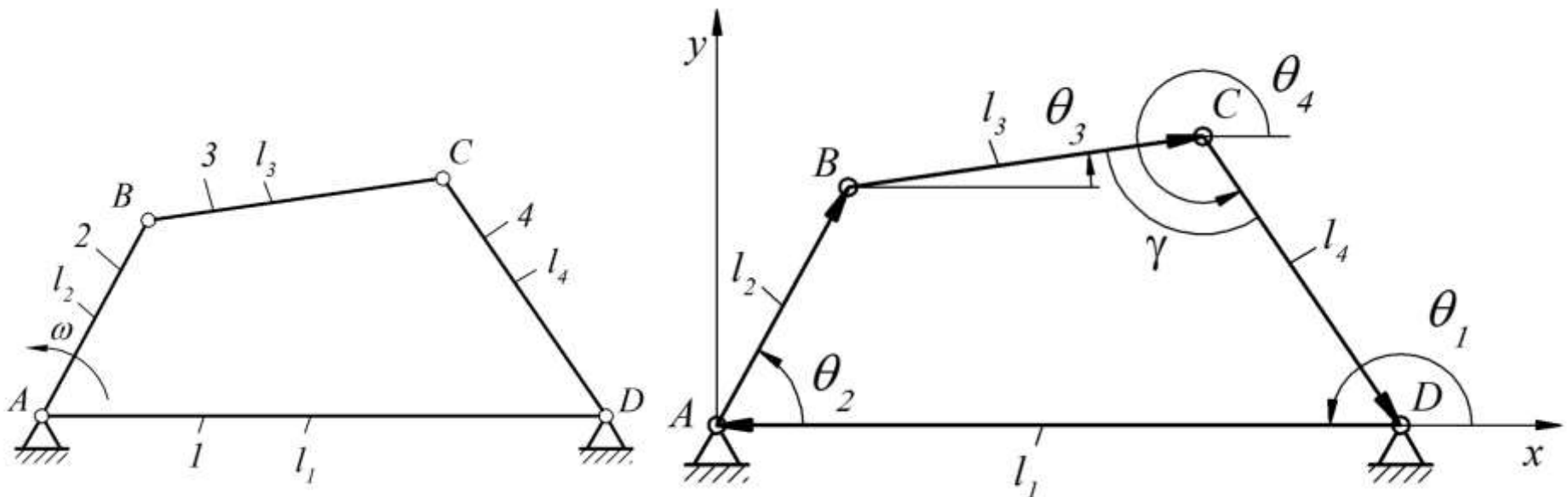
Metody analityczne – metoda wieloboku wektorowego (przykład)

Czworobok przegubowy

Należy wyznaczyć dwa kąty θ_3 i θ_4 oraz prędkości i przyspieszenia kątowe. Długości członów jak i kątów θ_1 i θ_2 są znane.

Kierunek osi x jest zgodny z podstawą l_1 . Kąty są odmierzane od osi x przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (kierunek odmierzania może być i w drugą stronę, ważne, aby stosować się do założenia przez cały proces obliczeń).

Krok 1: Narysuj i oznacz wektory wieloboku



Metody analityczne – metoda wieloboku wektorowego (przykład)

Krok 2: Napisz równanie: $\sum_{i=1}^n \vec{l}_i = 0$

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \vec{l}_4 = 0$$

i równania skalarne: $\sum_{i=1}^n l_i \cos \theta_i = 0$ względem osi x $\sum_{i=1}^n l_i \sin \theta_i = 0$ względem osi y

$$l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 + l_3 \cos \theta_3 + l_4 \cos \theta_4 = 0$$

$$l_2 \sin \theta_2 + l_3 \sin \theta_3 + l_4 \sin \theta_4 = 0$$

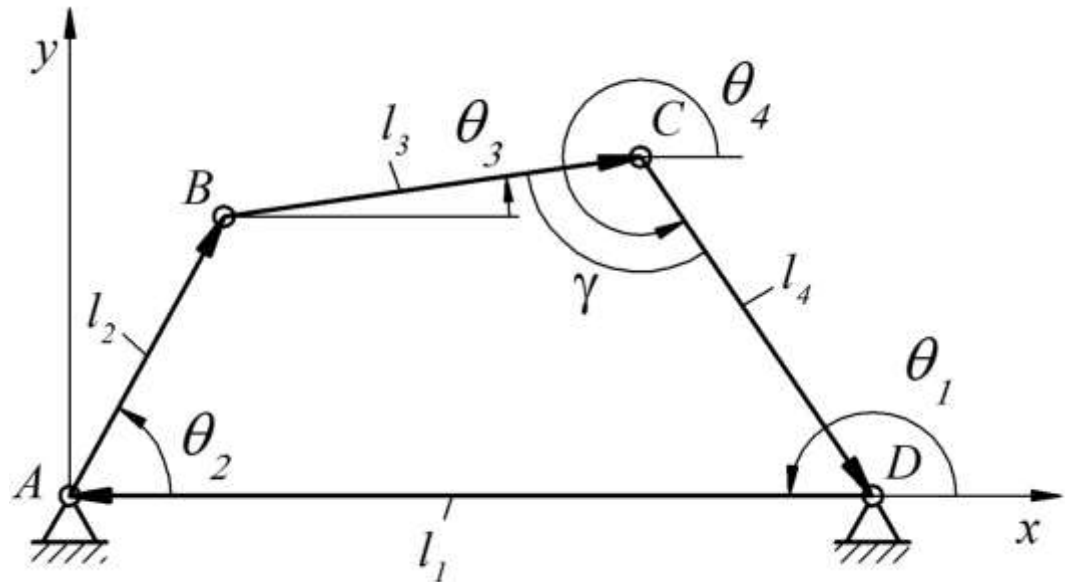
Ostatecznym wynikiem rozwiązania są dwa równania [Myszka 2012]:

$$BD = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2 \cos(\theta_2)}$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{L_3^2 + L_4^2 - BD^2}{2L_3L_4}\right)$$

$$\theta_3 = 2\arctg\left(\frac{-L_2 \sin \theta_2 + L_4 \sin \gamma}{L_1 + L_3 - L_2 \cos \theta_2 - L_4 \cos \gamma}\right)$$

$$\theta_4 = 2\arctg\left(\frac{L_2 \sin \theta_2 - L_3 \sin \gamma}{L_2 \cos \theta_2 + L_4 - L_1 - L_3 \cos \gamma}\right)$$



Metody analityczne – metoda wieloboku wektorowego (przykład)

Aby otrzymać równanie na prędkość kątową należy zróżniczkować równanie położenia a w celu otrzymania przyspieszenia różniczuje się równanie prędkości [Myszka 2012]:

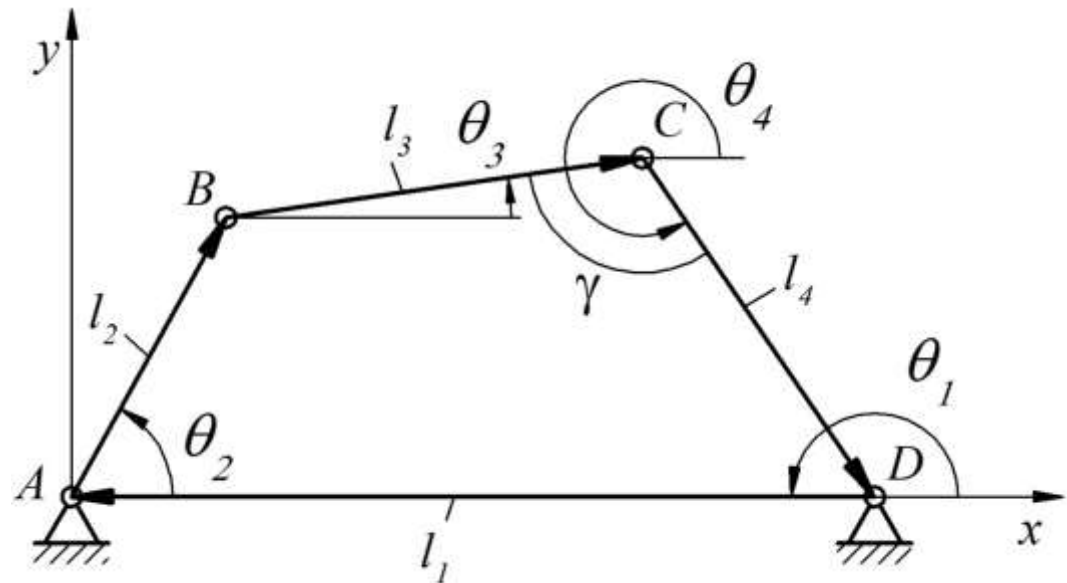
$$\omega_3 = \omega_2 \left[\frac{L_2 \sin(\theta_4 - \theta_2)}{L_3 \sin \gamma} \right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_2 L_2 \sin(\theta_2 - \theta_4) + \omega_2^2 L_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) - \omega_4^2 L_4 + \omega_3^2 L_3 \cos(\theta_4 - \theta_3)}{L_3 \sin(\theta_4 - \theta_3)}$$

$$\omega_4 = \omega_2 \left[\frac{L_2 \sin(\theta_3 - \theta_2)}{L_4 \sin \gamma} \right]$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\varepsilon_2 L_2 \sin(\theta_2 - \theta_3) + \omega_2^2 L_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - \omega_3^2 L_3 \cos(\theta_4 - \theta_3) + \omega_3^2 L_3}{L_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)}$$

Pełne wyprowadzenie wzorów na przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie można znaleźć w [Młynarski 1992].



Metody numeryczne

Metoda numeryczna:

- *„metoda rozwiązywania problemów matematycznych za pomocą operacji na liczbach. Otrzymywane tą drogą wyniki są na ogół przybliżone, jednak dokładność obliczeń może być z góry określona i dobiera się ją zależnie od potrzeb. ...Metody numeryczne wykorzystywane są wówczas, gdy badany problem nie ma w ogóle rozwiązania analitycznego (danego wzorami) lub korzystanie z takich rozwiązań jest uciążliwe ze względu na ich złożoność.”* [Wikipedia, https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_numeryczna],
- *„metodą numeryczną nazywa się każdą metodę obliczeniową sprowadzalną do operacji arytmetycznych dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia. Są to podstawowe operacje matematyczne, znane od wieków przez człowieka a także rozpoznawalne przez każdy procesor komputerowy.”* [Milewski S. Metody numeryczne – konspekt, https://www.l5.pk.edu.pl/images/skrypty/Metody_numeryczne_1].

Metody numeryczne mają dwa główne zastosowania w analizie mechanizmów:

1. Wykonywanie obliczeń w dedykowanych programach tylko na podstawie zdefiniowania mechanizmu i warunków brzegowych.
2. Uzyskanie wyników z zależności algebraicznych dla pełnego zakresu ruchu i różnych parametrów mechanizmu.
3. Historycznie stosowane były metody numeryczne, których często głównym celem było przybliżone wyznaczanie prędkości i przyspieszeń przy znanym przemieszczeniu, takie jak: metoda przyrostów skończonych, metoda aproksymacji.

Metody numeryczne

1. Wykonywanie obliczeń w dedykowanych programach tylko na podstawie zdefiniowania mechanizmu i warunków brzegowych.

Znaczna grupa dedykowanych programów stosuje metodę numeryczną multibody simulation (MBS). Możliwe jest modelowanie mechanizmów płaskich (2D i 3D) oraz przestrzennych, z członami sztywnymi i odkształcalnymi, z uwzględnienia tarcia i kontaktów, tłumienia, sprężystości, sił i momentów zewnętrznych.

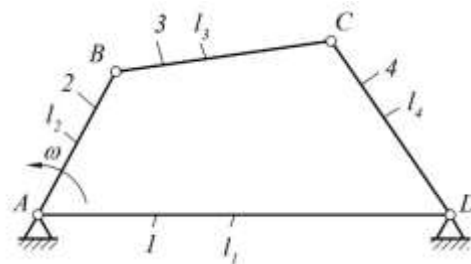
2. Uzyskanie wyników z zależności algebraicznych dla pełnego zakresu ruchu i różnych parametrów mechanizmu.

Stosowane są języki programowania, arkusze kalkulacyjne i programy obliczeniowe z językiem programowania wysokiego poziomu. Możliwe jest uzyskanie wyników bezpośrednio z równań algebraicznych bez podstawiania konkretnych danych, poprzez obliczenia symboliczne (np. Mathematica, Matlab).

Metody numeryczne – przykład NX

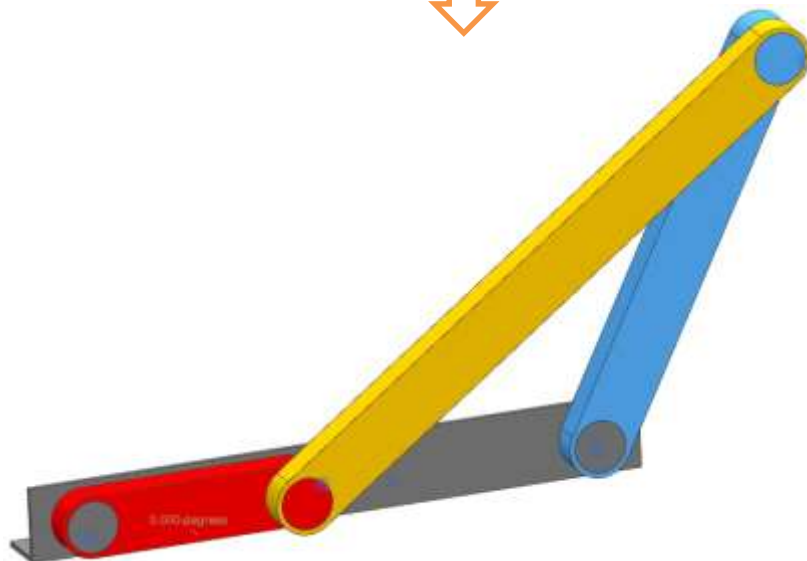
1. Wykonywanie obliczeń w dedykowanych programach tylko na podstawie zdefiniowania mechanizmu i warunków brzegowych.

Wyznaczyć kątowne przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie dla wahacza czworoboku przegubowego:



```
L1 = 0.5; % długość podstawy w[m]
L2 = 0.2; % długość korby w [m]
L3 = 0.6; % długość łącznika w [m]
L4 = 0.4; % długość wahacza w [m]
omega = 2*pi % prędkość kątowa w [rad/s]
epsilon = 0 % przyspieszenie kątowe[rad/s^2]
```

Model CAD



Zdefiniowanie mechanizmu



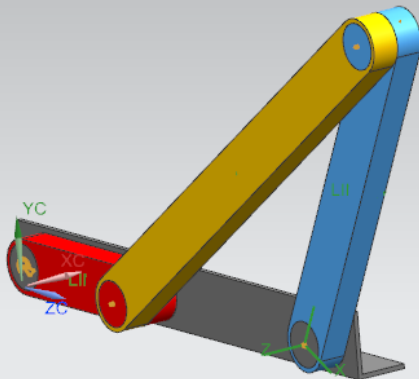
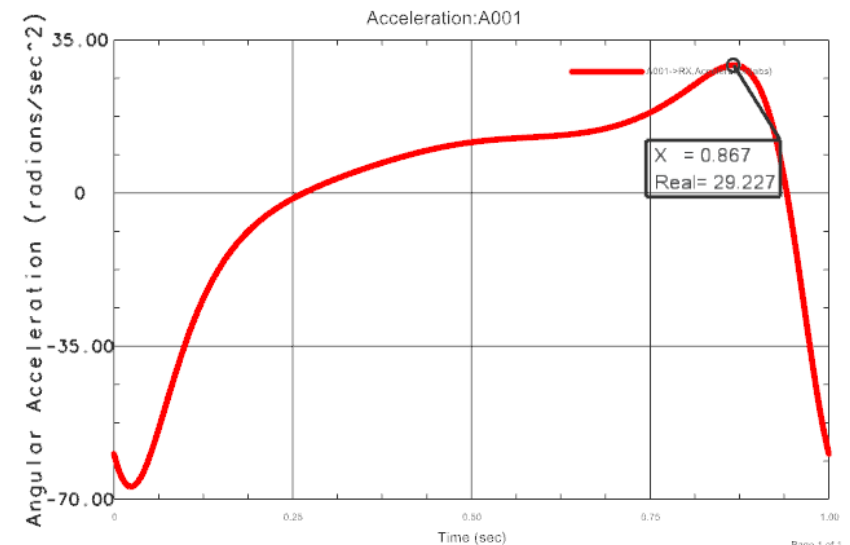
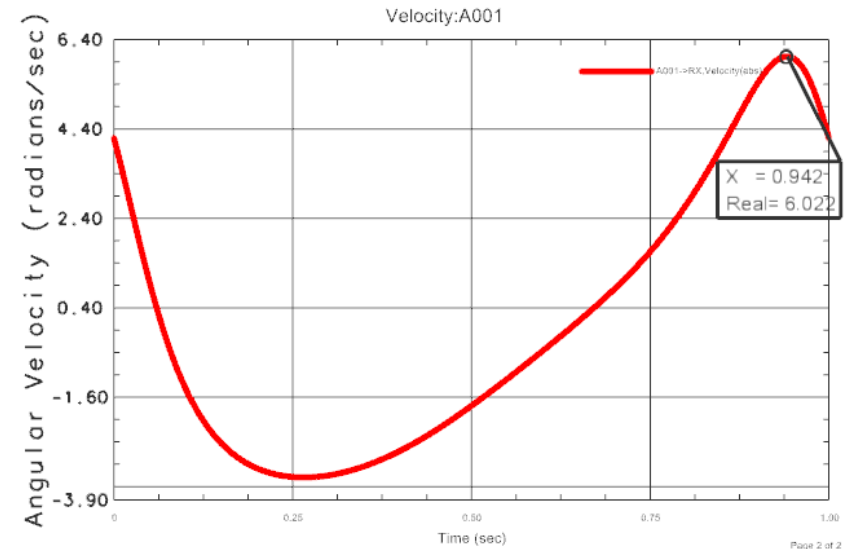
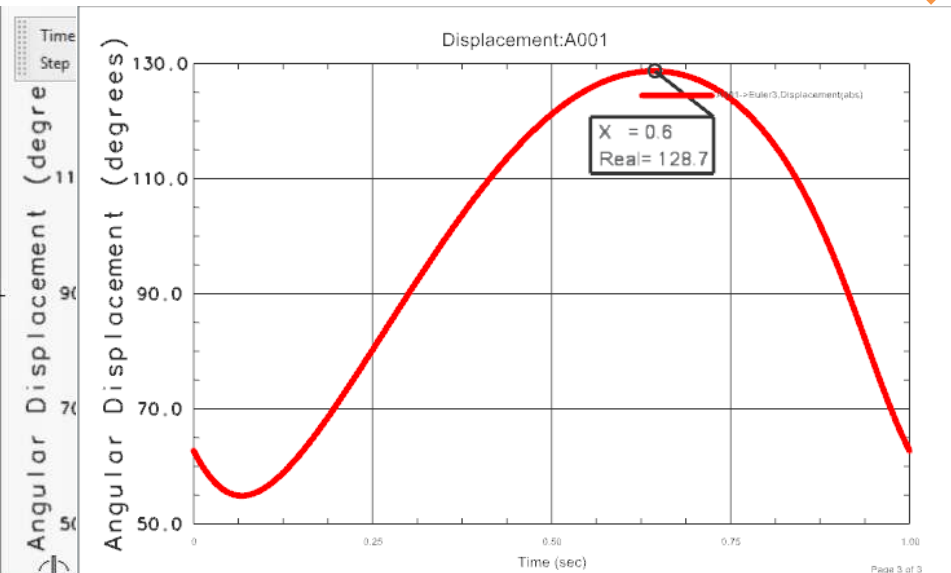
Motion Navigator

Metody numeryczne – przykład NX

1. Wykonywanie obliczeń w dedykowanych programach tylko na podstawie zdefiniowania mechanizmu i warunków brzegowych.



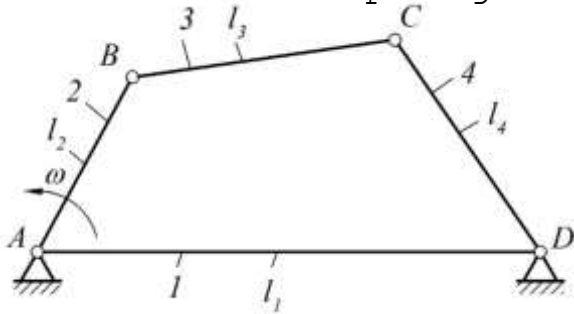
Wyniki dla wahacza



Metody numeryczne – przykład Matlab

2. Uzyskanie wyników z zależności algebraicznych dla pełnego zakresu ruchu i różnych parametrów mechanizmu.

Wyznaczyć katowe przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie dla wahacza czworoboku przegubowego:



[Myszka 2012]:

$$\theta_4 = 2 \arctg \left(\frac{L_2 \sin \theta_2 - L_3 \sin \gamma}{L_2 \cos \theta_2 + L_4 - L_1 - L_3 \cos \gamma} \right)$$

Przedstawienie równań
w języku Matlab



$$\omega_4 = \omega_2 \left[\frac{L_2 \sin(\theta_3 - \theta_2)}{L_4 \sin \gamma} \right]$$

$$\varepsilon_4 = - \frac{\varepsilon_2 L_2 \sin(\theta_2 - \theta_3) + \omega_2^2 L_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - \omega_3^2 L_3 \cos(\theta_4 - \theta_3) + \omega_3^2 L_3}{L_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)}$$

```
%% Calculating position, velocity and acceleration of rocker in
% four bar mechanism
```

```
L1 = 0.5;           % base lenght in [m]
L2 = 0.2;           % crank lenght in [m]
L3 = 0.6;           % coupler lenght in [m]
L4 = 0.4;           % rocker lenght in [m]
theta2 = (0:1:360)'; % angle between a base and crank
```

```
%% Calculating rocker position in four bar mechanism
% distance between revolute joint crank/coupler and revolute
% joint rocker/base
```

```
BD = sqrt(L1^2+L2^2-2*L1*L2*cosd(theta2));
```

```
% angle between coupler and rocker
gamma = acosd((L3^2+L4^2-BD.^2)/(2*L3*L4));
```

```
% rocker position
```

```
numerator_theta4 = L2*sind(theta2)-L3*sind(gamma);
denominator_theta4 = L2*cosd(theta2)+L4-L1-L3*cosd(gamma);
theta4 = 2*atand(numerator_theta4./denominator_theta4);
figure(1)
plot(theta4)
title('rocker position in degrees')
```

```
%% Calculating rocker velocity in four bar mechanism
```

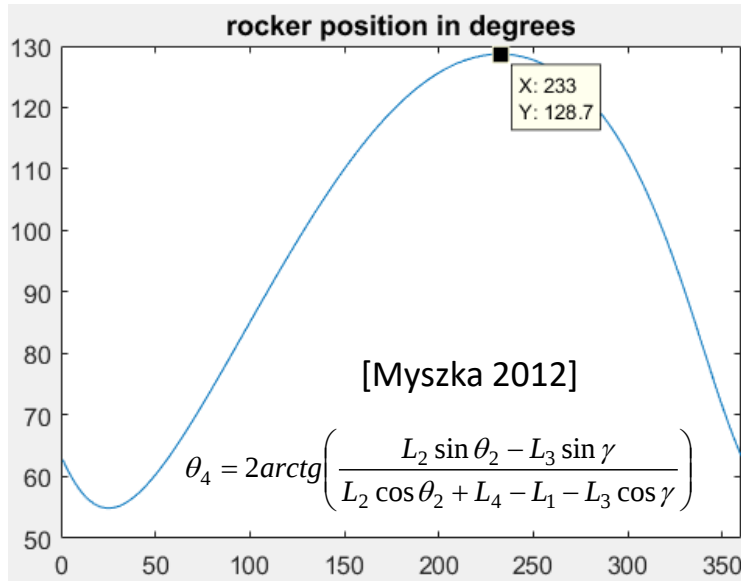
```
omega2 = 2*pi; % initial velocity of crank [rad/s]
```

```
% coupler position
```

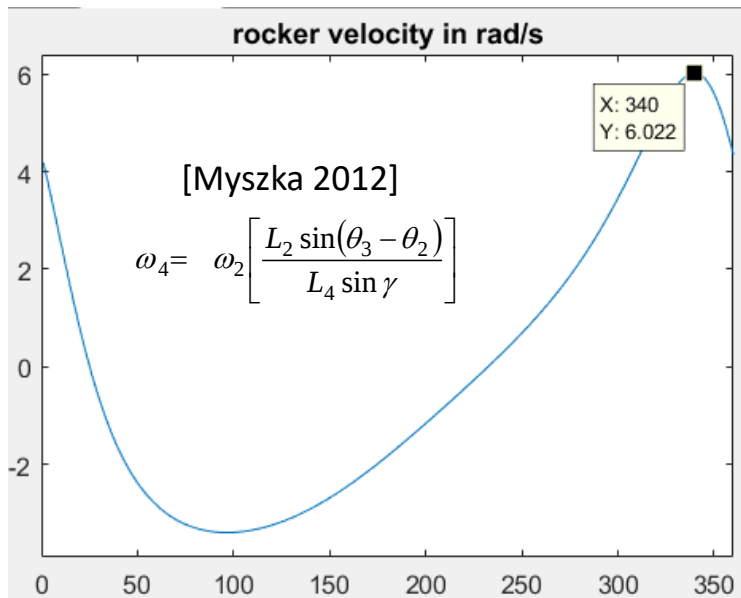
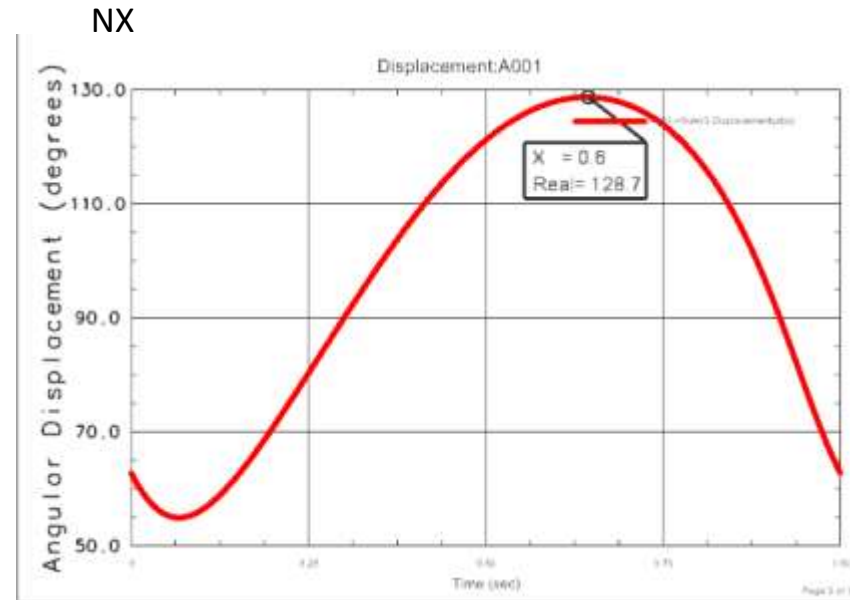
```
numerator_theta3 = -L2*sind(theta2)+L4*sind(gamma);
denominator_theta3 = L1+L3-L2*cosd(theta2)-L4*cosd(gamma);
theta3 = 2*atand(numerator_theta3./denominator_theta3);
```

Metody numeryczne – przykład Matlab

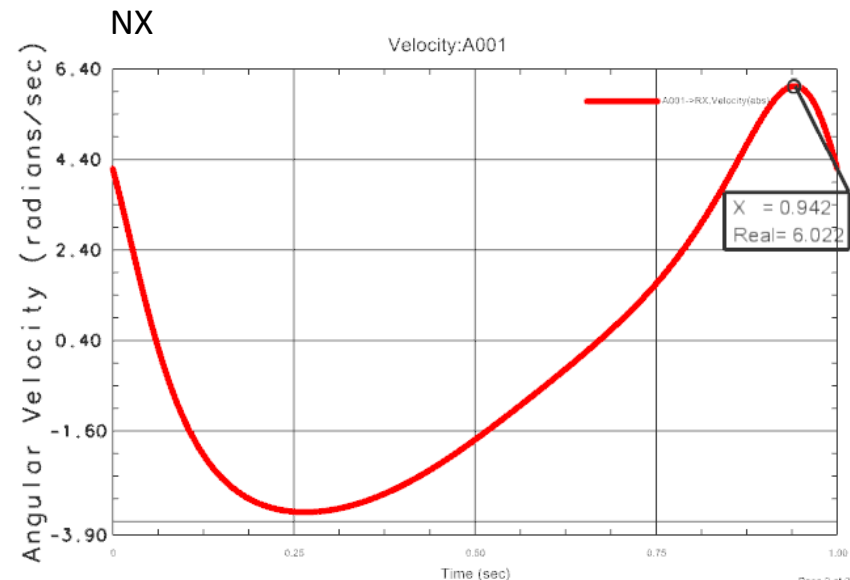
2. Uzyskanie wyników z zależności algebraicznych dla pełnego zakresu ruchu i różnych parametrów mechanizmu.



=



=

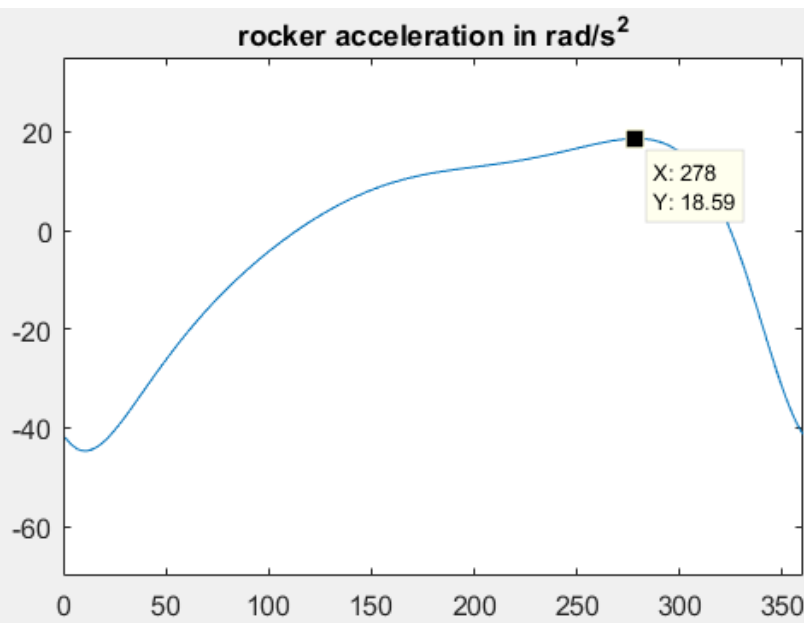


Metody numeryczne – przykład Matlab

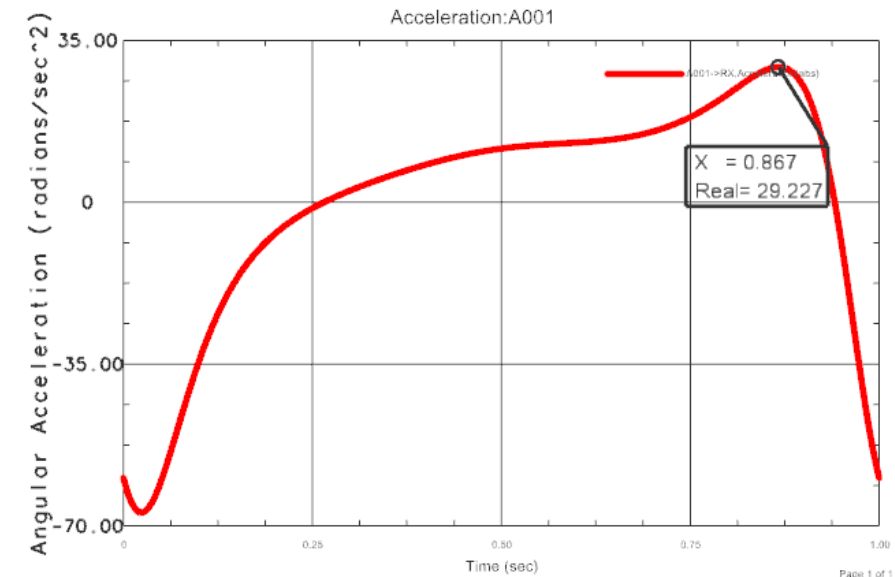
2. Uzyskanie wyników z zależności algebraicznych dla pełnego zakresu ruchu i różnych parametrów mechanizmu.

[Myszka 2012]

$$\varepsilon_4 = -\frac{\varepsilon_2 L_2 \sin(\theta_2 - \theta_3) + \omega_2^2 L_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) - \omega_3^2 L_3 \cos(\theta_4 - \theta_3) + \omega_3^2 L_3}{L_4 \sin(\theta_4 - \theta_3)}$$



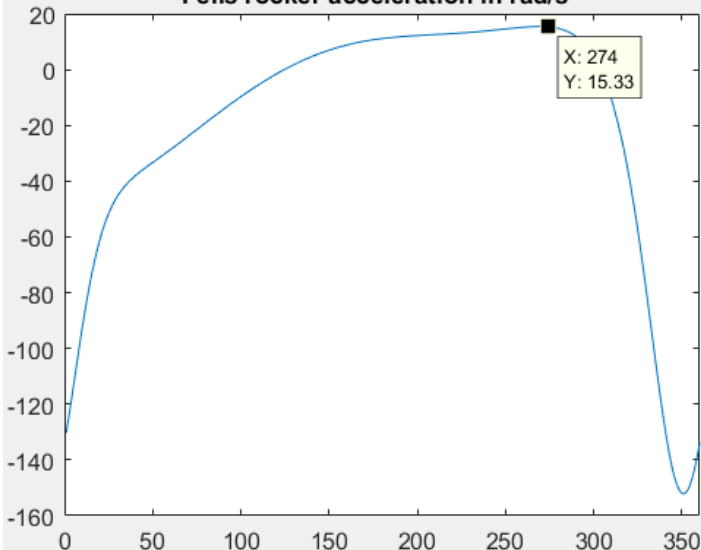
NX



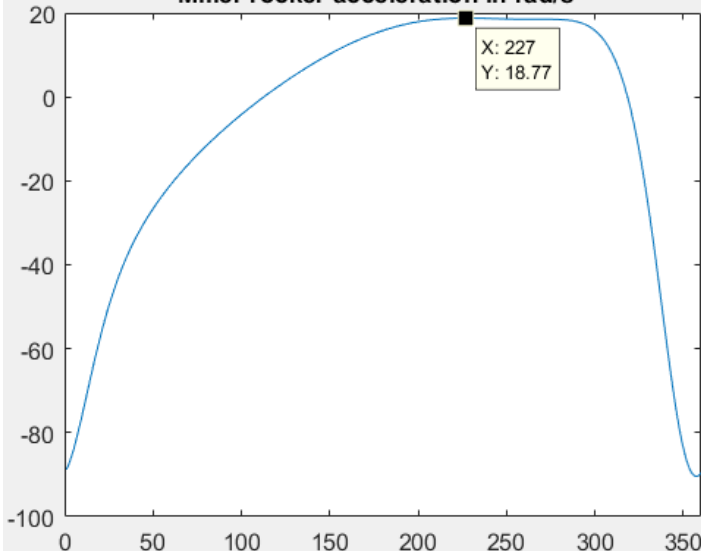
Metody numeryczne – przykład Matlab

2. Uzyskanie wyników z zależności algebraicznych dla pełnego zakresu ruchu i różnych parametrów mechanizmu.

Felis rocker acceleration in rad/s²



Miller rocker acceleration in rad/s²



[Felis 2008]

$$\varepsilon_3 = - \frac{\omega_1^2 l_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_1 l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \omega_2^2 l_2 + \omega_3^2 l_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}$$

Aby oznaczenia były zgodne z rysunkiem

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2; \varepsilon_2 = \varepsilon_3; \varepsilon_3 = \varepsilon_4; \omega_1 = \omega_2$ itd.

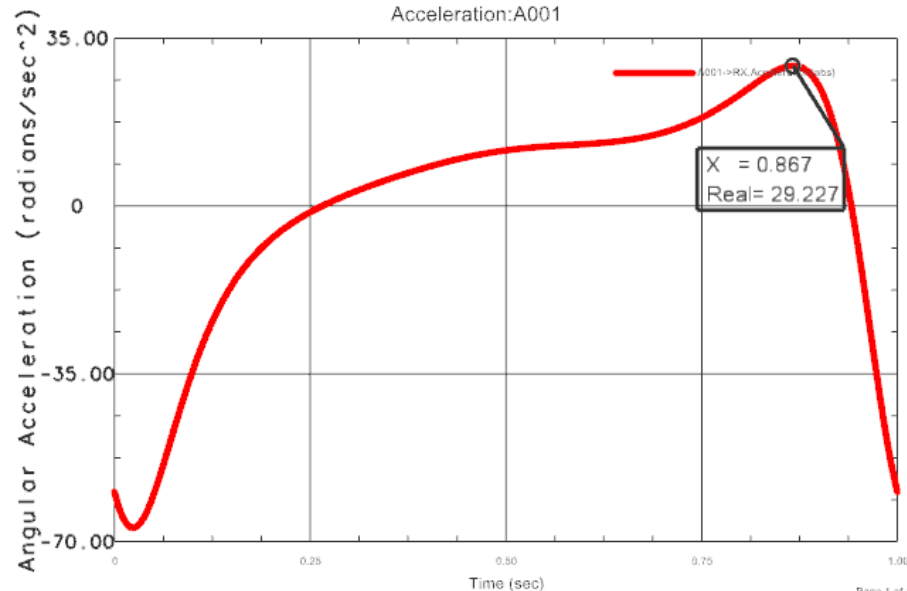
$\varphi_1 = \theta_2$ itd.

$\neq$

$\neq$

NX

Acceleration: A001



Page 1 of 1

[Miller 1996]

$$\varepsilon_4 = \frac{\omega_2^2 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \omega_3^2 l_3 \cos(\varphi_4 - \varphi_3)}{l_4 \sin(\varphi_4 - \varphi_3)},$$

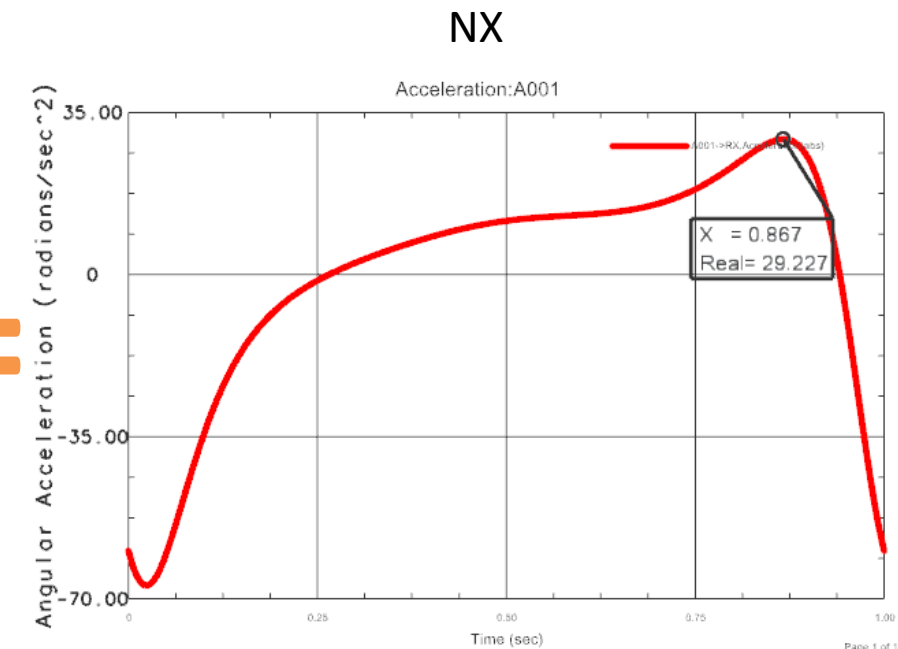
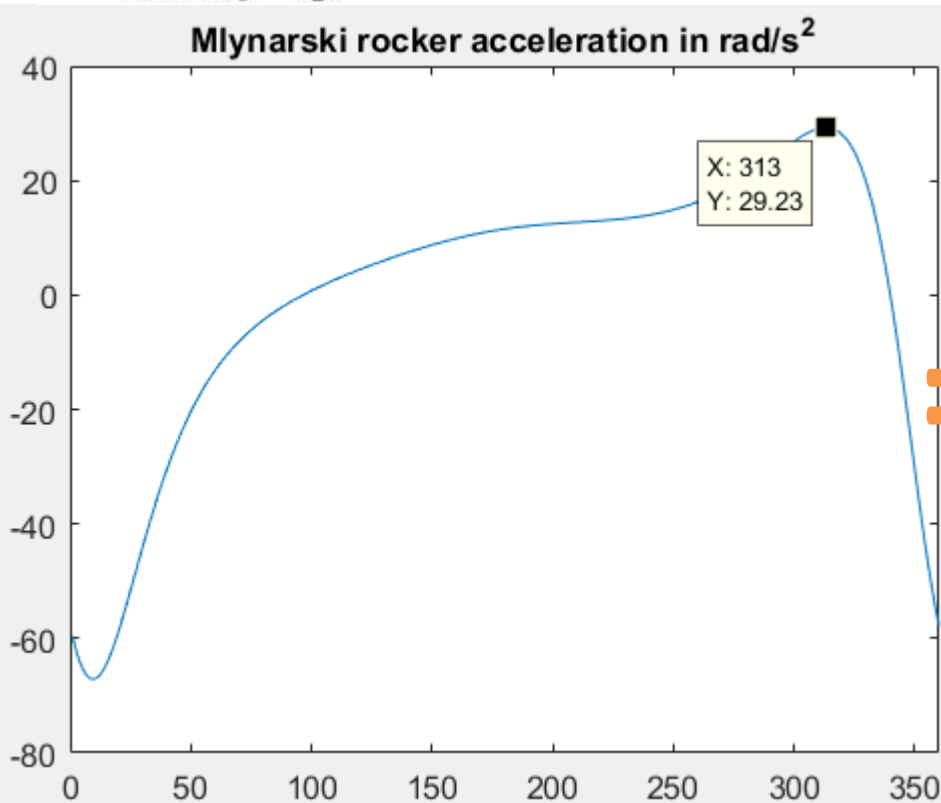
Metody numeryczne – przykład Matlab

2. Uzyskanie wyników z zależności algebraicznych dla pełnego zakresu ruchu i różnych parametrów mechanizmu.

$$\varepsilon_2 = \omega_1^2 \left\{ \frac{l_1 l_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) [l_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) - l_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_3)]}{l_2 \cdot l_3^2 \sin^3(\alpha_3 - \alpha_2)} + \right. \\ \left. - \frac{l_1^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cos(\alpha_3 - \alpha_2) [l_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - l_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_3)]}{l_2 l_3^2 \sin^3(\alpha_3 - \alpha_2)} \right\} + \\ + \frac{l_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{l_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_2)} \cdot \varepsilon_1$$

[Młynarski 1992]

Aby oznaczenia były zgodne z rysunkiem
 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2; \varepsilon_2 = \varepsilon_4; \varphi_1 = \theta_2; \varphi_2 = \theta_3; \varphi_3 = \theta_4$



Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

Omówiony zostanie jeden sposób wyznaczania prędkości i przyspieszeń metodą grafoanalityczną. W celu wyznaczenia parametrów kinematycznych należy narysować schemat kinematyczny oraz plany prędkości i przyspieszeń. Wymaga to przyjęcia odpowiednich podziałek rysunkowych.

Podziałka rysunkowa definiowana jest jako stosunek wartości wielkości fizycznej do wartości wielkości rysunkowej:

$$\kappa_l = \frac{l}{(l)} \left[\frac{m}{mm} \right] \text{ podziałka długości,}$$

$$\kappa_v = \frac{v}{(v)} \left[\frac{m/s}{mm} \right] \text{ podziałka prędkości liniowej,}$$

$$\kappa_a = \frac{a}{(a)} \left[\frac{m/s^2}{mm} \right] \text{ podziałka przyspieszenia liniowego.}$$

Przykład

1. Dana jest prędkość $v = 500 \text{ m/s}$, podziałka $\kappa_v = 10 \left[\frac{m/s}{mm} \right]$. Wyznaczyć długość wektora prędkości na rysunku.

$$(v) = \frac{v}{\kappa_v} \left[\frac{m}{s} / \frac{m/s}{mm} \right] = \frac{500 \text{ m/s}}{10 \frac{m/s}{mm}} = 50 \text{ mm}$$

2. Dana jest długość wektora prędkości $v_l = 50 \text{ mm}$, podziałka $\kappa_v = 10 \left[\frac{m/s}{mm} \right]$. Wyznaczyć wartość prędkości.

$$v = (v) \kappa_v \left[mm \frac{m/s}{mm} \right] = 50 \text{ mm} \cdot 10 \frac{\frac{m}{s}}{mm} = 500 \text{ m/s}$$

Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

Omówione zostaną plany prędkości i przyspieszeń dla:

1. Plan prędkości i przyspieszeń dla pojedynczego członu trójwęzłowego.
2. Plan prędkości dla grupy strukturalnej klasy 2.
 - 2.1. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 2 z parą obrotową.
 - 2.2. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 2 z parą przesuwną.
3. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 3, czteroczłonowej z parami obrotowymi.
4. Przykład wyznaczania prędkości i przyspieszeń dla czworoboku przegubowego.

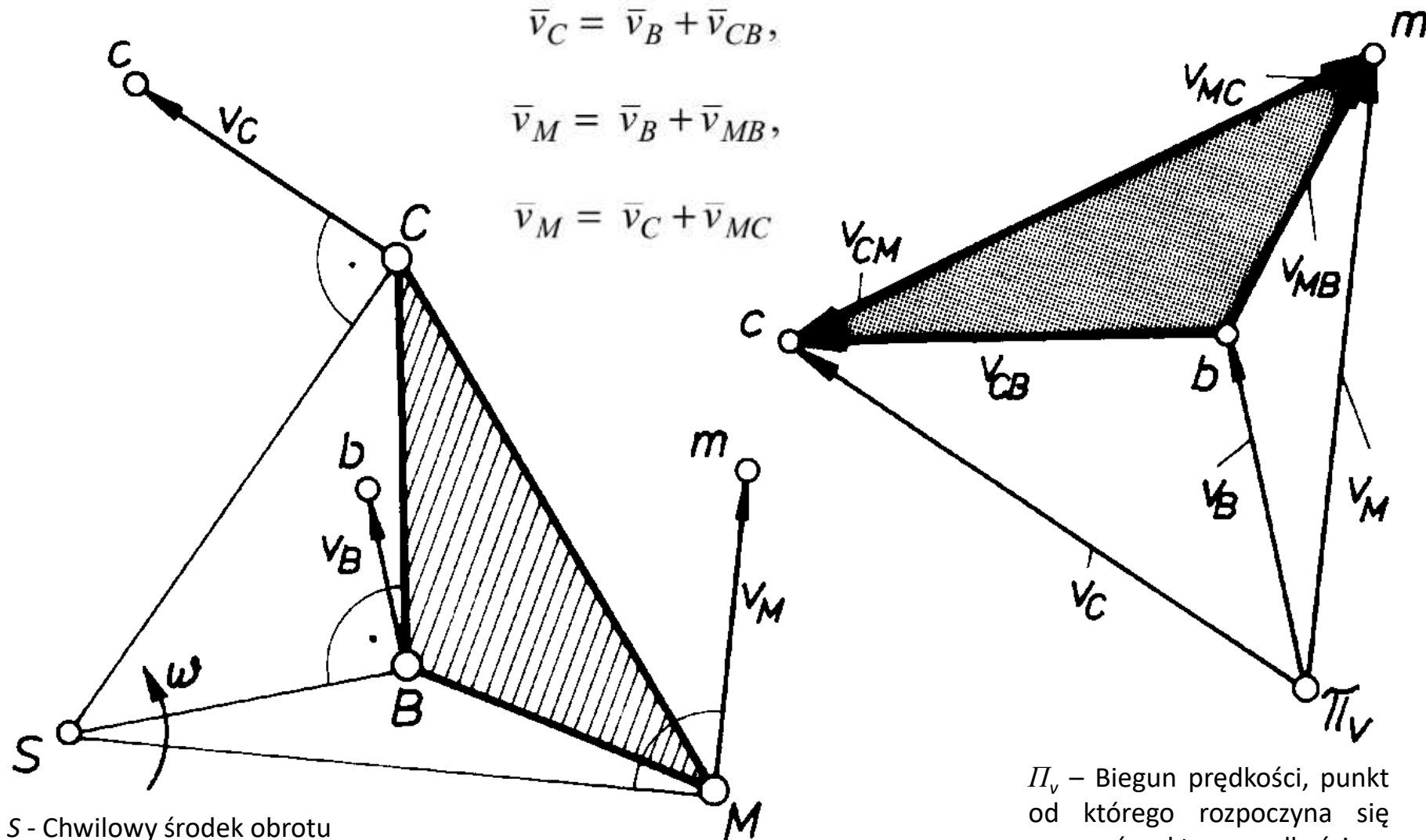
Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

1. Plan prędkości i przyspieszeń dla pojedynczego członu trójwęzłowego

$$\bar{v}_C = \bar{v}_B + \bar{v}_{CB},$$

$$\bar{v}_M = \bar{v}_B + \bar{v}_{MB},$$

$$\bar{v}_M = \bar{v}_C + \bar{v}_{MC}$$



S - Chwilowy środek obrotu

Rys. [Miller 1996]

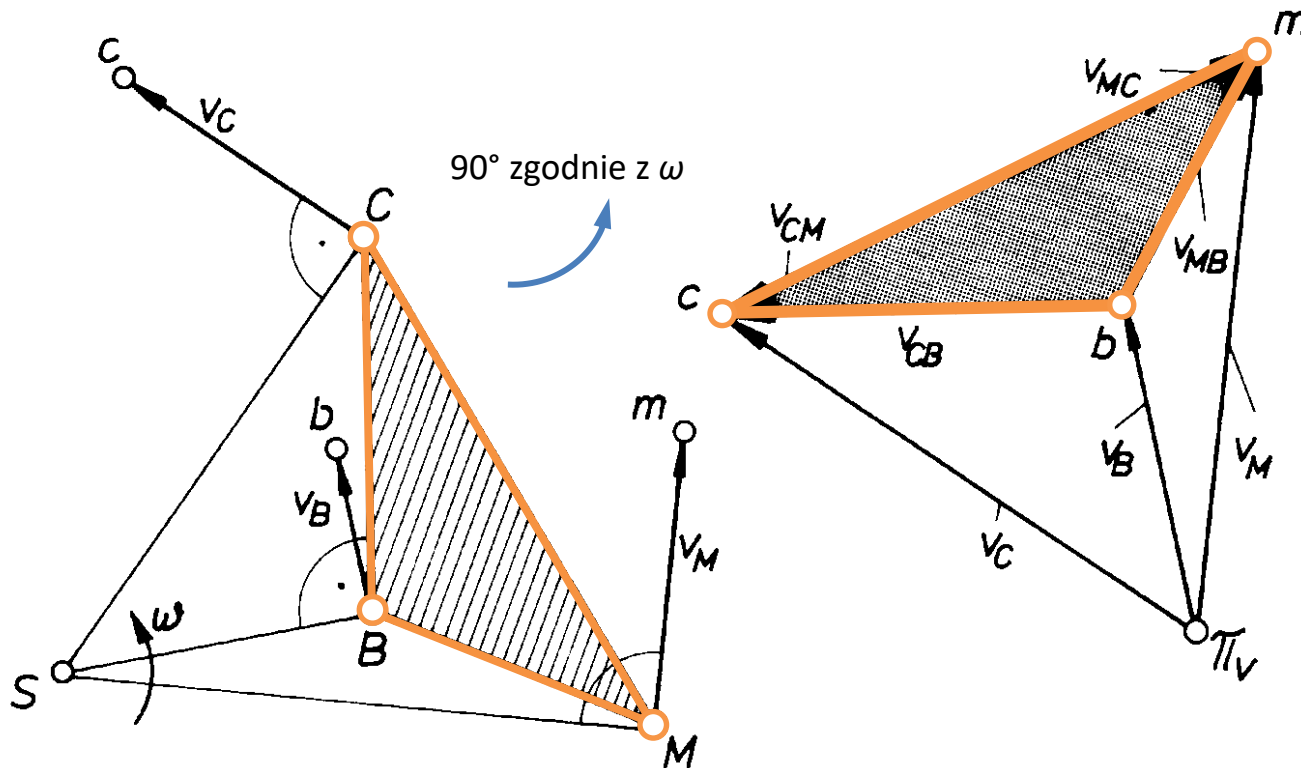
Π_v – Biegun prędkości, punkt od którego rozpoczyna się rysować wektory prędkości

Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

1. Plan prędkości i przyspieszeń dla pojedynczego członu trójwęzłowego

$\Delta BCM \sim \Delta bcm$

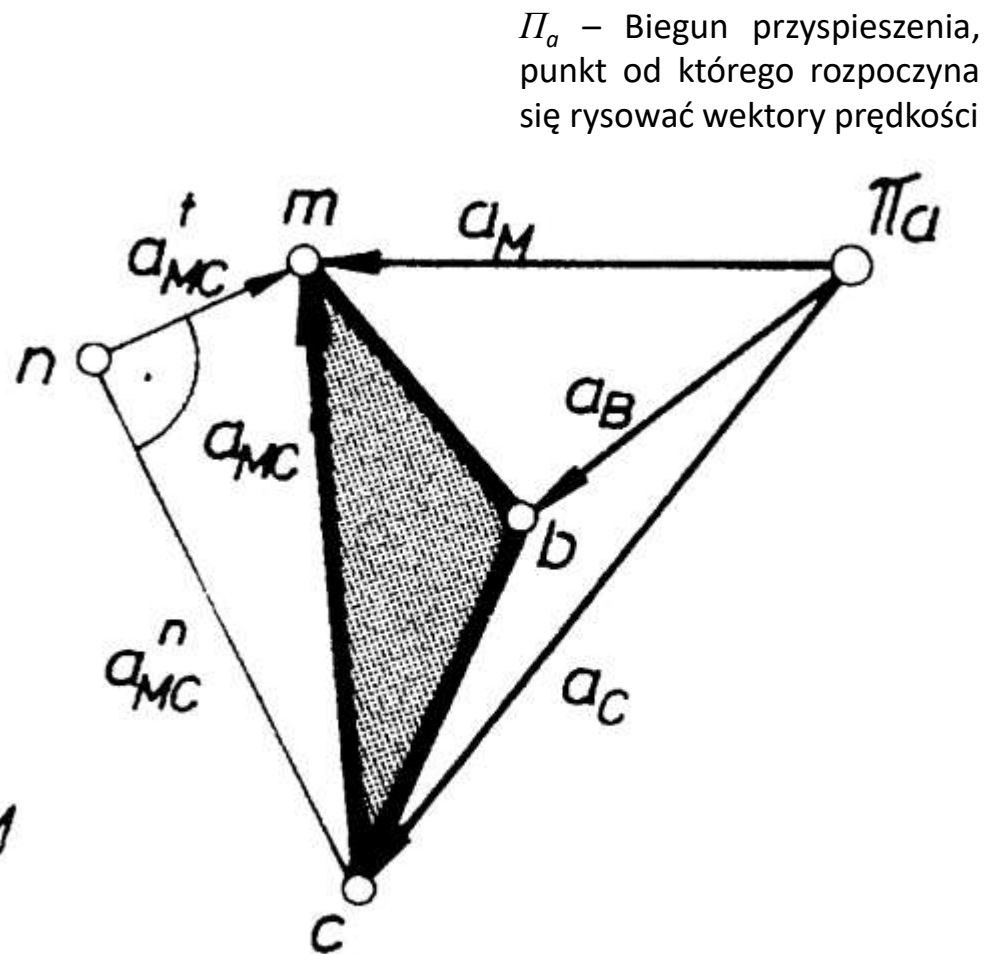
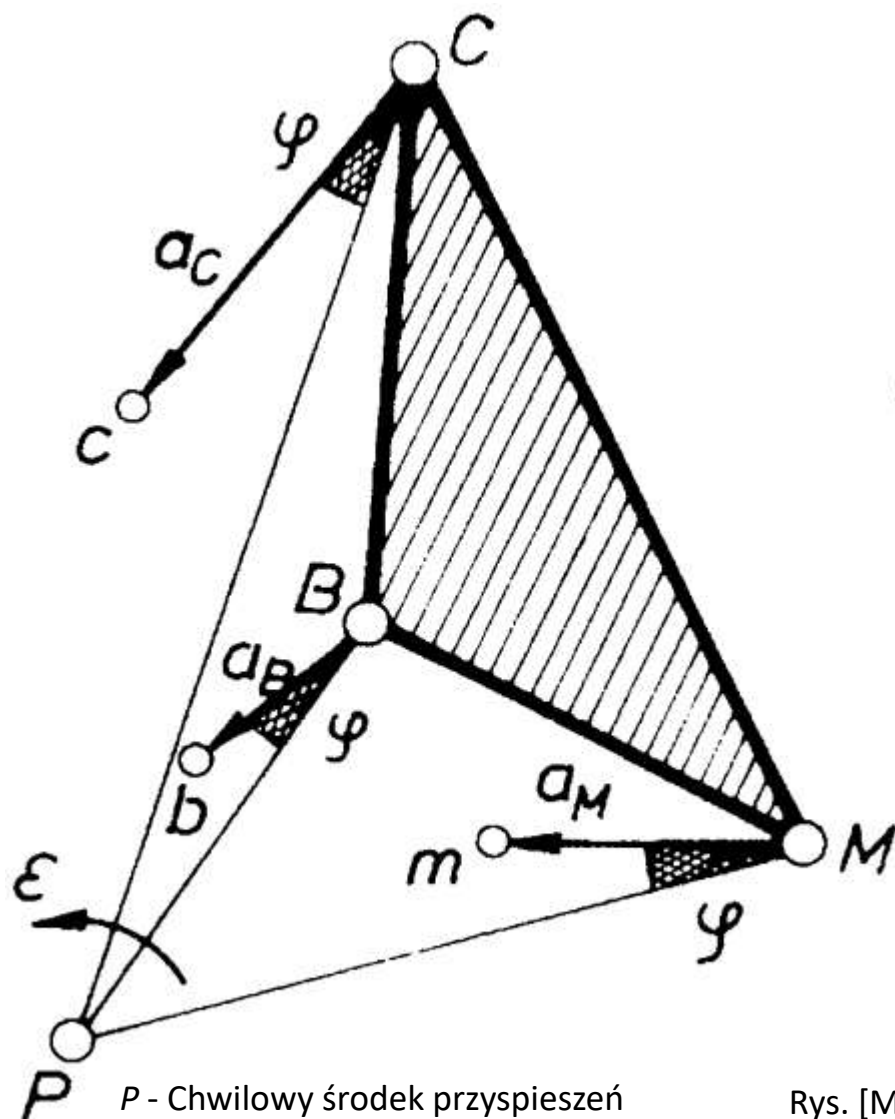
Trójkąt Δbcm jest podobny do trójkąta ΔBCM i obrócony o kąt 90° zgodnie z prędkością kątową ω (na rys. jest to kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara). Właściwość ta może być zastosowana do sprawdzenia poprawności planu prędkości albo do wyznaczenia trzeciej prędkości.



Rys. [Miller 1996]

Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

1. Plan prędkości i przyspieszeń dla pojedynczego członu trójwęzłowego



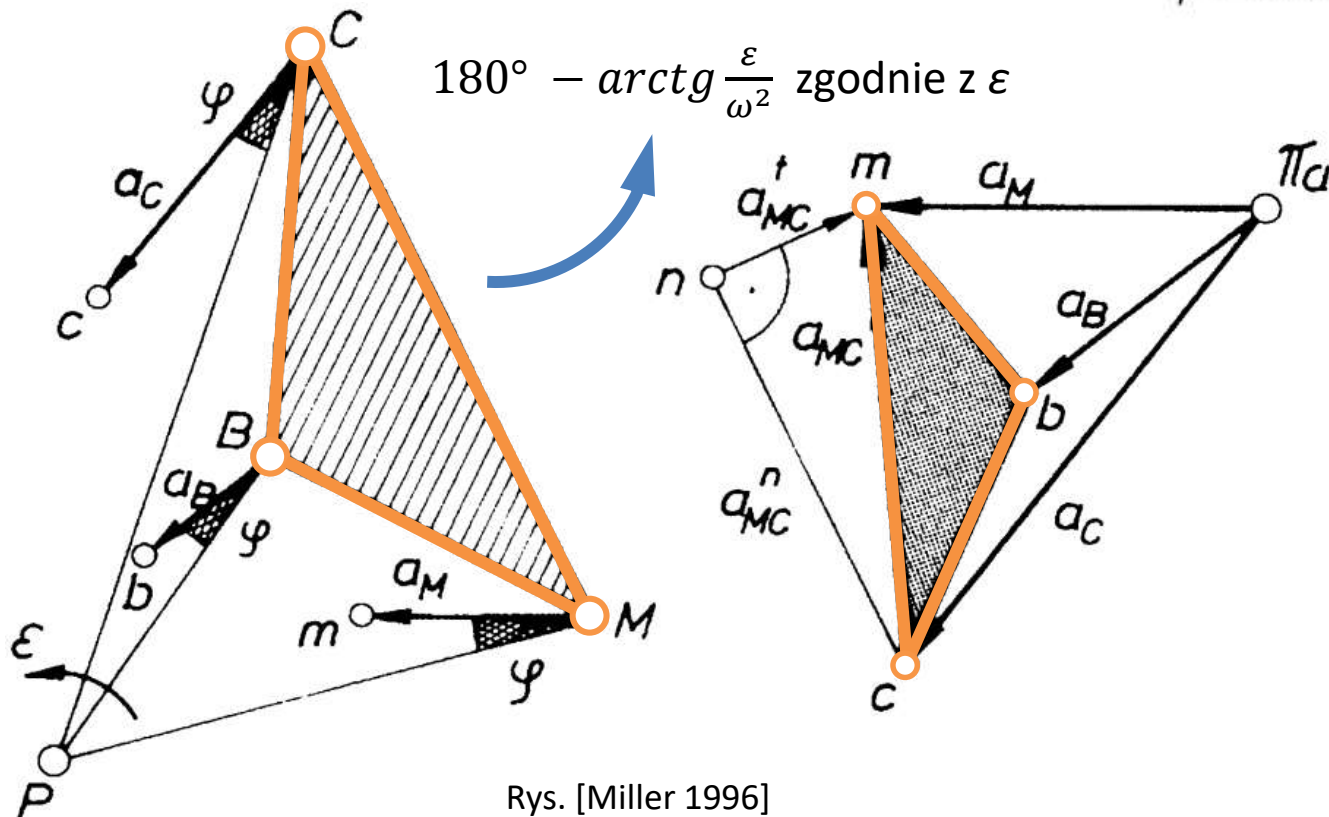
Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

1. Plan prędkości i przyspieszeń dla pojedynczego członu trójwęzłowego

$\Delta BCM \sim \Delta bcm$

Trójkąt Δbcm jest podobny do trójkąta ΔBCM i obrócony o kąt $180^\circ - \alpha$ zgodnie z przyspieszeniem kątowym ε (na rys. jest to kierunek przeciwny do ruchu wskazówek zegara). Właściwość ta może być zastosowana do sprawdzenia poprawności planu przyspieszeń albo do wyznaczenia trzeciego przyspieszenia.

$$\varphi = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$



Rys. [Miller 1996]

Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

2.1. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 2 z parą obrotową

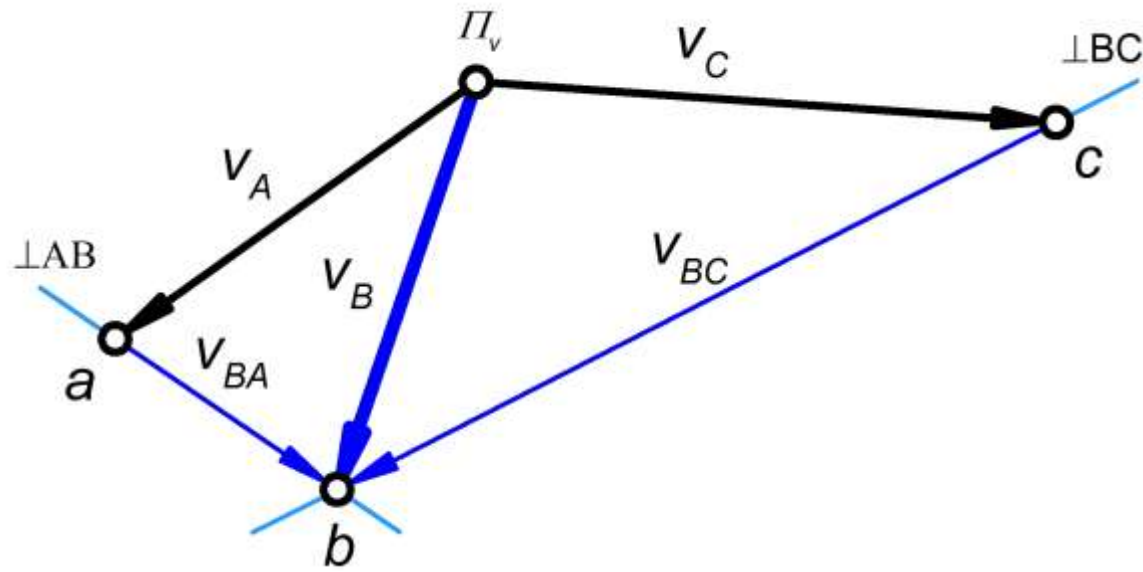
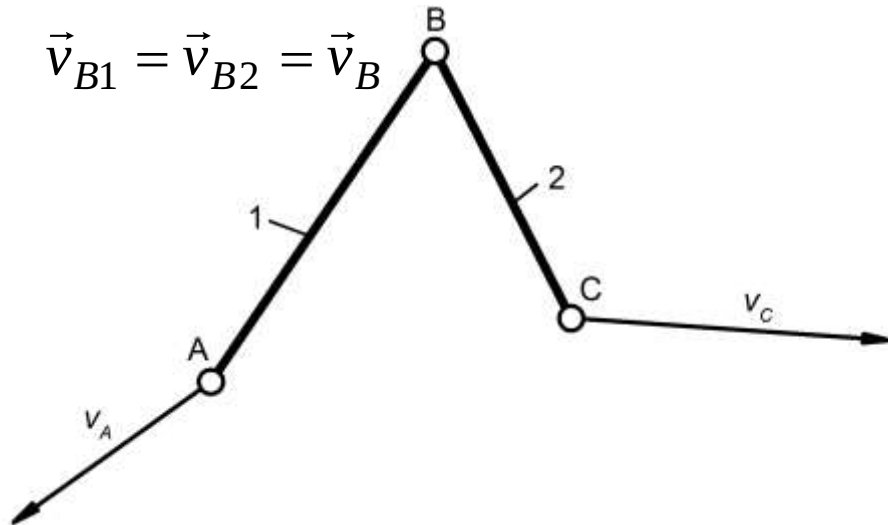
Znane są prędkości i przyspieszenia punktów A i C . Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktu B metodą planów.

W celu wyznaczenia prędkości punktu B wykreślnie rozwiązywany jest układ równań wektorowych:

$$\vec{v}_{B1} = \vec{v}_{B2} = \vec{v}_B$$

$$\begin{cases} \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} \\ \vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_{BC} \end{cases}$$

Jedno podkreślenie oznacza, że znany jest kierunek, dwa podkreślenia: wartości i kierunek



Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

2.1. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 2 z parą obrotową

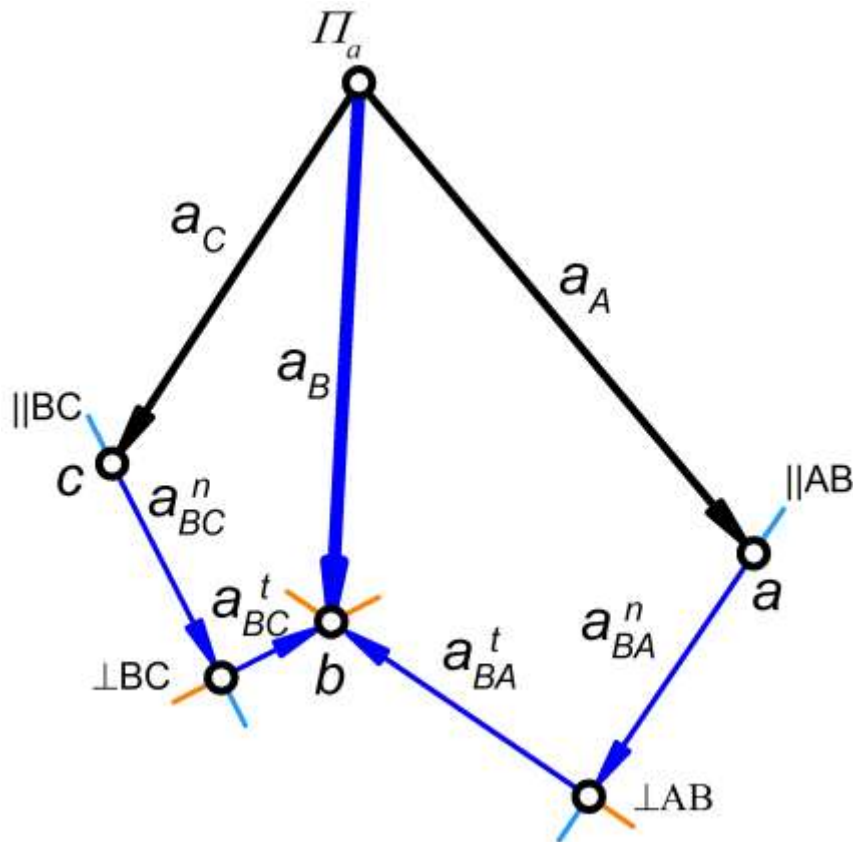
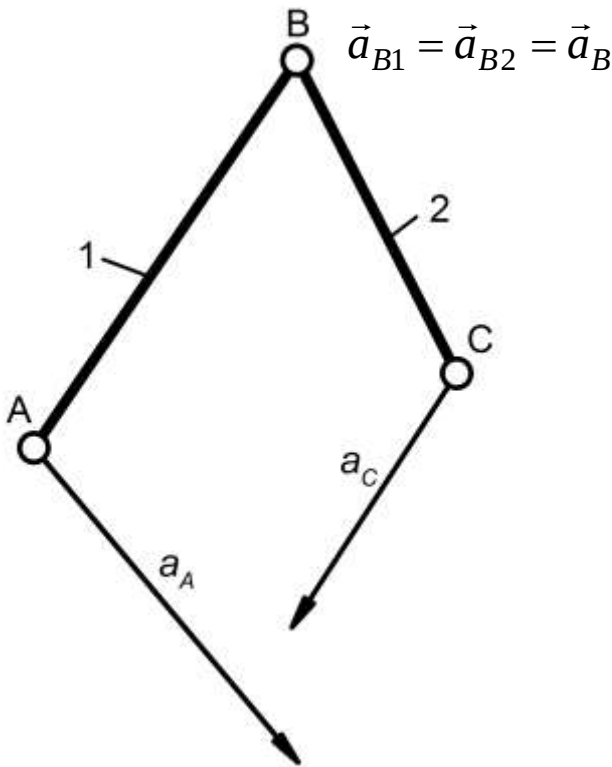
W celu wyznaczenia przyspieszenia punktu B wykreślnie i analitycznie rozwiązywany jest układ równań wektorowych:

$$\begin{cases} \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \frac{\vec{a}_{BA}^n}{\|AB\|} + \frac{\vec{a}_{BA}^t}{\perp AB} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{BC} = \vec{a}_C + \frac{\vec{a}_{BC}^n}{\|BC\|} + \frac{\vec{a}_{BC}^t}{\perp BC} \end{cases}$$

Analitycznie wyznaczane są wartości przyspieszenia względnego normalnego:

$$a_{BA}^n = \frac{v_{BA}^2}{|AB|}$$

$$a_{BC}^n = \frac{v_{BC}^2}{|BC|}$$

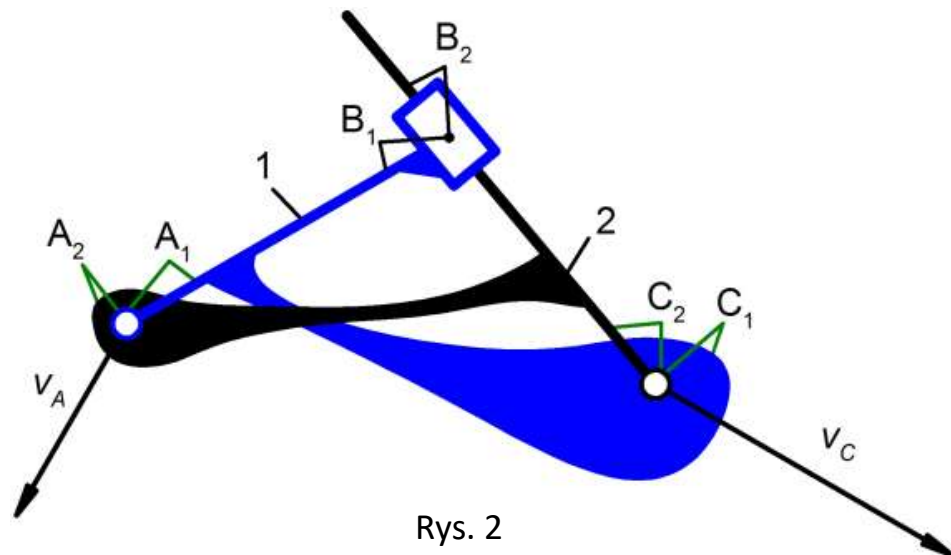
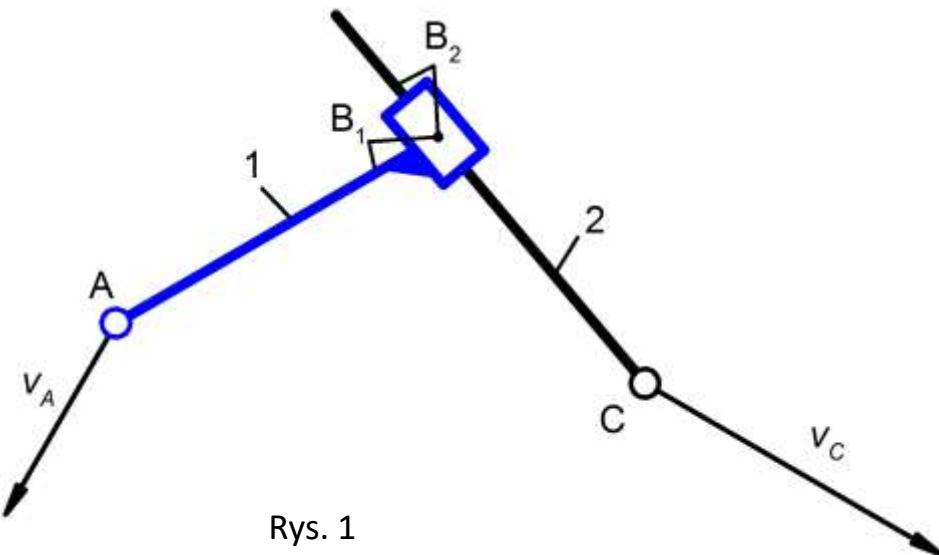


Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

2.2. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 2 z parą przesuwną

Znane są prędkości i przyspieszenia punktów A i C . Wyznaczyć prędkości i przyspieszenia punktów B_1 i B_2 metodą planów (rys. 1).

W tym przypadku występuje zbyt mało danych do bezpośredniego wyznaczenia prędkości punktów B_1 i B_2 . Wymagana jest znajomość prędkości dwóch punktów dla jednego członu. W tym celu wyznaczane są dwa dodatkowe punkty: C_1 należący do członu 1 oraz A_2 należący do członu 2 (można sobie to wyobrazić jako przyspawanie blach do członów, na których znajdują się wprowadzone punkty – rys. 2). Pozycja tych punktów pokrywa się w rozpatrywanym położeniu z punktami A_1 i C_2 . Przyjęcie takiej pozycji punktów upraszcza wyznaczanie kierunków prędkości względnych i rysowanie planów prędkości.



Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

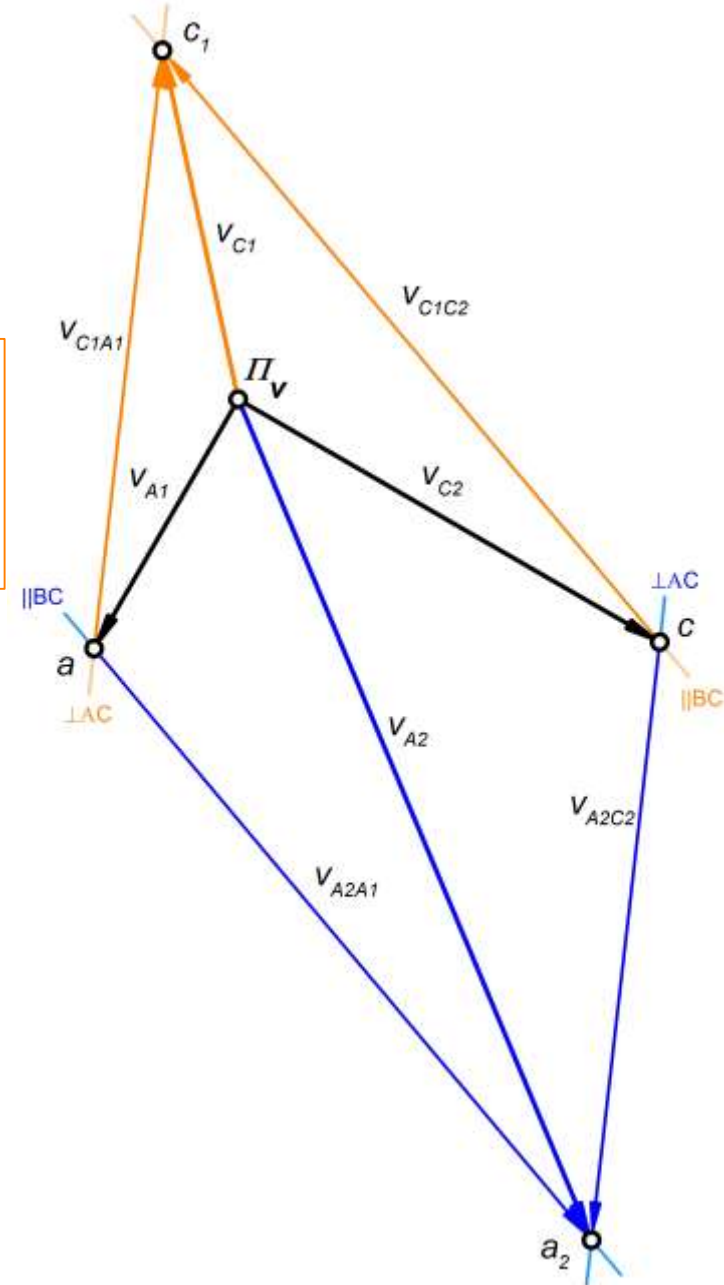
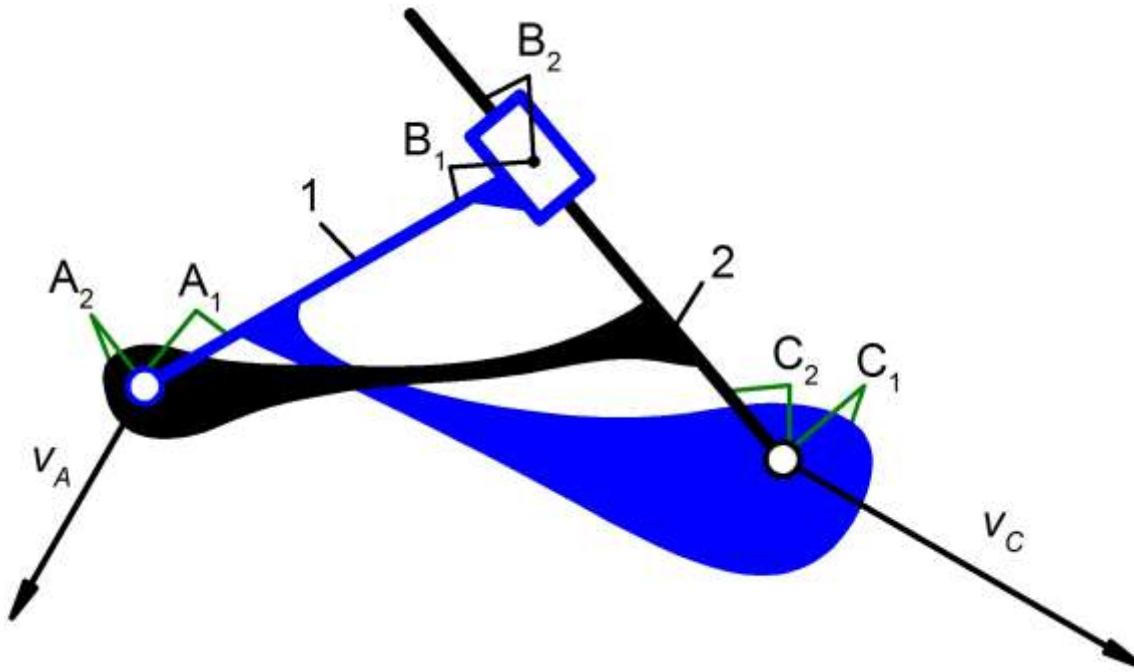
2.2. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 2 z parą przesuwną

Należy wyznaczyć teraz prędkości przyjętych punktów, dla których można napisać układy równań wektorowych, dla punktu A_2 :

$$\begin{cases} \vec{v}_{A2} = \underline{\underline{\vec{v}_{C2}}} + \underline{\underline{\vec{v}_{A2C2}}} \\ \vec{v}_{A2} = \underline{\underline{\vec{v}_{A1}}} + \underline{\underline{\vec{v}_{A2A1}}} \end{cases}$$

i dla punktu C_1 :

$$\begin{cases} \vec{v}_{C1} = \underline{\underline{\vec{v}_{A1}}} + \underline{\underline{\vec{v}_{C1A1}}} \\ \vec{v}_{C1} = \underline{\underline{\vec{v}_{C2}}} + \underline{\underline{\vec{v}_{C1C2}}} \end{cases}$$



Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

2.2. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 2 z parą przesuwną

Znając prędkości dwóch różnych punktów dla każdego z członów, wyznaczenie prędkości punktów B_1 i B_2 może mieć następujący przebieg:

- I. Traktując ruch płaski członów jako złożony można napisać układy równań wektorowych i rozwiązać je graficznie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{B1} = \underline{\underline{\vec{v}_{A1}}} + \frac{\vec{v}_{B1A1}}{\perp AB} \\ \vec{v}_{B1} = \underline{\underline{\vec{v}_{C1}}} + \frac{\vec{v}_{B1C1}}{\perp BC} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_{B2} = \underline{\underline{\vec{v}_{A2}}} + \frac{\vec{v}_{B2A2}}{\perp AB} \\ \vec{v}_{B2} = \underline{\underline{\vec{v}_{C2}}} + \frac{\vec{v}_{B2C1}}{\perp BC} \end{array} \right.$$

- II. Wyznaczyć środki obrotu i kierunki szukanych prędkości, a następnie:

- a) Obliczyć prędkość kątową (np. $\omega = v_{A1}/|O_1A|$) oraz szukane prędkości $v_{B1} = \omega \cdot |O_1B|$ i $v_{B2} = \omega \cdot |O_2B|$. Prędkość kątowa ω jest taka sama dla obu członów i wynika to z konstrukcji grupy strukturalnej (sztywne połączenie w członie 1 części prostoliniowej z suwakiem).
- b) Korzystając z metody rzutów prędkości wyznaczyć graficznie albo obliczyć prędkości punktów z zależności:

$$v_{B1} = \frac{v_{A1} \cos(\beta_{A1})}{\cos(\alpha_{B1})}; \quad v_{B2} = \frac{v_{C2} \cos(\beta_{C2})}{\cos(\alpha_{B2})}$$

- III. Wyznaczyć wektory prędkości metodą graficzną z podobieństwa figur (w tym przypadku trójkątów).

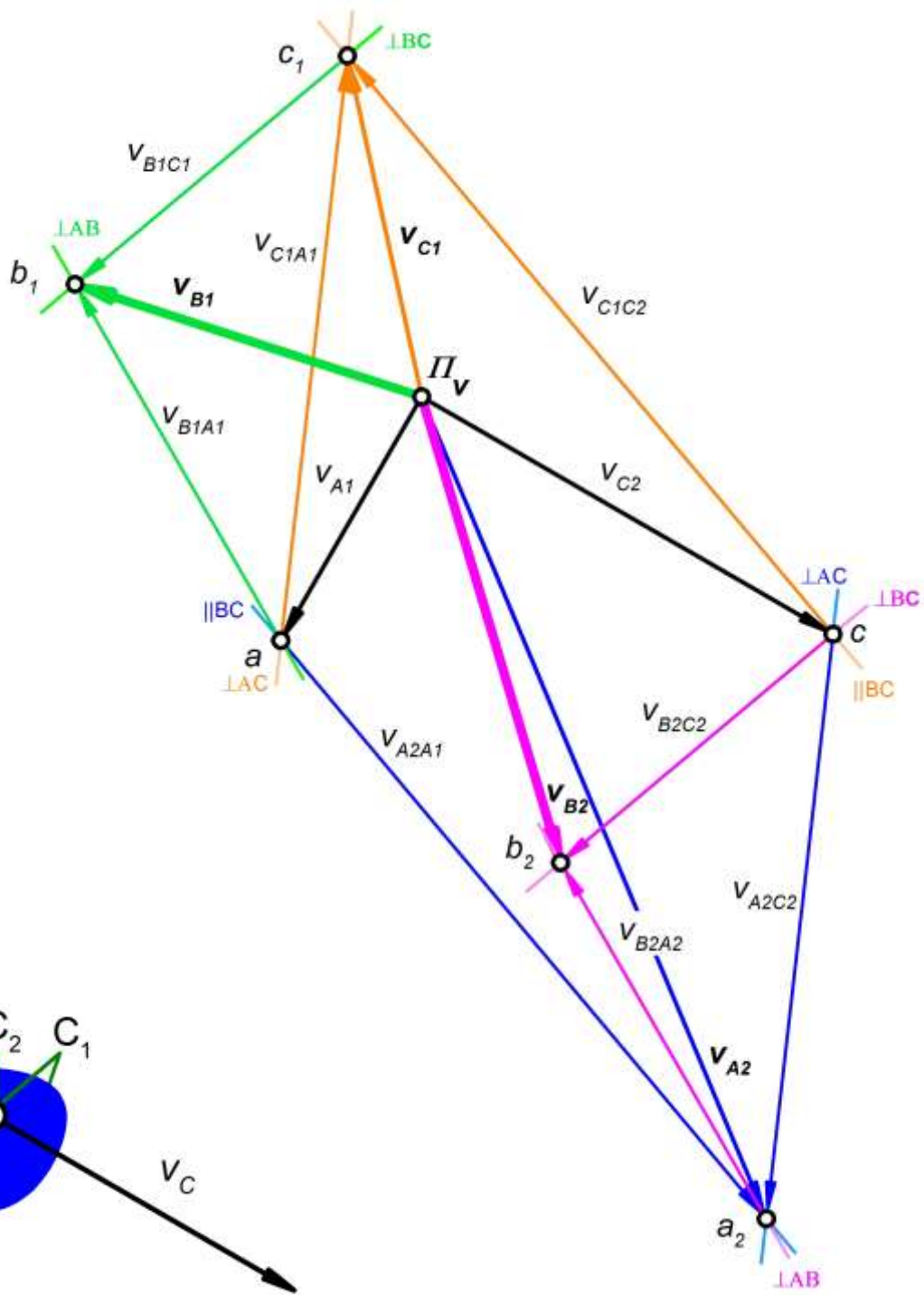
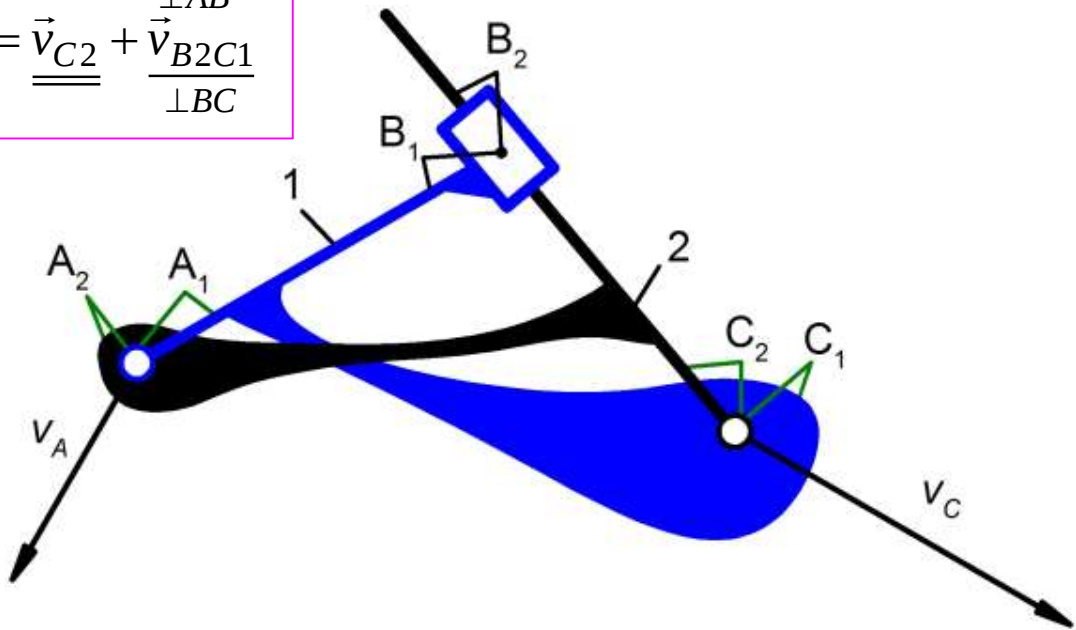
Przestawiona będzie metoda I i III.

2.2. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 2 z parą przesuwną

Należy wyznaczyć teraz prędkości punktów B_1 i B_2 , dla których można napisać układy równań wektorowych:

$$\begin{cases} \vec{v}_{B1} = \vec{v}_{A1} + \frac{\vec{v}_{B1A1}}{\perp AB} \\ \vec{v}_{B1} = \vec{v}_{C1} + \frac{\vec{v}_{B1C1}}{\perp BC} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v}_{B2} = \vec{v}_{A2} + \frac{\vec{v}_{B2A2}}{\perp AB} \\ \vec{v}_{B2} = \vec{v}_{C2} + \frac{\vec{v}_{B2C2}}{\perp BC} \end{cases}$$

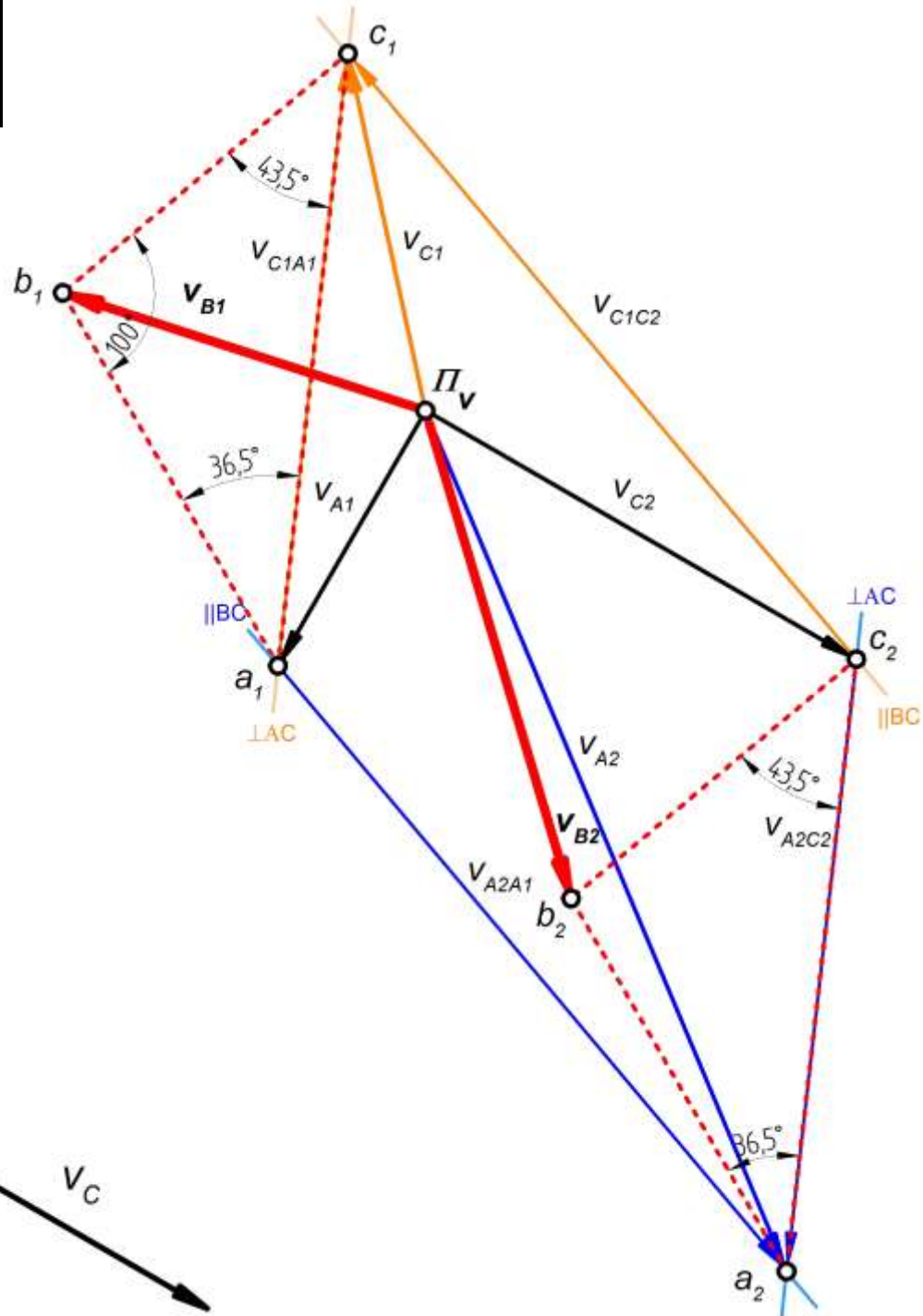
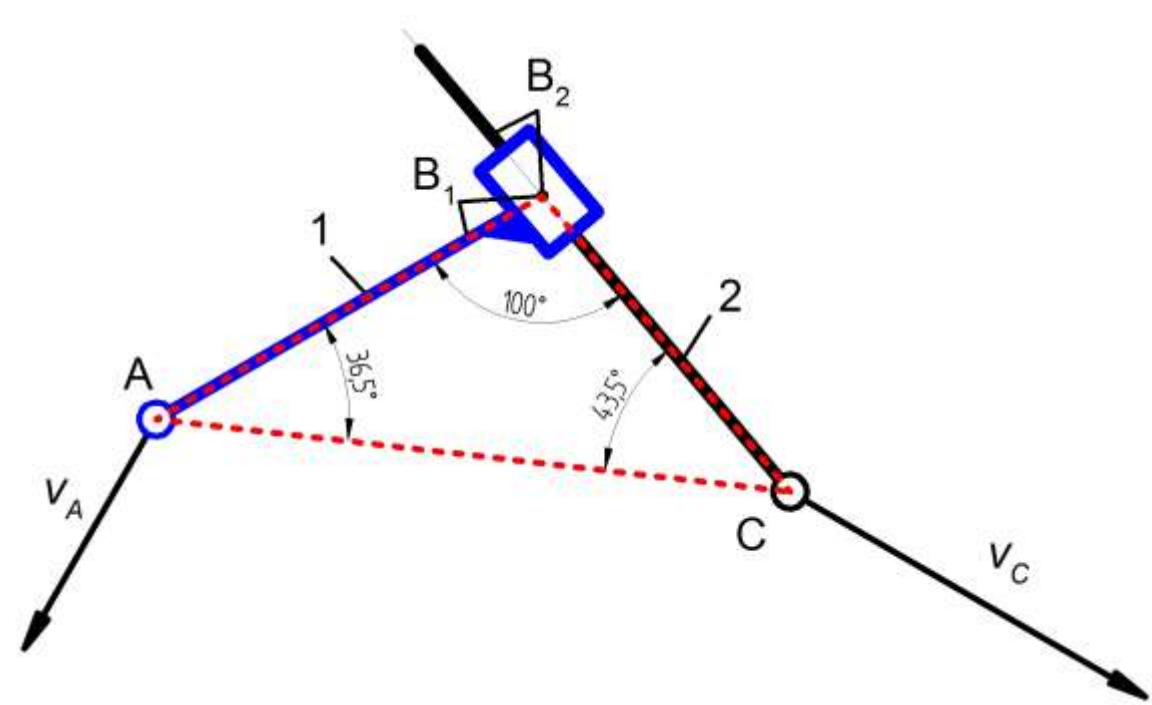


2.2. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 2 z parą przesuwną

Prędkości punktów B_1 i B_2 wyznaczone z podobieństwa trójkątów:

$$\Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta a_1 b_1 c_1$$

$$\Delta A_2 B_2 C_2 \sim \Delta a_2 b_2 c_2$$



Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

2.2. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 2 z parą przesuwną

Procedura wyznaczania przyspieszeń jest bardzo podobna do wyznaczania prędkości. Należy również wyznaczyć przyspieszenia dla dwóch dodatkowych punktów C_1 i A_2 z układów równań:

$$\begin{cases} \vec{a}_{A2} = \underline{\underline{\vec{a}_{C2}}} + \frac{\vec{a}_{A2C2}^n}{\parallel AC} + \frac{\vec{a}_{A2C2}^t}{\perp AC} \\ \vec{a}_{A2} = \underline{\underline{\vec{a}_{A1}}} + \frac{\vec{a}_{A2A1}^c}{\perp BC} + \frac{\vec{a}_{A2A1}^t}{\parallel BC} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_{C1} = \underline{\underline{\vec{a}_{A1}}} + \frac{\vec{a}_{C1A1}^n}{\parallel AC} + \frac{\vec{a}_{C1A1}^t}{\perp AC} \\ \vec{a}_{C1} = \underline{\underline{\vec{a}_{C2}}} + \frac{\vec{a}_{C1C2}^c}{\perp BC} + \frac{\vec{a}_{C1C2}^t}{\parallel BC} \end{cases}$$

$$a_{A2C2}^n = \frac{v_{A2C2}^2}{|AC|}$$

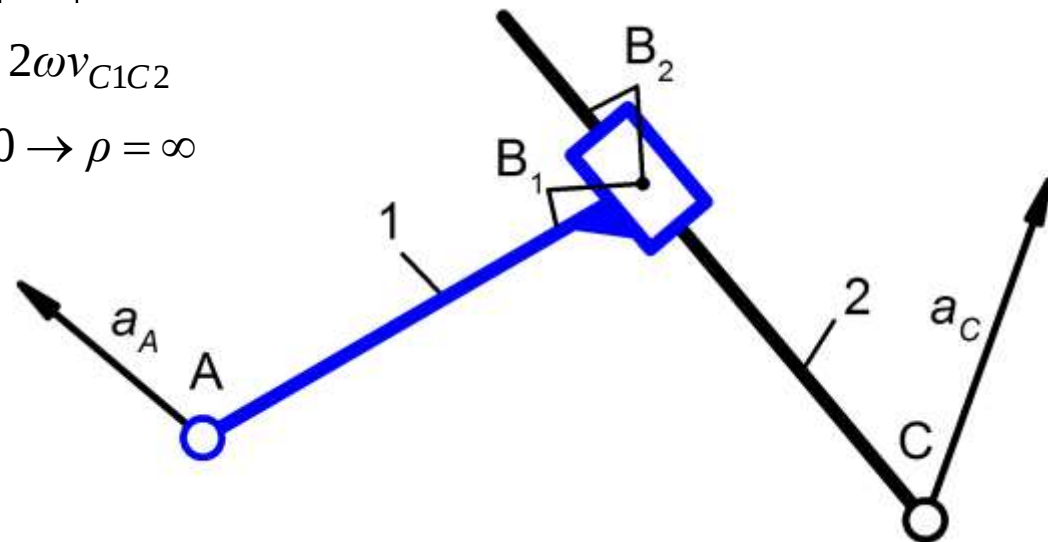
$$a_{C1A1}^n = \frac{v_{C1A1}^2}{|AC|}$$

$$a_{A2A1}^c = 2\omega v_{A2A1}$$

$$a_{C1C2}^c = 2\omega v_{C1C2}$$

$$\vec{a}_{A2A1}^n = 0 \rightarrow \rho = \infty$$

$$\vec{a}_{C1C2}^n = 0 \rightarrow \rho = \infty$$

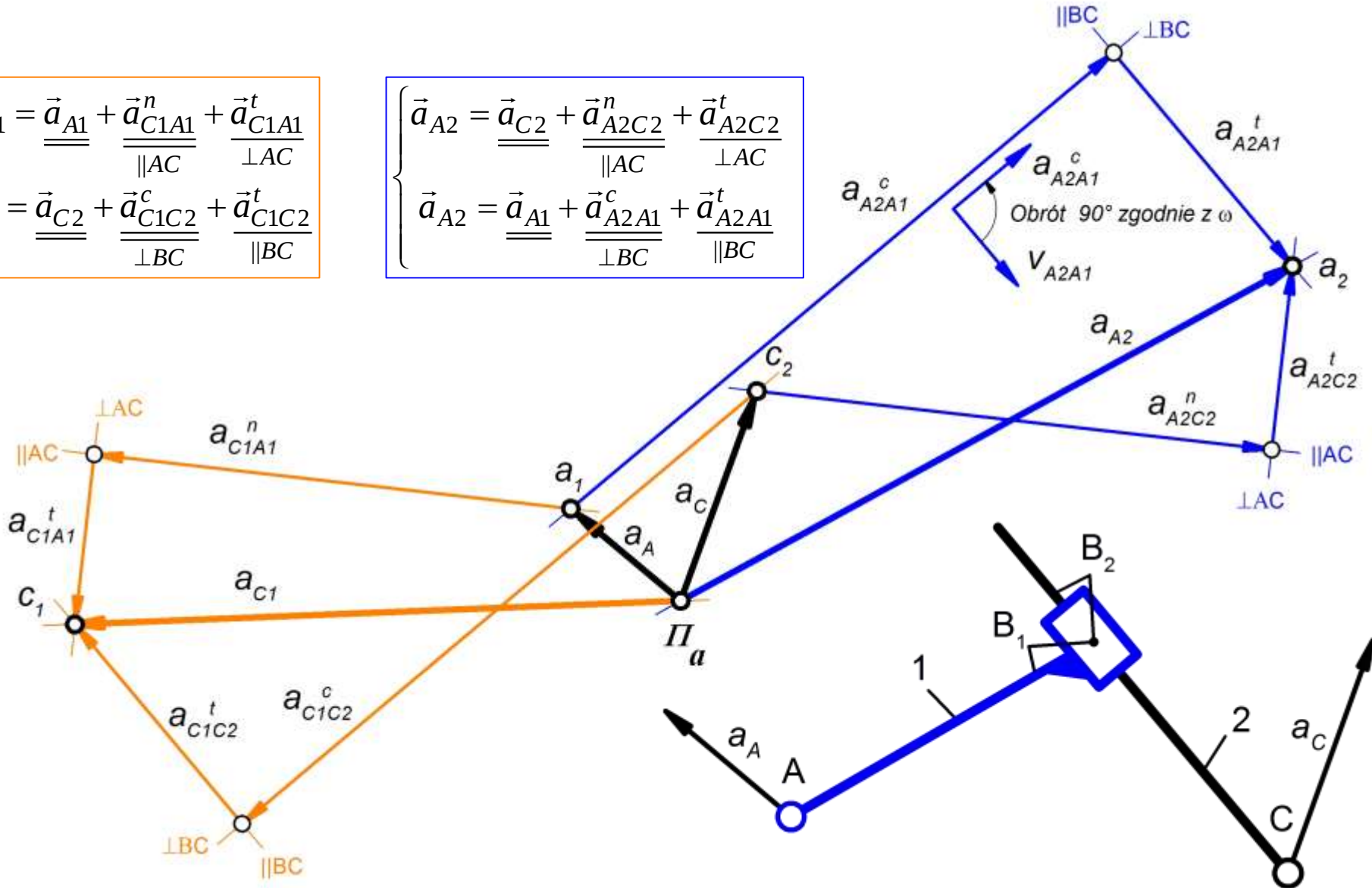


Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

2.2. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 2 z parą przesuwną

$$\begin{cases} \vec{a}_{C1} = \vec{a}_{A1} + \frac{\vec{a}_{C1A1}^n}{\|AC\|} + \frac{\vec{a}_{C1A1}^t}{\perp AC} \\ \vec{a}_{C1} = \vec{a}_{C2} + \frac{\vec{a}_{C1C2}^c}{\perp BC} + \frac{\vec{a}_{C1C2}^t}{\|BC\|} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_{A2} = \vec{a}_{C2} + \frac{\vec{a}_{A2C2}^n}{\|AC\|} + \frac{\vec{a}_{A2C2}^t}{\perp AC} \\ \vec{a}_{A2} = \vec{a}_{A1} + \frac{\vec{a}_{A2A1}^c}{\perp BC} + \frac{\vec{a}_{A2A1}^t}{\|BC\|} \end{cases}$$



Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

2.2. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 2 z parą przesuwną

Znając przyspieszenia dwóch różnych punktów dla każdego z członów, wyznaczenie przyspieszeń punktów B_1 i B_2 może mieć następujący przebieg:

- I. Traktując ruch płaski członów jako złożony można napisać układy równań wektorowych i rozwiązać je graficznie:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_{B1} = \underline{\underline{\vec{a}_{A1}}} + \frac{\vec{a}_{B1A1}^n}{\|AB\|} + \frac{\vec{a}_{B1A1}^t}{\perp AB} \\ \vec{a}_{B1} = \underline{\underline{\vec{a}_{C1}}} + \frac{\vec{a}_{B1C1}^n}{\|BC\|} + \frac{\vec{a}_{B1C1}^t}{\perp BC} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_{B2} = \underline{\underline{\vec{a}_{A2}}} + \frac{\vec{a}_{B2A2}^n}{\|AB\|} + \frac{\vec{a}_{B2A2}^t}{\perp AB} \\ \vec{a}_{B2} = \underline{\underline{\vec{a}_{C2}}} + \frac{\vec{a}_{B2C2}^n}{\|BC\|} + \frac{\vec{a}_{B2C2}^t}{\perp BC} \end{array} \right.$$

- II. Wyznaczyć środki przyspieszeń i szukane przyspieszenia. Przyspieszenie kątowe ε jest identyczne dla obu członów i wynika to z konstrukcji grupy strukturalnej (sztywne połączenie w członie 1 części prostoliniowej z suwakiem).
- III. Wyznaczyć wektory przyspieszeń metodą graficzną z podobieństwa figur (w tym przypadku trójkątów).

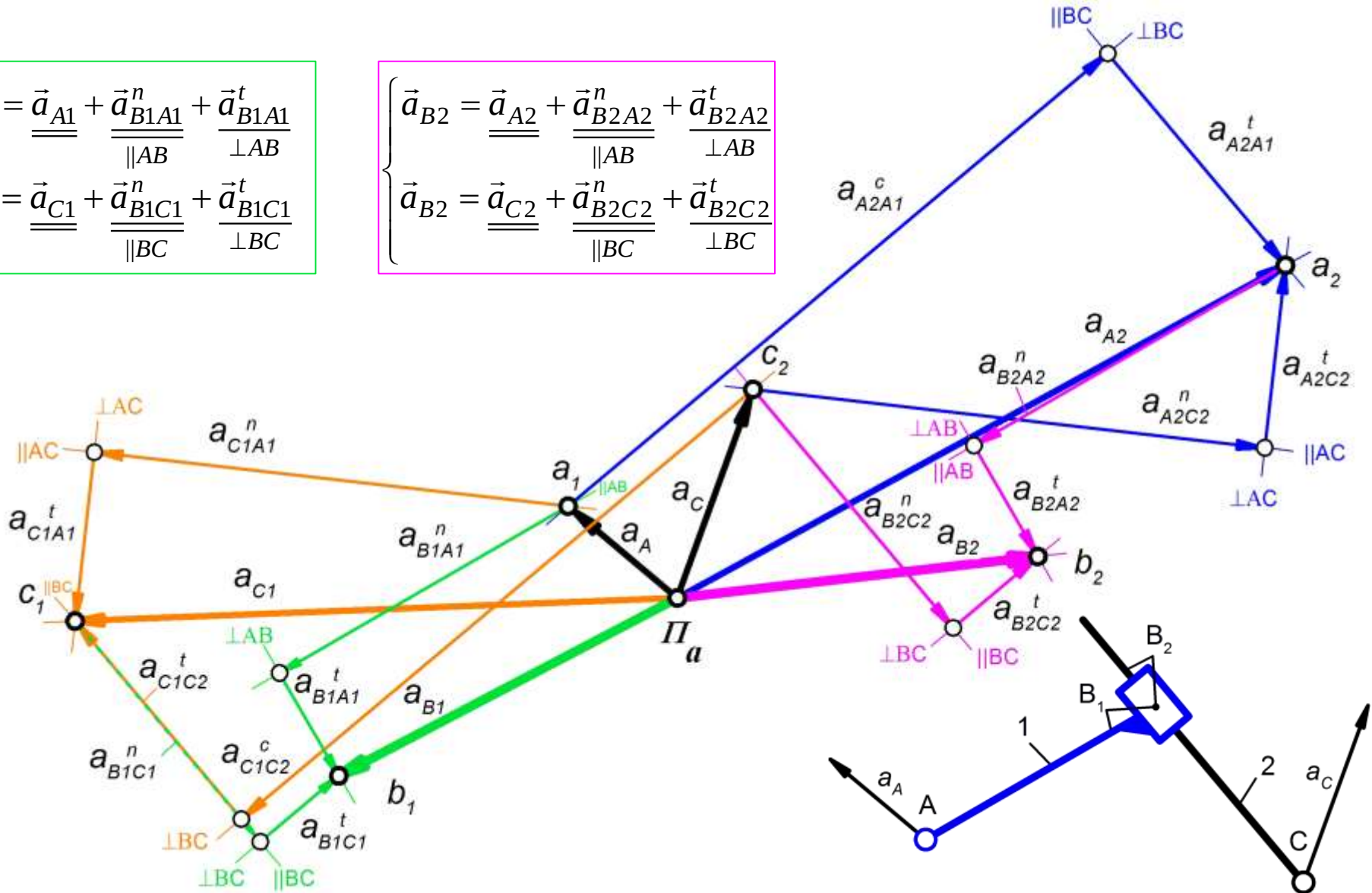
Przestawiona będzie metoda I.

Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

2.2. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 2 z parą przesuwną

$$\begin{cases} \vec{a}_{B1} = \vec{a}_{A1} + \vec{a}_{B1A1}^n + \vec{a}_{B1A1}^t \\ \vec{a}_{B1} = \vec{a}_{C1} + \vec{a}_{B1C1}^n + \vec{a}_{B1C1}^t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{a}_{B2} = \vec{a}_{A2} + \vec{a}_{B2A2}^n + \vec{a}_{B2A2}^t \\ \vec{a}_{B2} = \vec{a}_{C2} + \vec{a}_{B2C2}^n + \vec{a}_{B2C2}^t \end{cases}$$

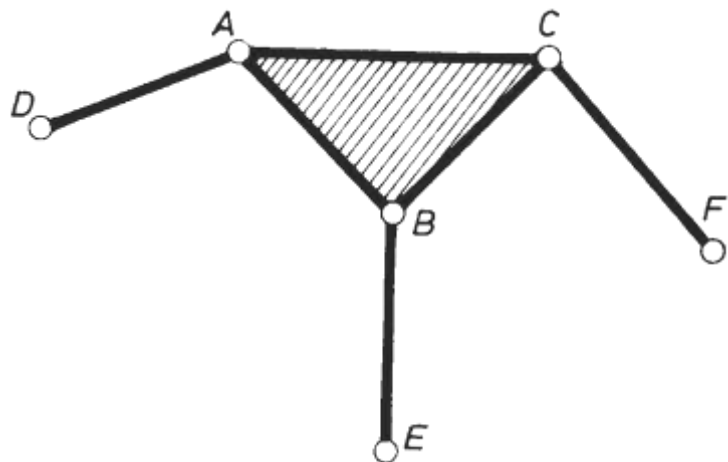


Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

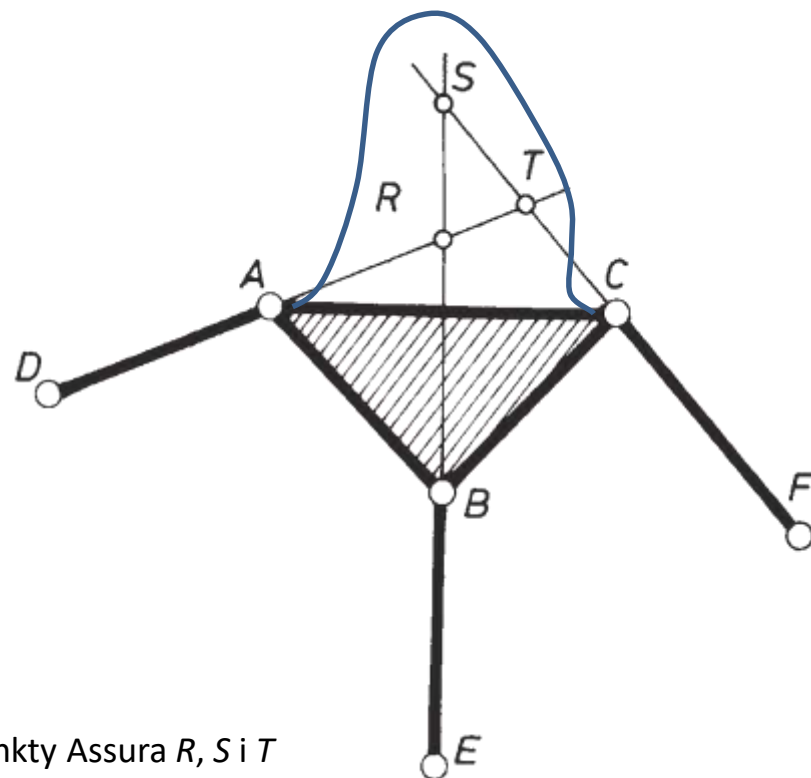
3. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 3, czterocłonowej z parami obrotowymi

Znane są prędkości i przyspieszenia punktów D , E i F grupy klasy 3 widocznej na rysunku 1. Należy wyznaczyć prędkości i przyspieszenia punktów A , B i C .

W tym celu wprowadza się tzw. punkty Assura R , S lub T leżące na przecięciu dwóch prostych przechodzących przez półpary członów dwuwęzłowych (rys. 2). Są one sztywno połączone z członem trójwęzłowym ABC . Jeden punkt Assura jest wystarczający do znalezienia nieznanych prędkości i przyspieszeń.



Rys. 1. Grupa klasy 3
[na podstawie Miller 1996]



Rys. 2. Punkty Assura R , S i T
[na podstawie Miller 1996]

Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

3. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 3, czterocłonowej z parami obrotowymi

Jako pierwsza zostanie wyznaczona prędkość punktu R , co umożliwi w następnym korku obliczenie prędkości punktu A , B lub C . Traktując ruch członu ABCR jako złożony z ruchu postępowego i obrotowego otrzymuje się układ równań:

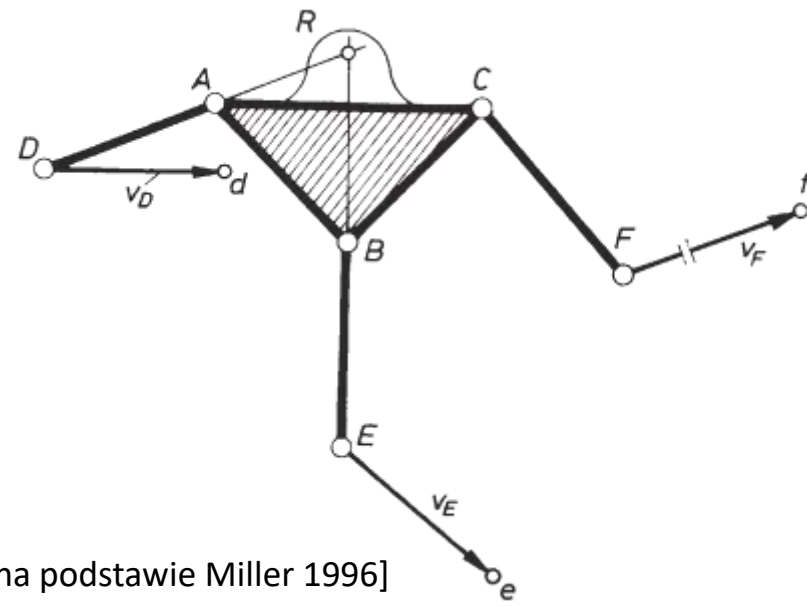
$$\begin{cases} \vec{v}_R = \vec{v}_A + \frac{\vec{v}_{RA}}{\perp AR} \\ \vec{v}_R = \vec{v}_B + \frac{\vec{v}_{RB}}{\perp BR} \end{cases}$$

Występuje zbyt dużo niewiadomych, aby uzyskać rozwiązanie. Punkty A i B należą również do członów AD oraz BE , dla których znane są prędkości punktów D i E , a więc zachodzą zależności:

$$\vec{v}_A = \frac{\vec{v}_D}{\perp AD} + \frac{\vec{v}_{AD}}{\perp AD}; \quad \vec{v}_B = \frac{\vec{v}_E}{\perp BE} + \frac{\vec{v}_{BE}}{\perp BE}$$

Podstawiając równania do układu równań otrzymuje się:

$$\begin{cases} \vec{v}_R = \frac{\vec{v}_D}{\perp AD} + \frac{\vec{v}_{AD}}{\perp AD} + \frac{\vec{v}_{RA}}{\perp AR} \\ \vec{v}_R = \frac{\vec{v}_E}{\perp BE} + \frac{\vec{v}_{BE}}{\perp BE} + \frac{\vec{v}_{RB}}{\perp BR} \end{cases}$$



Rys. 1. [na podstawie Miller 1996]

Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

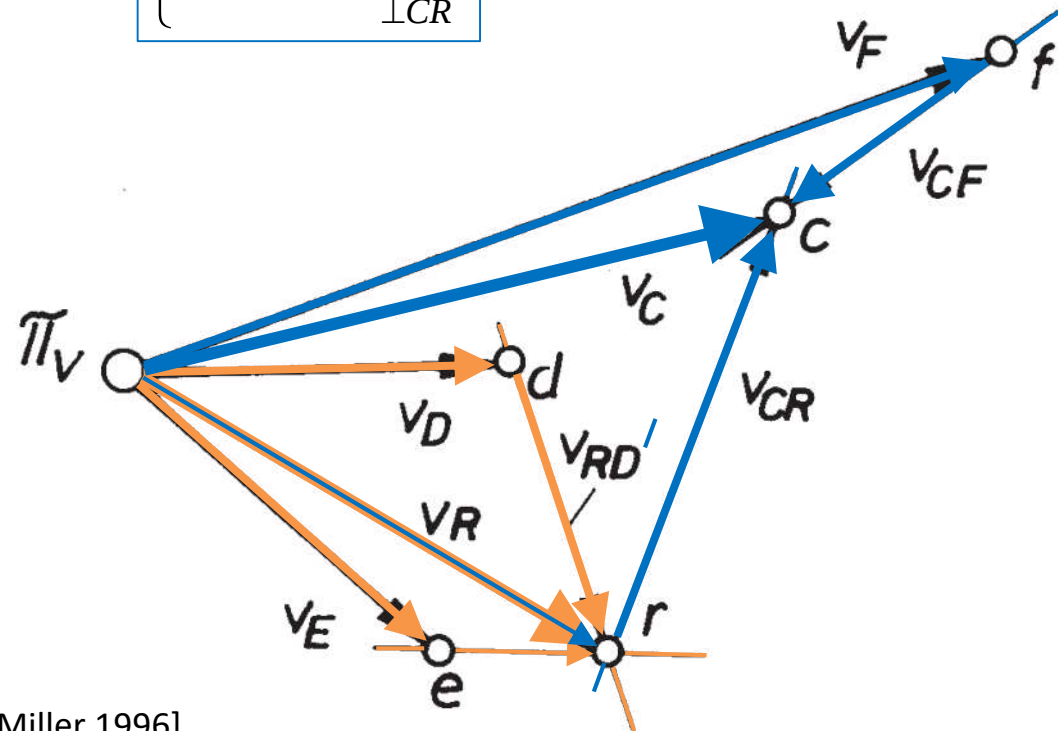
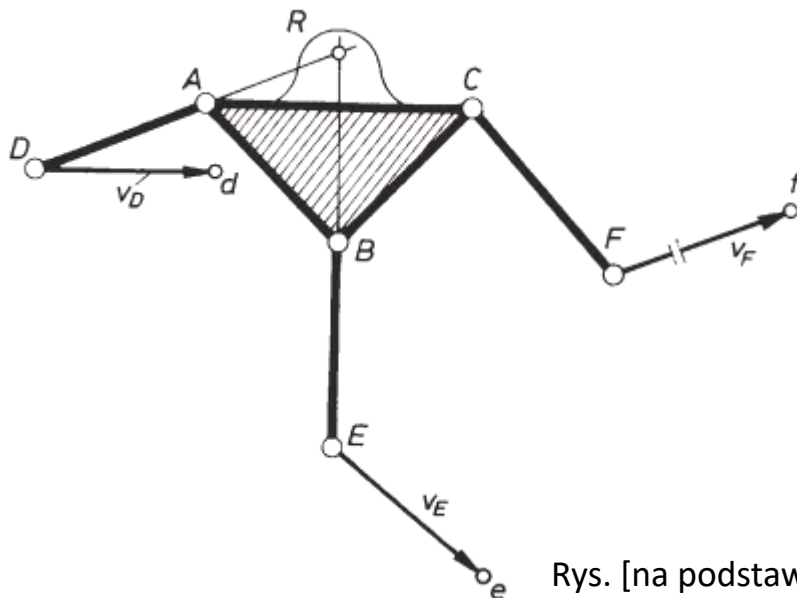
3. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 3, czteroczłonowej z parami obrotowymi

Zredukowanie kierunków prędkości względnych do dwóch jest spowodowane nieprzypadkowym wyborem punktu R , i możliwe jest już rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} \vec{v}_R = \vec{v}_D + \frac{\vec{v}_{AD}}{\perp AD} + \frac{\vec{v}_{RA}}{\perp AR} \\ \vec{v}_R = \vec{v}_E + \frac{\vec{v}_{BE}}{\perp BE} + \frac{\vec{v}_{RB}}{\perp BR} \end{cases}$$

Może być już wyznaczona prędkość dowolnego członu trójwęzłowego, dla punktu C układ równań ma postać:

$$\begin{cases} \vec{v}_C = \vec{v}_F + \frac{\vec{v}_{CF}}{\perp CF} \\ \vec{v}_C = \vec{v}_R + \frac{\vec{v}_{CR}}{\perp CR} \end{cases}$$



Rys. [na podstawie Miller 1996]

Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

3. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 3, czterocłonowej z parami obrotowymi

Wyznaczanie przyspieszeń również rozpoczyna się od określenia przyspieszenia punktu R , układ równań ma postać:

$$\begin{cases} \vec{a}_R = \vec{a}_A + \frac{\vec{a}_{RA}^n}{\|AR\|} + \frac{\vec{a}_{RA}^t}{\perp AR} \\ \vec{a}_R = \vec{a}_B + \frac{\vec{a}_{RB}^n}{\|BR\|} + \frac{\vec{a}_{RB}^t}{\perp BR} \end{cases}$$

ponieważ

$$\begin{cases} \vec{a}_A = \frac{\vec{a}_D}{\|AD\|} + \frac{\vec{a}_{AD}^n}{\|AD\|} + \frac{\vec{a}_{AD}^t}{\perp AD} \\ \vec{a}_B = \frac{\vec{a}_E}{\|BE\|} + \frac{\vec{a}_{BE}^n}{\|BE\|} + \frac{\vec{a}_{BE}^t}{\perp BE} \end{cases}$$

więc

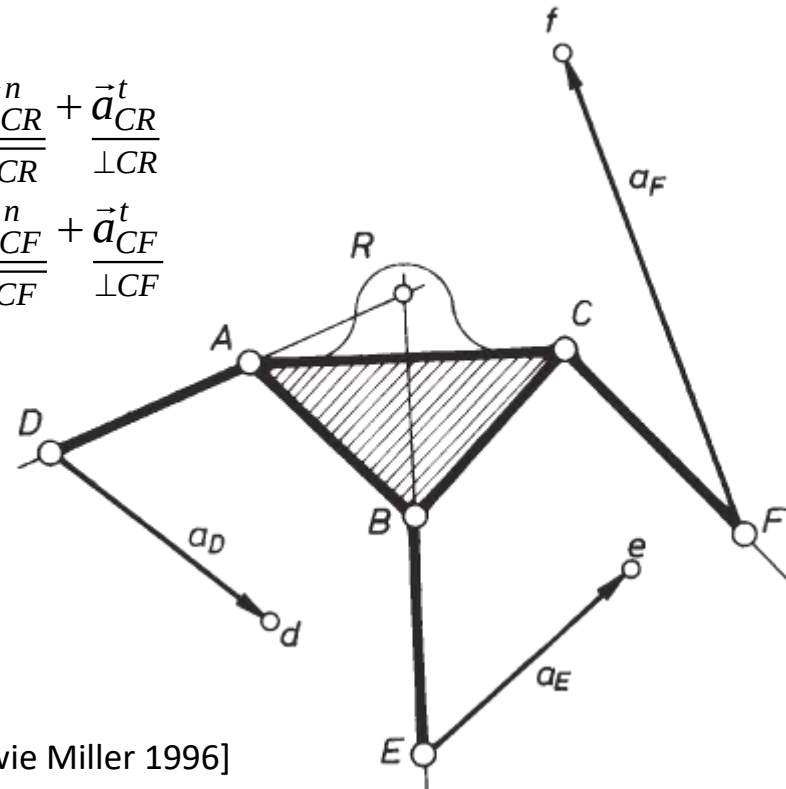
$$\begin{cases} \vec{a}_R = \frac{\vec{a}_D}{\|AD\|} + \frac{\vec{a}_{AD}^n}{\|AD\|} + \frac{\vec{a}_{AD}^t}{\perp AD} + \frac{\vec{a}_{RA}^n}{\|AR\|} + \frac{\vec{a}_{RA}^t}{\perp AR} \\ \vec{a}_R = \frac{\vec{a}_E}{\|BE\|} + \frac{\vec{a}_{BE}^n}{\|BE\|} + \frac{\vec{a}_{BE}^t}{\perp BE} + \frac{\vec{a}_{RB}^n}{\|BR\|} + \frac{\vec{a}_{RB}^t}{\perp BR} \end{cases}$$

Gdzie:

$$\vec{a}_{AD}^n = \frac{v_{AD}^2}{|AD|}; \quad \vec{a}_{RA}^n = \frac{v_{RA}^2}{|RA|}; \quad \vec{a}_{BE}^n = \frac{v_{BE}^2}{|BE|}; \quad \vec{a}_{RB}^n = \frac{v_{RB}^2}{|RB|}$$

Może być już wyznaczone przyspieszenie dowolnego punktu członu trójwęzłowego, dla punktu C układ równań ma postać:

$$\begin{cases} \vec{a}_C = \vec{a}_R + \frac{\vec{a}_{CR}^n}{\|CR\|} + \frac{\vec{a}_{CR}^t}{\perp CR} \\ \vec{a}_C = \vec{a}_F + \frac{\vec{a}_{CF}^n}{\|CF\|} + \frac{\vec{a}_{CF}^t}{\perp CF} \end{cases}$$



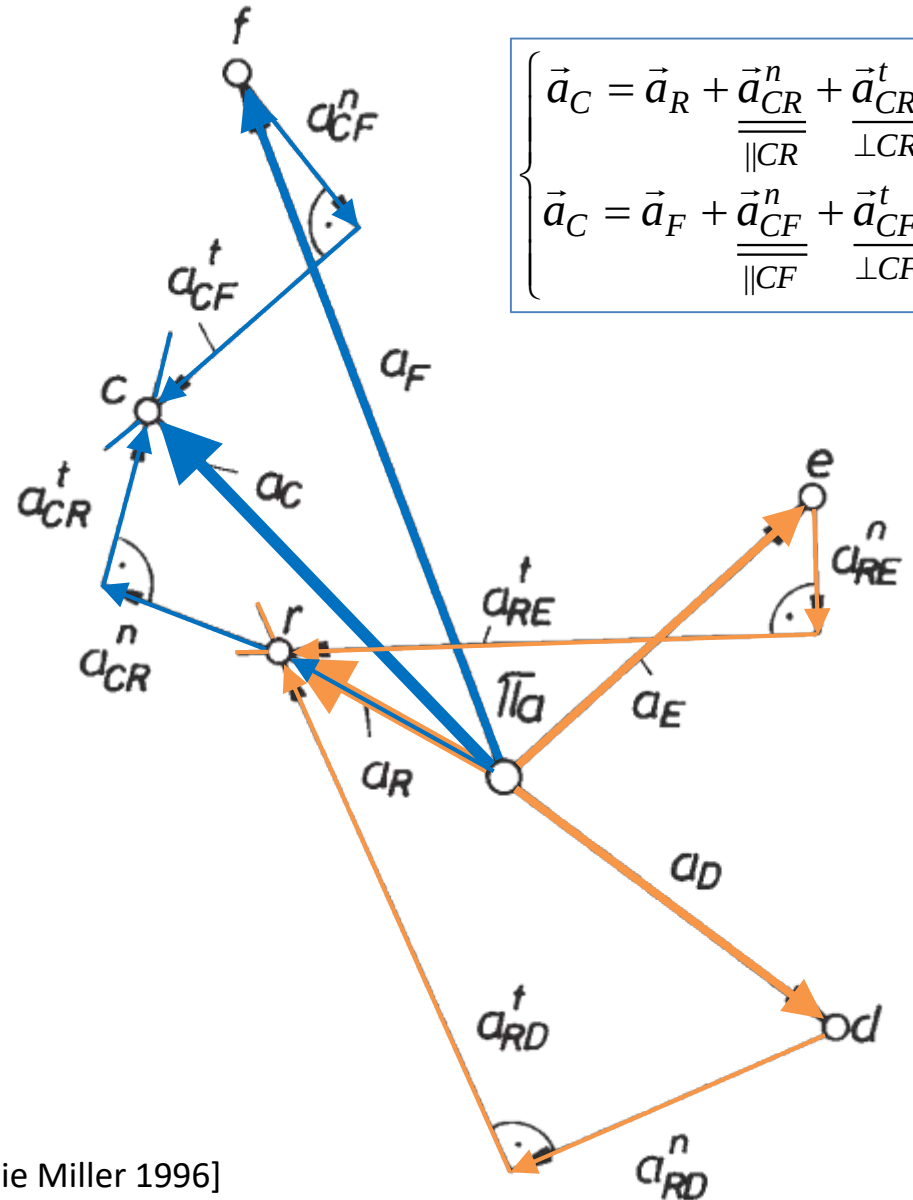
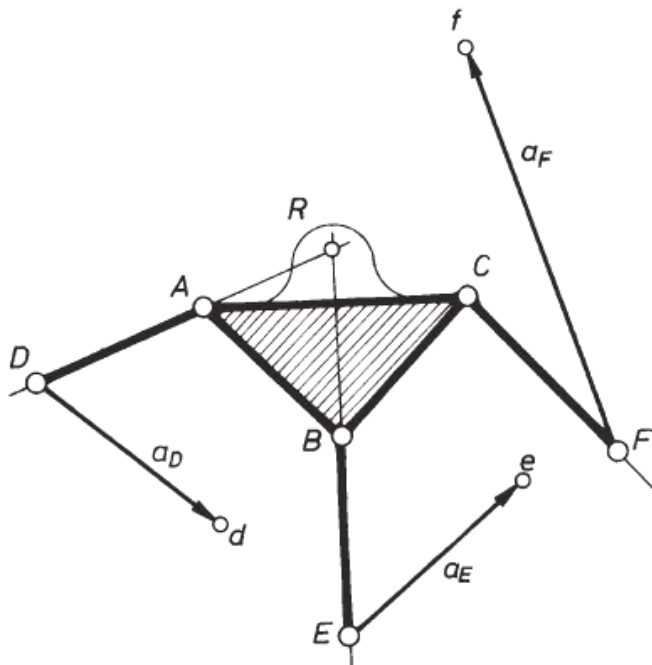
Rys. [na podstawie Miller 1996]

Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

3. Plan prędkości i przyspieszeń grupy strukturalnej klasy 3, czteroczłonowej z parami obrotowymi

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_R = \underline{\underline{\vec{a}_D}} + \frac{\vec{a}_{AD}^n}{\underline{\underline{\|AD\|}}} + \frac{\vec{a}_{AD}^t}{\underline{\underline{\perp AD}}} + \frac{\vec{a}_{RA}^n}{\underline{\underline{\|AR\|}}} + \frac{\vec{a}_{RA}^t}{\underline{\underline{\perp AR}}} \\ \vec{a}_R = \underline{\underline{\vec{a}_E}} + \frac{\vec{a}_{BE}^n}{\underline{\underline{\|BE\|}}} + \frac{\vec{a}_{BE}^t}{\underline{\underline{\perp BE}}} + \frac{\vec{a}_{RB}^n}{\underline{\underline{\|BR\|}}} + \frac{\vec{a}_{RB}^t}{\underline{\underline{\perp BR}}} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_C = \vec{a}_R + \frac{\vec{a}_{CR}^n}{\|CR\|} + \frac{\vec{a}_{CR}^t}{\perp CR} \\ \vec{a}_C = \vec{a}_F + \frac{\vec{a}_{CF}^n}{\|CF\|} + \frac{\vec{a}_{CF}^t}{\perp CF} \end{array} \right.$$



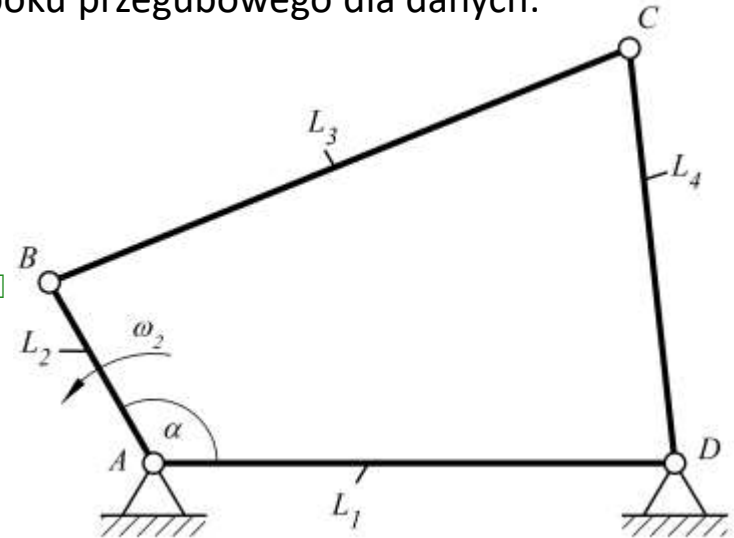
Rys. [Na podstawie Miller 1996]

Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

4. Przykład wyznaczania prędkości i przyspieszeń dla czworoboku przegubowego

Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie wahacza czworoboku przegubowego dla danych:

$L_1 = 0.5$; % długość podstawy w[m]
 $L_2 = 0.2$; % długość korby w [m]
 $L_3 = 0.6$; % długość łącznika w [m]
 $L_4 = 0.4$; % długość wahacza w [m]
 $\omega_2 = 2\pi$ % prędkość kątowa korby w [rad/s]
 $\varepsilon_2 = 0$ % przyspieszenie kątowe korby w[rad/s²]
 $\alpha = 120$ % położenie korby w [°]



Prędkość liniowa punktu $B = B_2 = B_3$ jest równa:

$$v_B = \omega_1 l_{AB} = 2\pi \cdot 0,2 = 0,4\pi \text{ m/s}$$

Należy przyjąć podziałkę prędkości do rysowania planu prędkości.

$$\kappa_v = 0,01 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{1}{\text{mm}} \right]$$

Długość wektora prędkości v_B

$$(v_B) = \frac{v_B}{\kappa_v} = \frac{0,4\pi}{0,01} = 40\pi \text{ mm}$$

Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

4. Przykład wyznaczania prędkości i przyspieszeń dla czworoboku przegubowego

Prędkość punktu C wyrażona jest równaniem:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}$$

$\perp_{CD} \quad \perp_{AB} \quad \perp_{BC}$

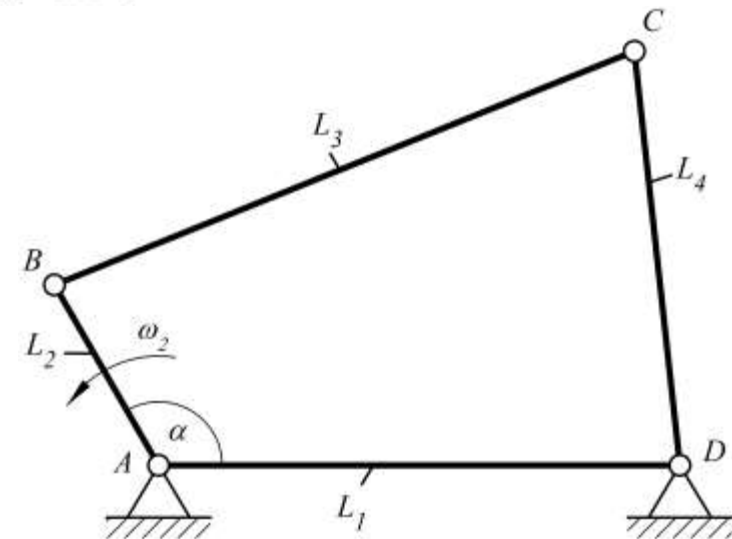
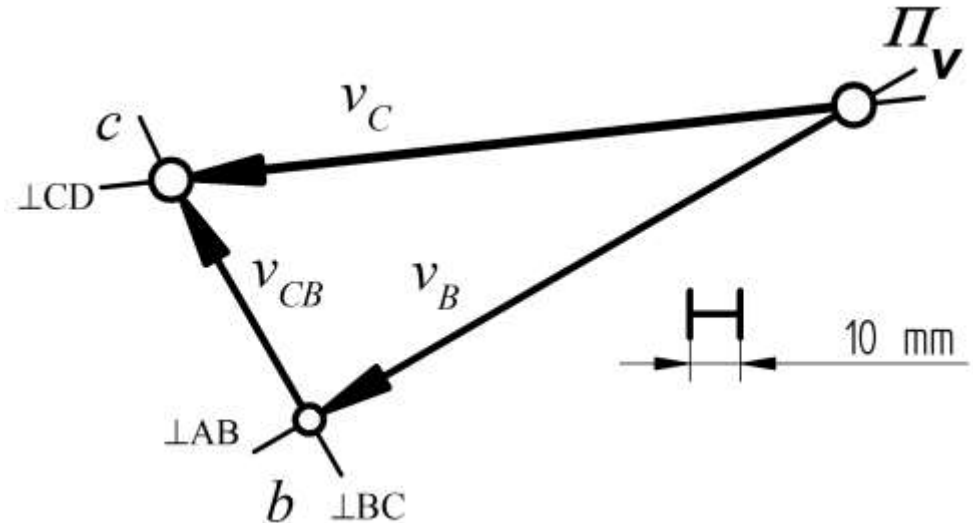
Z planu odczytano długości wektorów v_C oraz v_{CB} i obliczono prędkości

$$v_C = (v_C)_{\kappa_v} = 137,2902018 \cdot 0,01 = 1,372902018 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{CB} = (v_{CB})_{\kappa_v} = 55,292246 \cdot 0,01 = 0,55292246 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Prędkość kątowna wynosi:

$$\omega_4 = \frac{v_C}{|CD|} = \frac{1,372902018}{0,4} = 3,432255045 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

4. Przykład wyznaczania prędkości i przyspieszeń dla czworoboku przegubowego

Przyspieszenie punktu C wynosi:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}$$

a po podstawieniu przyspieszeń składowych:

$$\underbrace{\vec{a}_C^n}_{\parallel CD} + \underbrace{\vec{a}_C^t}_{\perp CD} = \underbrace{\vec{a}_B}_{\parallel AB} + \underbrace{\vec{a}_{CB}^n}_{\parallel BC} + \underbrace{\vec{a}_{CB}^t}_{\perp BC}$$

Należy obliczyć znane przyspieszenia normalne, przyjęto podziałkę przyspieszenia $\kappa_a = 0,05 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{1}{\text{mm}} \right]$

$$a_C^n = \frac{v_C^2}{|CD|} = \frac{1,372902018^2}{0,4} = 4,71214987757 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$(a_C^n) = \frac{a_C^n}{\kappa_a} = \frac{4,71214987757}{0,05} = 94,24299755142 \text{ mm}$$

$$a_B = \frac{v_B^2}{|AB|} = \frac{(0,4\pi)^2}{0,2} = 7,89568352087 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$(a_B) = \frac{a_B}{\kappa_a} = \frac{7,89568352087}{0,05} = 157,91367041742 \text{ mm}$$

$$a_{CB}^n = \frac{v_{CB}^2}{|BC|} = \frac{0,55292246^2}{0,6} = 0,50953874462 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$(a_{CB}^n) = \frac{a_{CB}^n}{\kappa_a} = \frac{0,50953874462}{0,05} = 10,19077489241 \text{ mm}$$

Dlaczego przyspieszenie punktu B
nie rozłożono na składowe?

Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

4. Przykład wyznaczania prędkości i przyspieszeń dla czworoboku przegubowego

$$\underbrace{\vec{a}_C^n}_{\parallel CD} + \underbrace{\vec{a}_C^t}_{\perp CD} = \underbrace{\vec{a}_B}_{\parallel AB} + \underbrace{\vec{a}_{CB}^n}_{\parallel BC} + \underbrace{\vec{a}_{CB}^t}_{\perp BC}$$

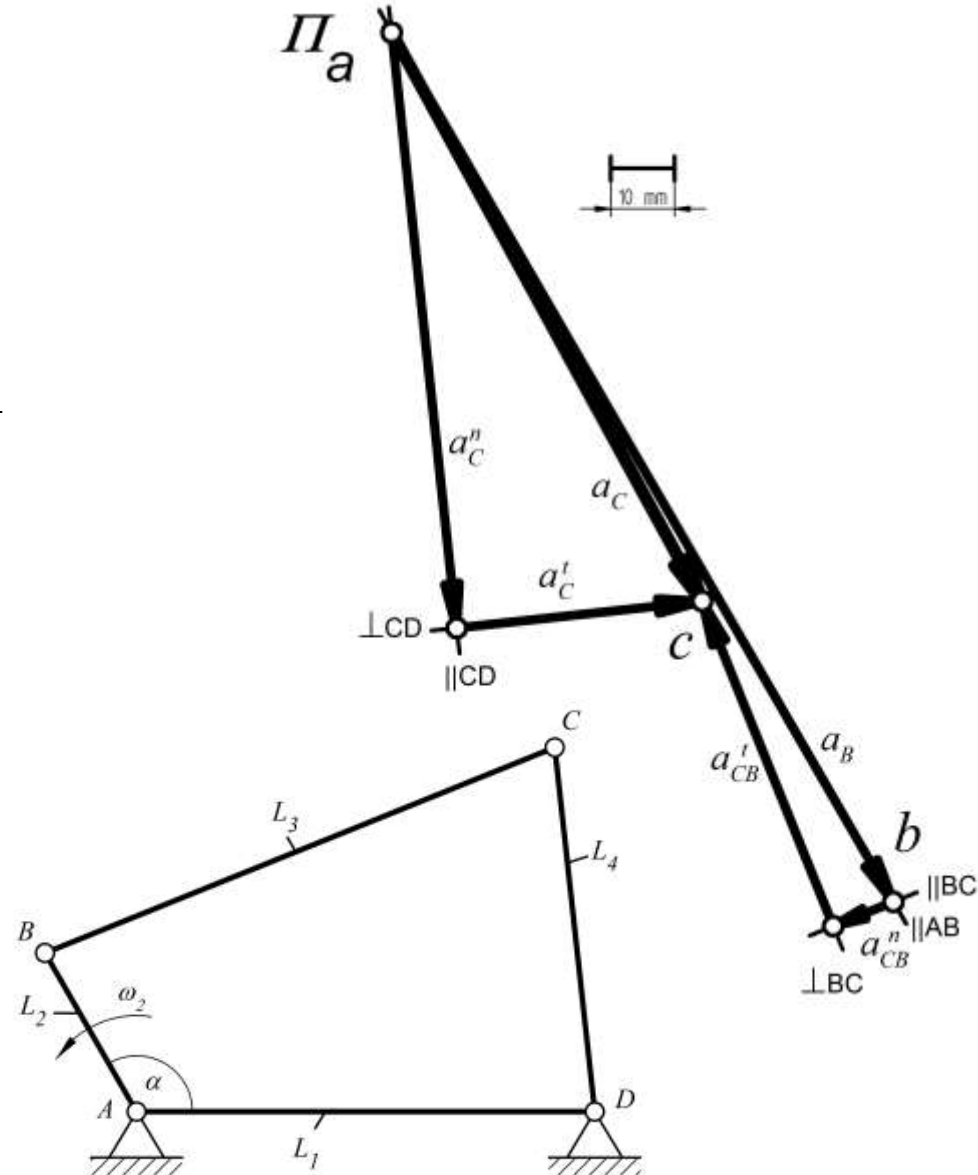
Z planu odczytano długości wektorów a_C
oraz a_C^t i obliczono przyspieszenia liniowe

$$a_C = (a_C) \kappa_a = 101,9405928 \cdot 0,05 = 5,09702964 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$a_C^t = (a_C^t) \kappa_a = 38,8605438 \cdot 0,05 = 1,94302719 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

oraz przyspieszenie kątowe

$$\varepsilon_4 = \frac{a_C^t}{|CD|} = \frac{1,94302719}{0,4} = 4,857567975 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$



Metody wykreślne – metoda grafoanalityczna

4. Przykład wyznaczania prędkości i przyspieszeń dla czworoboku przegubowego

Porównanie wyników dla metody analitycznej, numerycznej i grafoanalitycznej

Wyniki dla metody grafoanalitycznej (plany prędkości i przyspieszeń wykonano w programie SolidEdge):

$$\omega_4 = 3,432255045 \text{ rad/s}$$
$$\varepsilon_4 = 4,857567975 \text{ rad/s}^2$$

Wyniki dla wzorów analitycznych (obliczenia przeprowadzone w programie Matlab):

$$\omega_4 = 3.244092667733456 \text{ rad/s}$$
$$\varepsilon_4 = 4.444153407551584 \text{ rad/s}^2$$

Wyniki dla metody numerycznej (symulacja mechanizmu i wyniki z programu NX):

$$\omega_4 = 3,24409259368118 \text{ rad/s}$$
$$\varepsilon_4 = 4,44415324003924 \text{ rad/s}^2$$

Literatura

1. Miller S.: *Teoria maszyn i mechanizmów. Analiza układów kinematycznych*. WPW, Wrocław 1996.
2. Leyko J.: *Mechanika ogólna. Statyka i kinematyka. Tom 1*. PWN, Warszawa 2012.
3. Felis J., Jaworowski H., Cieślik J.: *Teoria maszyn i mechanizmów. Część I. Analiza mechanizmów*. UWND AGH, Kraków 2008.
4. Młynarski T., Listwan A., Pazderski E.: *Teoria maszyn i mechanizmów. Cz. III. Analiza kinematyczna mechanizmów*. ZGPK, Kraków 1992.
5. Myszka D. H.: *Mechines & mechanism. Applied kinematic analysis*. Prentice Hall, Boston 2012.
6. Felis J., Jaworowski H.: *Teoria maszyn i mechanizmów. Część II. Przykłady i zadania*. UWND AGH, Kraków 2007.
7. Morecki A., Oderfeld J.: *Teoria maszyn i mechanizmów*. PWN, Warszawa 1987.