2 Całka krzywoliniowa

Krzywą na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ można określić na trzy (podstawowe) sposoby: **równaniem funkcyjnym** $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ (np. $y = 2/x$, $x > 0$ jest gałęzią hiperboli), **równaniem uwikłanym** $F(x, y) = 0$ (typowym przykładem równania uwikłanego jest równanie okręgu, np. $x^2 + y^2 = 9$) lub **równaniem parametrycznym** $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$. Przejście od równania parametrycznego do równania funkcyjnego (ew. uwikłanego) jest możliwe dzięki wyrugowaniu parametru t. Zwykle możliwe jest wyznaczenie t z jednego z równań, wtedy po podstawieniu do drugiego z równań otrzymać można równanie funkcyjne (ew. uwikłane).

Przykład.
Jakie krzywe przedstawiają równania:
a) $x = 2t + 1$, $y = t^2 + 1$, $t \in [-1, 2]$ oraz b) $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $t \in [0, \pi]$.

a) Z pierwszego równania $t = (x - 1)/2$ i po wstawieniu do równania drugiego mamy $y = \frac{1}{4}(x - 1)^2 + 1$ lub inaczej $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$. Jest to fragment paraboli przy x zmieniającym się w zakresie $[-1, 5]$.

b) Wyrugowanie parametru t można zrealizować inaczej niż w podpunkcie a). Po podniesieniu do kwadratu stronami obu równań i ich dodaniu mamy $x^2 + y^2 = 4(\cos^2 t + \sin^2 t) = 4$. Otrzymaliśmy część okręgu; warunkowi $t \in [0, \pi]$ odpowiada $x \in [-2, 2]$ oraz $y \in [0, 2]$. Jest więc to górny półokrąg o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 2.

Uwaga Krzywą w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ można określić tylko równaniem parametrycznym $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$!
Uwaga Krzywa określona równaniem parametrycznym $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ jest krzywą skierowaną zgodnie ze wzrostem parametru t; punkt $(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ jest początkiem krzywej, a punkt $(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$ jest jej końcem. Równanie parametryczne nazywamy inaczej **parametryzacją** krzywej.

O krzywej mówimy, że jest **gładka** jeśli styczna do krzywej zmienia się w sposób ciągły wraz ze zmianą położenia punktu na krzywej. Krzywa gładka nie może mieć wierzchołków, ostrzy czy punktów samoprzecięcia. Krzywa jest **kawałkami gładka** gdy można ją podzielić na skończoną ilość łuków gładkich. Zatem np. dowolna łamana choć nie jest krzywą gładką (ma wierzchołki), to jest krzywą kawałkami gładką (każdy odcinek jest gładki).

Niech krzywa K będzie określona równaniami $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ i niech na K określone będą funkcje $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$. Dzielimy zbiór $[\alpha, \beta]$ na podprzedziały punktami $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$ - podział ten oznaczamy symbolem $\mathcal{P}$ i w każdym z podprzedziałów wybieramy punkt t_k^*. Przez δ_n oznaczamy średnicę podziału $\mathcal{P}$ tj. największą długość spośród podprzedziałów składowych. Tworzymy sumę

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} \Big\{ & P(x(t_k^*), y(t_k^*), z(t_k^*)) \left[x(t_k^*) - x(t_{k-1}^*)\right] \\ & + Q(x(t_k^*), y(t_k^*), z(t_k^*)) \left[y(t_k^*) - y(t_{k-1}^*)\right] + R(x(t_k^*), y(t_k^*), z(t_k^*)) \left[z(t_k^*) - z(t_{k-1}^*)\right] \Big\} . \end{aligned} \tag{2}$$

Definicja 2 *Jeśli istnieje granica przy $n \to \infty$ ciągu (S_n) odpowiadająca ciągowi podziałów przedziału $[\alpha, \beta]$, o ile $\lim_{n\to\infty} \delta_n$, i jest niezależna od podziału i wyboru punktów t_k^*, to granicę tę nazywamy* **całką krzywoliniową skierowaną** *z $Pdx + Qdy + Rdz$ po krzywej K i oznaczamy ją symbolem $\int_K Pdx + Qdy + Rdz$.*

Własności całki krzywoliniowej skierowanej

1. $\int_{-K} = -\int_K$, gdzie $-K$ oznacza krzywą K ale skierowaną przeciwnie
2. $\int_K = \int_{K_1} + \int_{K_2}$, gdzie $K = K_1 \cup K_2$

Uwaga Jeśli K jest krzywą płaską (leżącą na płaszczyźnie xOy), to $\int_K Pdx + Qdy + Rdz = \int_K Pdx + Qdy$.

Twierdzenie 5 *Jeśli funkcje P, Q, R są ciągłe na krzywej K: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, to istnieje całka $\int_K Pdx + Qdy + Rdz$ i wyraża się wzorem*

$$\int_K Pdx + Qdy + Rdz = \int_\alpha^\beta [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\, dt\ .$$

Przykład.
Obliczyć całkę $I = \int_K (x-y)dx + (x+y)dy$, gdzie
a) K jest łukiem elipsy $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in [0, \pi]$,
b) $K = AB$ jest odcinkiem, $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$.

Zauważmy najpierw, że w przypadku a) K jest łukiem elipsy leżącym w górnej półpłaszczyźnie. Oznacza to, że obie krzywe mają ten sam początek i koniec.

a)

$$\begin{aligned} I = \int_K (x-y)dx + (x+y)dy &= \int_0^\pi [(a\cos t - b\sin t)\cdot(-a\sin t) + (a\cos t + b\sin t)\cdot b\cos t]\, dt \\ &= \int_0^\pi \left[ab(\sin^2 t + \cos^2 t) + (b^2 - a^2)\sin t\cos t\right] dt \\ &= \int_0^\pi abdt + (b^2 - a^2)\int_0^\pi \sin t\cos tdt \end{aligned}$$

W drugiej całce dokonujemy podstawienia $u = \cos t$ ($du = -\sin t$) i mamy

$$\begin{aligned} I = \pi ab + (b^2 - a^2)\int_1^{-1} u(-du) &= \pi ab + (b^2 - a^2)\int_{-1}^1 udu \\ &= \pi ab + \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)\ u^2\Big|_{-1}^1 = \pi ab + \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2)(1-1) = \pi ab\ . \end{aligned}$$

b) Odcinek o początku w B i końcu w A zawarty jest w osi Ox, czyli w prostej $y = 0$. Ma zatem parametryzację $x = t$, $y = 0$, $t \in [-1, 1]$ (łatwo sprawdzić, że dla $t = -1$ otrzymujemy punkt B, a dla $t = 1$ otrzymujemy punkt A). Do policzenia całki potrzebujemy jednak parametryzacji odcinka AB, a nie BA. Napisana powyżej parametryzacja dotyczy więc krzywej $-K$. Z własności całki krzywoliniowej wiemy, że $\int_K (x-y)dx + (x+y)dy = -\int_{-K}(x-y)dx + (x+y)dy$. Zatem

$$I = -\int_{-K}(x-y)dx + (x+y)dy = -\int_{-1}^1 [(t-0)\cdot 1 + (t+0)\cdot 0]\, dt = -\int_{-1}^1 tdt = -\tfrac{1}{2}t^2\Big|_{-1}^1 = 0\ .$$

Przykład.
Obliczyć całkę $\int_K -ydx + xdy + zdz$, gdzie K: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 2t$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} \int_K -ydx + xdy + zdz &= \int_0^{2\pi} [-3\sin t\cdot(-3\sin t) + 3\cos t\cdot 3\cos t + 2t\cdot 2]\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (9 + 4t)dt = (9t + 2t^2)\Big|_0^{2\pi} = 18\pi + 8\pi^2\ . \end{aligned}$$

Powróćmy do konstrukcji całki krzywoliniowej skierownej. Podział zbioru $[\alpha, \beta]$ na podprzedziały wyznacza podział krzywej K na łuki składowe K_k. Zamiast układu trzech funkcji P, Q, R rozważamy funkcję $f(x, y, z)$ określoną na krzywej K. Jeśli teraz sumę (2) zastąpimy sumą

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x(t_k^*), y(t_k^*), z(t_k^*))\cdot|K_k|\ , \tag{3}$$

gdzie $|K_k|$ jest długością łuku K_k, to możemy zdefiniować całkę krzywoliniową nieskierowaną.

Definicja 3 *Jeśli istnieje granica przy $n \to \infty$ ciągu (S_n) odpowiadająca ciągowi podziałów przedziału $[\alpha, \beta]$, o ile $\lim_{n\to\infty} \delta_n$, i jest niezależna od podziału i wyboru punktów t_k^*, to granicę tę nazywamy* **całką krzywoliniową nieskierowaną** *z f po krzywej K i oznaczamy ją symbolem $\int_K f(x, y, z)dl$.*

Twierdzenie 6 *Jeśli funkcja f jest ciągła na krzywej K: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, to istnieje całka $\int_K f(x, y, z)dl$ i wyraża się wzorem*

$$\int_K f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt \ .$$

Przykład.
Obliczyć całkę $\int_K xyzdl$, gdzie K: $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = \sqrt{2}t$, $t \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}\int_K xyzdl &= \int_0^1 e^t e^{-t}\sqrt{2}t\sqrt{(e^t)^2 + (-e^{-t})^2 + (\sqrt{2})^2}dt = \int_0^1 \sqrt{2}t\sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2}dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{2}t\sqrt{(e^t + e^{-t})^2}dt = \int_0^1 \sqrt{2}t(e^t + e^{-t})dt = \sqrt{2}\left(\int_0^1 te^t dt + \int_0^1 te^{-t}dt\right) \ .\end{aligned}$$

Obie całki (jako nieoznaczone) liczymy przez części, skąd

$$\int te^t dt = (t-1)e^t \quad , \quad \int te^{-t}dt = -(t+1)e^{-t} \ .$$

Zatem

$$\int_K xyzdl = \sqrt{2}\left[(t-1)e^t - (t+1)e^{-t}\right]_0^1 = \sqrt{2}\left[(0 - 2e^{-1}) - (-1-1)\right] = 2\sqrt{2}(1 - e^{-1}) \ .$$