# Całka potrójna - współrzędne sferyczne - ćwiczenia

## Zadanie.

**Korzystając ze współrzędnych sferycznych oraz z Twierdzenia 1 z wykładu obliczyć całkę potrójną.**

(a) $\iiint_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\ dxdydz, \quad V = \{(x,y,z) \in \mathrm{R}^3,\ 9 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 16,\ x \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$

(b) $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dxdydz, \quad V = \{(x,y,z) \in \mathrm{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ z \geqslant 0\}$

(c) $\iiint_V (2y+3z)\ dxdydz, \quad V = \{(x,y,z) \in \mathrm{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 16\}$

(d) $\iiint_V \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\ dxdydz, \quad V = \{(x,y,z) \in \mathrm{R}^3,\ 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0\}$

(e) $\iiint_V (x+y)z\ dxdydz, \quad V = \{(x,y,z) \in \mathrm{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$

**Rozwiązanie przykładu (a):**

Korzystając ze współrzędnych sferycznych oraz z "jedynki trygonometrycznej" wyrażenie $x^2+y^2+z^2$ możemy zapisać w postaci

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (r\cos\varphi\cos\theta)^2 + (r\sin\varphi\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 \\ &= r^2(\cos\theta)^2\left[(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2\right] + r^2(\sin\theta)^2 \\ &= r^2\left[(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\right] = r^2. \end{aligned}$$

Z opisu zbioru $V$ otrzymujemy $3 \leqslant r \leqslant 4$. Ponieważ $z \geqslant 0$, co jest równoważne temu, że $r\sin\theta \geqslant 0$ mamy, że $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$. Ponadto, z warunku $x \geqslant 0$, dostajemy $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Korzystamy ze wzoru podanego w Twierdzeniu 1 i otrzymujemy

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\ dxdydz &= \iiint_\Omega \frac{1}{r^2} \cdot r^2\cos\theta\ drd\varphi d\theta \\ &= \int_3^4 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta\right) d\varphi\right] dr \\ &= \int_3^4 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)|_0^{\frac{\pi}{2}}\ d\varphi\right] dr = \int_3^4 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\tfrac{\pi}{2} - \sin 0\right) d\varphi\right] dr \\ &= \int_3^4 \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\right] dr = \int_3^4 \varphi|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ dr = \int_3^4 \left[\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}\right] dr \\ &= \pi\int_3^4 dr = \pi\ r|_3^4 = \pi. \end{aligned}$$

**Rozwiązanie przykładu (e):**

$$\iiint_V (x+y)z\ dxdydz, \quad V = \{(x,y,z) \in \mathrm{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$$

Zbiór $V$ jest ósemką kuli. Stąd mamy $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ oraz $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Rozważmy funkcję podcałkową. Podstawmy współrzędne sferyczne:

$$(x+y)z = (r\cos\varphi\cos\theta + r\sin\varphi\cos\theta)r\sin\theta = r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\varphi+\cos\varphi).$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\iiint_V (x+y)z\ dxdydz &= \iiint_\Omega r^2\sin\theta\cos\theta(\sin\varphi+\cos\varphi)\cdot r^2\cos\theta\ drd\varphi d\theta \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\sin\theta(\cos\theta)^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi+\cos\varphi)d\varphi\right) d\theta\right] dr \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4\sin\theta(\cos\theta)^2\ (-\cos\varphi+\sin\varphi)|_0^{\frac{\pi}{2}}\ d\theta\right] dr \\
&= 2\int_0^1 r^4 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta(\cos\theta)^2 d\theta\right] dr
\end{aligned}$$

Podstawiając $\cos\theta = t$ mamy

$$\begin{aligned}
\iiint_V zdxdydz &= 2\int_0^1 r^4 \left[\int_0^1 t^2 dt\right] dr = 2\int_0^1 r^4 \left[\tfrac{1}{3}t^3\right]_0^1 dr \\
&= \tfrac{2}{3}\int_0^1 r^4\ dr = \tfrac{2}{3}\left[\tfrac{1}{5}r^5\right]_0^1 = \tfrac{2}{15}\ .
\end{aligned}$$