czyli szukana funkcja wyraża się wzorem

$$F(t, y) = t^3 - 2ty + y^3,$$

a rozwiązanie równania w postaci uwikłanej zapisujemy jako

$$t^3 - 2ty + y^3 = c.$$

2 Równania różniczkowe zwyczajne II rzędu

Równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym rzędu drugiego nazywamy równanie postaci

$$F(t, y, y', y'') = 0 \tag{22}$$

Niektóre z równań rzędu drugiego, w zależności od swojej postaci, można sprowadzić do równań rzędu pierwszego.

2.1 Równanie postaci $F(t, y', y'') = 0$

Równanie to poznajemy po tym, że zmienna zależna y nie występuje w nim w sposób jawny. Rozwiązanie znajdujemy poprzez podstawienie nowej zmiennej:

$$u(t) = y'(t), \tag{23}$$

a następnie po zróżniczkowaniu

$$u'(t) = y''(t). \tag{24}$$

Wstawiając do wyjściowego równania otrzymujemy równanie rzędu pierwszego

$$F(t, u, u') = 0, \tag{25}$$

które rozwiązujemy w zależności od jego postaci.

Przykład
Rozwiązać równanie różniczkowe

$$y'' = 1 + y'^2.$$

Stosując przekształcenia otrzymujemy równanie rzędu pierwszego

$$\frac{du}{dt} = 1 + u^2,$$

w którym można rozdzielić zmienne

$$\frac{du}{1+u^2} = dt,$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \int dt,$$

$$\operatorname{arc\,tg} u = t + c_1,$$

$$u(t) = \operatorname{tg}(t + c_1).$$

Pamiętając, że $u(t) = y'(t)$ otrzymujemy równanie

$$y'(t) = \operatorname{tg}(t + c_1),$$

które po scałkowaniu daje rozwiązanie ogólne

$$y(t) = \ln \left| \frac{c_2}{\cos(t + c_1)} \right|.$$

2.2 Równanie postaci $F(y, y', y'') = 0$

W równaniu tym zmienna niezależna t nie występuje w sposób wyraźny. Podobnie jak wcześniej wprowadzamy za pomocą podstawienia nową zmienną

$$u(y) = y'(t), \tag{26}$$

a następnie obliczmy pochodną:

$$y''(t) = u'(y) = \frac{du}{dy} \cdot y' = \frac{du}{dy} \cdot u(y). \tag{27}$$

Po wstawieniu do równania wyjściowego staje się ono równaniem pierwszego rzędu.

Przykład
Rozwiązać równanie różniczkowe

$$yy'' - y'^2 = 0.$$

Zauważmy, że w naszym równaniu zmienna niezależna nie występuje w sposób jawny. Dzięki przekształceniom obniżamy rząd równania

$$y \cdot u' \cdot u - u^2 = 0$$

dostając równanie rzędu pierwszego o rozdzielonych zmiennych.

$$\frac{1}{u}u' = \frac{1}{y}, \quad \text{dla} \quad u(y) \neq 0.$$

$$\int \frac{1}{u}du = \int \frac{1}{y}dy.$$

$$\ln|u| = \ln|c_1 y|,$$

$$u(y) = c_1 y.$$

Wracając do zależności (26):

$$\frac{dy}{dt} = c_1 y$$

i ponownie rozdzielając zmienne

$$\int \frac{dy}{y} = c_1 dt$$

otrzymujemy rozwiązanie ogólne:

$$y(t) = c_2 e^{c_1 t}.$$

Ponadto sprawdzamy, że dla $c_1 = 0$ dostajemy rozwiązanie szczególne $y' = 0$.

2.3 Równanie różniczkowe liniowe rzędu II o stałych współczynnikach

Równanie postaci

$$ay'' + by' + cy = q(t), \quad a \neq 0 \tag{28}$$

nazywamy równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym rzędu II niejednorodnym o stałych współczynnikach. Podobnie jak w przypadku równań rzędu I, jeżeli $q(t) = 0$, to równanie postaci

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{29}$$

nazywamy równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym rzędu II jednorodnym o stałych współczynnikach. Analogicznie jak w przypadku równań liniowych niejednorodnych rzędu I rozwiązanie zaczynamy od znalezienia całki ogólnej równania jednorodnego (29). Dokonujemy tego za pomocą podstawienia:

$$y(t) = e^{rt}. \tag{30}$$

Rozważając równanie liniowe rzędu II obliczamy pochodne rzędu 2:

$$y' = re^{rt}, \quad y'' = r^2 e^{rt} \tag{31}$$

i po wstawieniu do (29) dostajemy równanie

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0,$$

które staje się równaniem kwadratowym ze względu na r:

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{32}$$

Równanie (32) nazywamy równaniem charakterystycznym równania (29).

Równanie to, w zależności od wartości wyróżnika posiada rozwiązania rzeczywiste bądź zespolone.

- Jeżeli $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, wówczas równanie (32) ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste $r_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $r_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Jeżeli $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, wówczas równanie (32) ma jeden podwójny pierwiastek rzeczywisty $r_1 = r_2 = \dfrac{-b}{2a}$.
- Jeżeli $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, wówczas równanie (32) ma dwa pierwiastki zespolone parami sprzężone $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$,
  gdzie $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$.

Do znalezienia całki ogólnej równania liniowego posłużymy się twierdzeniem wykorzystującym pojęcie układu fundamentalnego: Parę rozwiązań $y_1(t)$, $y_2(t)$ równania jednorodnego (29) nazywamy układem fundamentalnym, jeżeli spełniony jest warunek

$$\det \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} = y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t) \neq 0. \tag{33}$$

Twierdzenie
Jeżeli $y_1(t)$, $y_2(t)$ będzie układem fundamentalnym równania liniowego jednorodnego, to dla każdego rozwiązania $y(t)$ tego równania istnieją stałe c_1 i c_2 takie, że $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$.

Innymi słowy, znając układ fundamentalny równania jednorodnego możemy podać wszystkie jego rozwiązania.
Załóżmy, że równanie (32) ma dwa pierwiastki rzeczywiste r_1 i r_2. podstawiając ponownie pod (30) dostajemy dwie funkcje

$$y_1(t) = e^{r_1t}, \quad y_2(t) = e^{r_2t}, \tag{34}$$

które są całkami szczególnymi równania (29). Jeżeli $\Delta > 0$, to $y_1(t) = e^{r_1t}$, $y_2(t) = e^{r_2t}$, a całka ogólna przyjmuje postać

$$y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \tag{35}$$

Jeżeli $\Delta < 0$, to równanie charakterystyczne ma również 2 różne pierwiastki ale są to liczby zespolone (sprzężone) : $r_1 = \alpha + i\beta$ i $r_2 = \alpha - i\beta$. Można wtedy zapisać :
$e^{r_1t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$ oraz $e^{r_2t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t - i\sin\beta t)$. Zamiast funkcji zespolonych możemy rozpatrywać funkcje rzeczywiste będące ich kombinacjami liniowymi:
$e^{\alpha t}\cos\beta t = \frac{1}{2}(e^{r_1t} + e^{r_2t})$, $e^{\alpha t}\sin\beta t = \frac{1}{2i}(e^{r_1t} - e^{r_2t})$, a całka ogólna wyraża się jako :

$$y(t) = c_1e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2e^{\alpha t}\sin(\beta t)). \tag{36}$$

Oznacza to, że całki szczególne równania liniowego można zapisać w postaci: $y_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ oraz $y_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$.
Jeżeli $\Delta = 0$, to mamy jedną całkę szczególną $y(t) = e^{r_1t}$, ale powstaje pytanie jak znaleźć drugą całkę szczególną. Można to zrobić szukając drugiego rozwiązania postaci $y_2(t) = y_1(t) * u(t)$. Podstawiając do równia liniowego otrzymujemy: $a(y_1''(t)u(t) + 2y_1'(t)u'(t) + y_1(t)u''(t)) + b(y_1'(t)u(t) + y_1(t)u'(t)) + cy_1(t)u(t) = u(t)(ay_1''(t) + by_1'(t) + cy_1(t)) + ay_1(t)u''(t) + 2ay_1'(t)u'(t) + by_1(t)u'(t) = 0$. Podstawiając $y_1 = e^{-\frac{b}{2a}t}$ dostajemy $u''(t) = 0$, co oznacza, że $u(t) = ct + d$. Zatem całka ogólna wyraża się wzorem

$$y(t) = (c_1 + c_2t)e^{r_1t}, \tag{37}$$

a całki szczególne mają postać: $y_1(t) = e^{r_1t}$ i $y_2(t) = te^{r_1t}$.
Przykłady
Rozwiązać równania jednorodne:

- $$y'' + 4y' - 5y = 0.$$

Po podstawieniu otrzymujemy równanie charakterystyczne

$$r^2 + 4r - 5 = 0,$$

dla którego $\Delta > 0$ co oznacza, że mamy dwa różne pierwiastki rzeczywiste $r_1 = 1$ oraz $r_2 = -5$. Całkę ogólną zapiszemy jako

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-5t}.$$

- $$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Równanie charakterystyczne

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

posiada wyróżnik $\Delta = 0$, zatem mamy jeden podwójny pierwiastek rzeczywisty $r_1 = r_2 = -2$. Całkę ogólną zapiszemy w postaci

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-2t}.$$

- $$y'' + 4y' + 5y = 0.$$

Rozwiązując równanie charakterystyczne

$$r^2 + 4r + 5 = 0$$

dostajemy $\Delta = -4$.
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{i^2 \cdot 4} = 2i$. Otrzymujemy dwa pierwiastki zespolone parami sprzężone:

$$r_1 = \frac{-4 - 2i}{2} = -2 - i, \quad r_2 = -2 + i.$$

Całkę ogólną zapiszemy jako

$$y(t) = e^{-2t}(c_1 \cos 1t + c_2 \sin 1t).$$

Załóżmy ponadto, że do ostatniego równania dołączony był warunek początkowy:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -2.$$

wtedy podstawiamy wartości początkowe zarówno do całki ogólnej, jak i jej pochodnej:

$$y'(t) = e^{-2t}[(-2c_1 + c_2)\cos t + (-c_1 - 2c_2)\sin t].$$

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} c_1 &= 0 \\ -2c_1 + c_2 &= -2 \end{cases},$$

który następnie rozwiązujemy

$$\begin{cases} c_1 &= 0 \\ c_2 &= -2 \end{cases}.$$

Całka szczególna dana jest wzorem

$$y(t) = -2e^{-2t}\sin t.$$

Wróćmy teraz do równania liniowego niejednorodnego. W poszukiwaniu rozwiązania ogólnego równania niejednorodnego pomocne jest twierdzenie:
Twierdzenie
Niech $\varphi(t)$ będzie dowolnym rozwiązaniem równania liniowego niejednorodnego (9) oraz niech $y_1(t)$, $y_2(t)$ będzie układem fundamentalnym równania liniowego jednorodnego (10). Wtedy dla każdego rozwiązania $y(t)$ równania niejednorodnego istnieją stałe c_1 i c_2 takie, że $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \varphi(t)$. Innymi słowy, znając dowolne rozwiązanie równania niejednorodnego oraz układ fundamentalny równania jednorodnego (rozwiązanie ogólne) możemy podać wszystkie rozwiązania równania niejednorodnego. Poznamy dwie metody poszukiwania rozwiązań równania niejednorodnego: metodę uzmienniania stałych oraz metodę przewidywań.

W metodzie uzmienniania stałych wykorzystuje się rozwiązanie ogólne równania jednorodnego $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$, w którym uzmiennia się stałe c_1 oraz c_2: $y(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t)$. Ponadto, tak uzmiennione stałe muszą spełniać warunek

$$\begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(t) \end{bmatrix}, \tag{38}$$