Rozdział XV

CAŁKI NIEOZNACZONE. CAŁKOWANIE PRZEZ PODSTAWIENIE I CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI

§ 15.1. UWAGI OGÓLNE O CAŁKOWANIU

Funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w przedziale $a<x<b$ nazywamy każdą taką funkcję $F(x)$, której pochodna $F'(x)$ równa się danej funkcji $f(x)$ dla każdego x z przedziału $a<x<b$. Dwie funkcje mające w danym przedziale tę samą skończoną pochodną mogą się różnić co najwyżej o stałą; np. funkcjami, których pochodne są równe $2x$, mogą być x^2+3, x^2-5 lub ogólnie: x^2+C.

Całką nieoznaczoną (*nieokreśloną*) funkcji $f(x)$, oznaczaną symbolem

(15.1.1) $$\int f(x)\,dx\,,$$

nazywamy wyrażenie $F(x)+C$, gdzie $F(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$, a C jest dowolną stałą.

Jest więc

(15.1.2) $$\int f(x)\,dx=F(x)+C\,,\quad \text{gdzie}\quad F'(x)=f(x)\,.$$

§ 15.2. PODSTAWOWE WZORY RACHUNKU CAŁKOWEGO

Zestawiamy podstawowe wzory rachunku całkowego:

(15.2.1) $$\int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C\,,\quad a\neq -1\,,\ x>0\,.$$

Gdy a jest liczbą naturalną, to zastrzeżenie $x>0$ odpada; gdy a jest liczbą całkowitą ujemną, to zamiast $x>0$ wystarczy założyć $x\neq 0$.

PRZYKŁAD. Podajemy kilka szczególnych przypadków wzoru (15.2.1):

a) $a=0$, wówczas $\int dx=x+C$;

b) $a=-\frac{1}{2}$, wówczas $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C\,,\quad x>0$;

c) $a=-2$, wówczas $\int \frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}+C\,,\quad x\neq 0$.

(15.2.2) $$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad x \neq 0.$$

(15.2.3) $$\int e^x dx = e^x + C.$$

(15.2.4) $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \ a \neq 1.$$

(15.2.5) $$\int \cos x\, dx = \sin x + C.$$

(15.2.6) $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$$

(15.2.7) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \quad \cos x \neq 0.$$

(15.2.8) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \quad \sin x \neq 0.$$

(15.2.9) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C', \quad -1 < x < 1.$$

(15.2.10) $$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C'.$$

(15.2.11) $$\int \sinh x\, dx = \cosh x + C.$$

(15.2.12) $$\int \cosh x\, dx = \sinh x + C.$$

(15.2.13) $$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C.$$

(15.2.14) $$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{ctgh} x + C.$$

(15.2.15) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$$

(15.2.16) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C, \quad |x| > 1.$$

§ 15.3. WŁASNOŚCI CAŁEK NIEOZNACZONYCH

(15.3.1) *Całka sumy równa się sumie całek, tzn.* (jest to tzw. *addytywność*(1) *całki względem funkcji podcałkowej*).

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx.$$

(1) Od łacińskiego wyrazu *additivus*, co oznacza: dodawalny.

(15.3.2) *Stały czynnik wolno wynieść przed znak całki, tzn.*

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx, \quad k \neq 0\,.$$

(15.3.3) *Jeżeli u, v są funkcjami zmiennej x mającymi ciągłą pochodną, to*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.$$

Jest to tzw. *wzór na całkowanie przez części.*

(15.3.4) *Jeżeli dla $a \leqslant x \leqslant b$, $g(x) = u$ jest funkcją mającą ciągłą pochodną oraz $A \leqslant g(x) \leqslant B$, a funkcja $f(u)$ jest ciągła w przedziale $[A, B]$, to*

$$\int f\big(g(x)\big)\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du\,,$$

przy czym po scałkowaniu prawej strony należy w otrzymanym wyniku podstawić $u = g(x)$.

Jest to tzw. *wzór na całkowanie przez zamianę zmiennej* (*przez podstawienie*).