# 1 Szeregi liczbowe i funkcyjne

## 1.1 Szeregi liczbowe

Niech dany będzie ciąg liczbowy $(a_n)$.

**Definicja 1** *Ciąg sum postaci*

$$S_1 = a_1\ ,\ S_2 = a_1 + a_2\ ,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3\ ,\ \ldots S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n\ ,\ \ldots$$

*nazywamy* **ciągiem sum częściowych** *ciągu* $(a_n)$.

W celu skrócenia notacji piszemy

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\ .$$

**Definicja 2** *Niech* $(a_n)$ *będzie ciągiem liczbowym, a* $(S_n)$ *jego ciągiem sum częściowych. Jeśli ciąg* $(S_n)$ *jest zbieżny, to mówimy, że ciąg* $(a_n)$ *jest* **sumowalny**. *W tym przypadku granicę* $\lim_{n\to\infty} S_n$ *oznaczamy symbolem* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Definicja 3** *Niech* $(a_n)$ *będzie ciągiem liczbowym (sumowalnym lub nie). Wyrażenie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nazywamy* **szeregiem liczbowym**. *Jeśli ciąg* $(a_n)$ *jest sumowalny, to szereg liczbowy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nazywamy* **zbieżnym** *a liczbę* $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ *nazywamy* **sumą szeregu** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Jeśli ciąg* $(a_n)$ *nie jest sumowalny, to szereg liczbowy* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *nazywamy* **rozbieżnym**.

**Uwaga** Zazwyczaj bardzo trudno jest obliczyć sumę $S$ z powyższej definicji. Z tego powodu w zdecydowanej większości przypadków ograniczamy się tylko do stwierdzenia czy szereg jest zbieżny.

**Przykład** Niech dany będzie ciąg $(a_n)$ dany wzorem $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Ponieważ

$$a_n = \tfrac{1}{n(n+1)} = \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\ ,$$

więc

$$\begin{aligned}
S_1 &= a_1 = 1 - \tfrac{1}{2} \\
S_2 &= a_1 + a_2 = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) = 1 - \tfrac{1}{3} \\
S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) = 1 - \tfrac{1}{4}
\end{aligned}$$

i ogólnie

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \tfrac{1}{n+1}\ .$$

Ponadto,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \tfrac{1}{n+1}\right) = 1\ .$$

Zatem ciąg $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ jest sumowalny. Szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ jest zbieżny. Sumą tego szeregu jest liczba 1.

**Przykład** Niech dany będzie ciąg $(a_n)$ dany wzorem $a_n = 1$. Mamy więc

$$S_1 = a_1 = 1\ ,\ S_2 = a_1 + a_2 = 2\ ,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3\ ,\ \ldots S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n\ ,\ \ldots$$

a zatem

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty\ .$$

Oznacza to, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ jest rozbieżny.

**Przykład** Niech dany będzie ciąg $(a_n)$ dany wzorem $a_n = (-1)^{n+1}$. Mamy więc

$S_1 = a_1 = 1\ ,\ S_2 = a_1 + a_2 = 1 - 1 = 0\ ,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 - 1 + 1 = 1\ ,\ S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0\ ,\ \ldots$

a zatem $\lim_{n\to\infty} S_n$ nie istnieje ($\lim_{n\to\infty} S_{2n} = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = 1$). Oznacza to, że szereg liczbowy $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ jest rozbieżny.

**Twierdzenie 1** *Jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Twierdzenie powyższe zwane jest **warunkiem koniecznym zbieżności szeregu**. Nie jest to warunek wystarczający. Z faktu, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nie wynika, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Można wykazać, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

jest rozbieżny mimo, że $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nazywamy **szeregiem harmonicznym**. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ nazywamy **szeregiem harmonicznym rzędu** $p$.

**Twierdzenie 2** *Szereg harmonicznym rzędu* $p > 1$ *jest zbieżny. Szereg harmonicznym rzędu* $p \leqslant 1$ *jest rozbieżny.*

**Twierdzenie 3** *Jeśli szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są zbieżne, to*

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *gdzie* $c \in \mathbb{R}$.

Warunek konieczny zbieżności szeregu można zapisać równoważnie (zgodnie z zasadą kontrapozycji znaną z logiki matematycznej):
Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.

Otrzymujemy stąd pierwsze narzędzie do badania zbieżności (w zasadzie rozbieżności) szeregów. Kolejne narzędzia zwane są **kryteriami zbieżności** szeregów liczbowych.

**Twierdzenie 4 (kryterium porównawcze)** *Jeśli wyrazy szeregów* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *spełniają nierówność* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$, *to*

1. *jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to również szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny,*
2. *jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny, to również szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest rozbieżny.*

**Wniosek 1** *Jeśli* $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$ *i* $K \in (0, \infty)$, *gdzie* $K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, *to szeregi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.*

**Twierdzenie 5 (kryterium ilorazowe d'Alemberta)** *Niech* $a_n \geqslant 0$ *i* $g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Wtedy*

1. *jeśli* $g < 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny,*
2. *jeśli* $g > 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

**Twierdzenie 6 (kryterium pierwiastkowe Cauchy'ego)** *Niech* $a_n \geqslant 0$ *i* $g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Wtedy*

1. *jeśli* $g < 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny,*
2. *jeśli* $g > 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

**Uwaga** Na zbieżność (rozbieżność) szeregu nie mają wpływu początkowe wyrazy. W powyższych twierdzeniach i wniosku można zakładać, że nierówności $a_n \geqslant 0$ czy $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ spełnione są od pewnego miejsca, tj. dla $n \geqslant n_0$, gdzie $n_0$ jest pewną liczbą naturalną. W związku z tym można też rozważać szeregi $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ (sumowanie zaczyna się od $n_0$ a nie od 1) posługując się ww. faktami.

**Przykład** Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2-3}$.

Porównamy ten szereg z szeregiem $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. Niech $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n^2-3}$, $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$. Wtedy

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}+1}{n^2-3}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}(\sqrt{n}+1)}{n^2-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^2\left(1-\frac{3}{n^2}\right)} = 1 \ .$$

Zatem oba szeregi zachowują się tak samo. Ponieważ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ jest szeregiem harmonicznym rzędu $p = 3/2$, więc jest zbieżny. Z kryterium porównawczego wynika więc, że szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^2-3}$ też jest zbieżny.

**Przykład** Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+1}$.

Porównamy ten szereg z szeregiem $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Niech $a_n = \frac{2^n+1}{3^n+1}$, $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^n}$. Wtedy

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n+1}{3^n+1}}{\frac{2^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n+1)3^n}{(3^n+1)2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3^n}} = 1 \ .$$

Zatem oba szeregi zachowują się tak samo. Ponieważ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ jest szeregiem geometrycznym o ilorazie $q \in (-1,1)$, więc jest zbieżny. Z kryterium porównawczego wynika więc, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n+1}$ też jest zbieżny.

**Przykład** Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Mamy $a_n = \frac{n!}{n^n}$. W określeniu $a_n$ występuje symbol silni; stosujemy więc kryterium ilorazowe.

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)^n}{n^n}\right)^{-1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = e^{-1} \ .$$

Ponieważ $g < 1$, więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ jest zbieżny.

**Przykład** Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \pi^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$.

Mamy $a_n = \pi^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$. W określeniu $a_n$ występują potęgi, stosujemy więc kryterium pierwiastkowe.

$$g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\pi^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \pi \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \pi \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\pi}{e} \ .$$

Ponieważ $g > 1$, więc szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \pi^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ jest rozbieżny.

W poprzednich twierdzeniach zakładaliśmy, że szeregi miały wyrazy nieujemne. Jeśli nie żądamy tego warunku, to mówimy, że szereg jest **o wyrazach dowolnych**.

**Definicja 4** *Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o wyrazach dowolnych nazywamy* **bezwzględnie zbieżnym**, *jeśli szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *jest zbieżny. Szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *o wyrazach dowolnych nazywamy* **warunkowo zbieżnym**, *jeśli jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.*

**Twierdzenie 7** *Każdy szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny.*

**Definicja 5** *Szereg, którego wyrazy są na przemian dodatnie i ujemne, nazywamy* **szeregiem naprzemiennym**. *Szereg naprzemienny można zapisać w postaci* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, *gdzie* $a_n \geqslant 0$.

**Twierdzenie 8 (kryterium Leibniza)** *Jeśli ciąg* $(a_n)$ *jest malejący i* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *to szereg naprzemiennym* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, $a_n \geqslant 0$ *jest zbieżny.*

**Przykład** Szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ jest zbieżny na mocy kryterium Leibniza. Z drugiej strony, szereg harmoniczny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny, więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$, zwany **szeregiem anharmonicznym**, jest zbieżny warunkowo.