

Całka krzywoliniowa - ćwiczenia

Zadanie 1.

Korzystając z Twierdzenia 1 z wykładu obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną daną równaniem parametrycznym.

- (a) $\int_K y dx + z dy + x dz$, gdzie K jest łamaną $ABCD$, gdzie $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (1, 1, 0)$,
 $D = (1, 1, 1)$,
- (b) $\int_K y(x - y) dx + x dy$, gdzie K jest dana parametryzacją: $x(t) = t$, $y(t) = 2t^2$, gdzie $t \in [0, 1]$,
- (c) $\int_K x dx + y dy + z dz$, gdzie K jest dana parametryzacją: $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = 1 - t$, gdzie
 $t \in [0, 1]$,
- (d) $\int_K xy dx + (y - x) dy + z dz$, gdzie K jest dana parametryzacją: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, gdzie
 $t \in [0, 2\pi]$
- (e) $\int_K -zy dx + xz dy + xy dz$, gdzie K jest dana parametryzacją: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z = t$ gdzie
 $t \in [0, 2\pi]$

Rozwiązanie przykładu (a):

Piszemy równania parametryczne kolejnych odcinków łamanej (korzystamy ze wzoru na parametryzację odcinka w przestrzeni):

$$\text{AB: } \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0, \text{ gdzie } t \in [0, 1], \end{cases} \quad \text{BC: } \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \\ z(t) = 0, \text{ gdzie } t \in [0, 1], \end{cases} \quad \text{CD: } \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = 1 \\ z(t) = t, \text{ gdzie } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Obliczamy poszczególne całki krzywoliniowe skierowane wzdłuż każdego z łuków.

Dla parametryzacji łuku AB mamy $x'(t) = 1$, $y'(t) = 0$, $z'(t) = 0$. Podstawiając do wzoru z Twierdzenia 1, mamy

$$\int_{AB} y dx + z dy + x dz = \int_0^1 (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + t \cdot 0) dt = 0.$$

Dla parametryzacji łuku BC mamy $x'(t) = 0$, $y'(t) = 1$, $z'(t) = 0$, wtedy

$$\int_{BC} y dx + z dy + x dz = \int_0^1 (t \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) dt = 0.$$

Analogicznie, dla parametryzacji łuku CD mamy $x'(t) = 0$, $y'(t) = 0$, $z'(t) = 1$. Otrzymujemy

$$\int_{CD} y dx + z dy + x dz = \int_0^1 (1 \cdot 0 + t \cdot 0 + 1 \cdot 1) dt = \int_0^1 1 dt = t|_0^1 = 1.$$

Ostatecznie, szukana całka jest sumą wszystkich całek, zatem

$$\int_K y dx + z dy + x dz = 0 + 0 + 1 = 1.$$

Zadanie 2.

Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną daną równaniem funkcyjnym.

Jeżeli równanie krzywej K jest dane równaniem $y = y(x)$ dla $x \in [a, b]$, to

$$\int_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)] dx.$$

- (a) $\int_K xy dx - x^2 dy$, gdzie K jest łukiem hiperboli $y = \frac{1}{x}$ dla $x \in [1, 4]$,
(b) $\int_K \frac{y}{x} dx + \frac{x}{y} dy$, gdzie K jest łukiem paraboli $y = x^2$ dla $x \in [-1, 1]$,
(c) $\int_K 2xy dx + x^2 dy$, gdzie K jest łukiem paraboli $y = x^2$ dla $x \in [0, 1]$.

Rozwiązanie przykładu (c):

Liczymy pochodną $y'(x) = 2x$. Korzystając ze wzoru mamy:

$$\begin{aligned} \int_K 2xy dx + x^2 dy &= \int_0^1 (2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x) dx \\ &= \int_0^1 4x^3 dx = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}x^4\right)_0^1 = 1. \end{aligned}$$

Zadanie 3.

Korzystając z Twierdzenia 2 z wykładu obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną daną równaniem parametrycznym.

- (a) $\int_K (x^2 + y^2) dl$, gdzie K jest odcinkiem AB , gdzie $A = (2, 1)$, $B = (3, 2)$
(b) $\int_K (x + y) dl$, gdzie K jest obwodem trójkąta o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$ i $C = (1, 0)$
(c) $\int_K \frac{xz}{1+2y} dl$, gdzie K jest dana parametryzacją $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = \frac{2}{3}t^3$, gdzie $t \in [0, 1]$,
(d) $\int_K (x^2 + y^2 + z^2) dl$, gdzie K jest dana parametryzacją $x(t) = 4 \sin t$, $y(t) = 4 \cos t$, $z(t) = 3t$,
gdzie $t \in [0, 2\pi]$,
(e) $\int_K xy dl$, gdzie K jest dana parametryzacją $x(t) = 2 \cos t$, $y(t) = 2 \sin t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$.

Rozwiązanie przykładu (a):

Piszemy równania parametryczne odcinka AB (korzystamy ze wzoru na parametryzację odcinka na płaszczyźnie):

$$AB : \begin{cases} x(t) = 2 + t \\ y(t) = 1 + t, \text{ gdzie } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Dla parametryzacji odcinka AB obliczamy pochodne $x'(t) = 1$, $y'(t) = 1$. Podstawiając do wzoru z Twierdzenia 2, mamy

$$\begin{aligned} \int_K (x^2 + y^2) dl &= \int_0^1 ((2+t)^2 + (1+t)^2) \sqrt{1^2 + 1^2} dt = \sqrt{2} \int_0^1 (2t^2 + 6t + 5) dt \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{2}{3}t^3 + 3t^2 + 5t \right) \Big|_0^1 = \sqrt{2} \left(\frac{2}{3} + 3 + 5 \right) = \frac{26}{3} \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie przykładu (d):

Dla parametryzacji krzywej K obliczamy pochodne $x'(t) = 4 \cos t$, $y'(t) = -4 \sin t$, $z'(t) = 3$. Podstawiając do wzoru z Twierdzenia 2 oraz korzystając z "jedynek trygonometrycznej", mamy

$$\begin{aligned} \int_K (x^2 + y^2 + z^2) dl &= \int_0^1 \left((4 \sin t)^2 + (4 \cos t)^2 + (3t)^2 \right) \sqrt{(4 \cos t)^2 + (-4 \sin t)^2 + 3^2} dt \\ &= \int_0^1 (16 + 9t^2) \sqrt{16 + 9} dt = 5 \int_0^1 (16 + 9t^2) dt \\ &= 5(16t + 3t^3) \Big|_0^1 = 95 \end{aligned}$$

Zadanie 4.

Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną daną równaniem funkcyjnym.

Jeżeli równanie krzywej K jest dane równaniem $y = y(x)$ dla $x \in [a, b]$, to

$$\int_K f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx.$$

(a) $\int_K \frac{1}{x-y} dl$, gdzie K jest odcinkiem prostej $y = \frac{1}{2}x - 2$ dla $x \in [0, 4]$,

(b) $\int_K y dl$, gdzie K jest krzywą $y = 2\sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$,

(c) $\int_K \frac{x}{y^4} dl$, gdzie K jest krzywą $y = \frac{1}{x}$, $x \in [1, 2]$,

(d) $\int_K y^2 \sqrt{1+x} dl$, gdzie K jest krzywą $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0, 3]$.

Rozwiązanie przykładu (a):

Liczymy pochodną $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$. Korzystając ze wzoru mamy:

$$\begin{aligned} \int_K \frac{1}{x-y} dl &= \int_0^4 \frac{1}{x - (\frac{1}{2}x - 2)} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \int_0^4 \frac{1}{\frac{1}{2}x + 2} dx = \sqrt{5} \left[\ln \left| \frac{1}{2}x + 2 \right| \right]_0^4 = \sqrt{5} \ln 2. \end{aligned}$$