Równania różniczkowe zwyczajne

Równaniem różniczkowym zwyczajnym nazywamy równanie, w którym występuje zmienna niezależna t (lub x), nieznana funkcja y, oraz jej pochodne $y', y'', ..., y^{(n)}$. Rozwiązaniem równania różniczkowego jest funkcja lub zbiór funkcji.

Rzędem równania różniczkowego nazywamy największy rząd pochodnej występującej w równaniu.

Równania różniczkowe możemy podzielić na:

- Równania różniczkowe zwyczajne - których rozwiązaniem są funkcje jednej zmiennej.
- Równania różniczkowe cząstkowe - których rozwiązaniem są funkcje wielu zmiennych.

Kolejnego podziału równań różniczkowych można dokonać ze względu na rząd równania, np. równanie rzędu pierwszego, drugiego, itp lub postać funkcji i jej pochodnych, np. równanie liniowe, nieliniowe.

- $\frac{d^2y}{dt^2} - y = t^3$ Równanie różniczkowe zwyczajne 2 rzędu liniowe
- $\frac{d^2y}{dt^2} - y^3 = t^3$ Równanie różniczkowe zwyczajne 2 rzędu nieliniowe
- $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}y^3 = e^t$ Równanie różniczkowe zwyczajne 2 rzędu nieliniowe
- $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ Równanie różniczkowe cząstkowe 1 rzędu liniowe

1 Równania różniczkowe zwyczajne I rzędu

Równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego nazywamy równanie postaci

$$F(t, y, y') = 0. \tag{1}$$

Jeżeli pewna funkcja $y(t)$ jest różniczkowalna w przedziale (a, b) oraz spełnia w nim równanie (1) to mówmy, że jest ona rozwiązaniem ogólnym lub całką ogólną równania (1).

Jeżeli do równania (1) dołączymy warunek początkowy na poszukiwaną funkcję:

$$F(t, y, y') = 0, \quad y(t_0) = y_0, \tag{2}$$

to takie zagadnienie nazywamy zagadnieniem początkowym lub zagadnieniem Cauchy'ego. Rozwiązanie zagadnienia początkowego nazywamy rozwiązaniem szczególnym lub całką szczególną.

Twierdzenie 1. *Jeżeli funkcja $F(t, y)$ oraz jej pochodna cząstkowa $\frac{\partial F}{\partial y}(t, y)$ są ciągłe na pewnym podzbiorze $D \subset \mathbb{R}^2$ oraz $(t_0, y_0) \in D$ to zagadnienie początkowe 2 ma dokładnie jedno rozwiązanie.*

Innymi słowy, jeżeli istnieje rozwiązanie zagadnienia początkowego to jest ono jedyne (przez każdy punkt zbioru D przechodzi dokładnie jedna krzywa całkowa $y(t)$). Poznamy różne typy równań różniczkowych zwyczajnych, gdzie najczęściej istnieje specjalne postępowanie przyporządkowane do danego typu równania. Oznacza to, że rozpoznanie typu równania jest kluczowe dla jego rozwiązania.

1.1 Równanie różniczkowe o rozdzielonych zmiennych

Równanie różniczkowe postaci

$$g(y)y' = h(t) \tag{3}$$

nazywamy równaniem różniczkowym o rozdzielonych zmiennych, gdzie funkcje f i g są ciągłe na pewnym przedziale (całkowalność).

Równanie (3) możemy zapisać w postaci

$$g(y)\frac{dy}{dt} = h(t).$$

Następnie mnożąc obustronnie przez dt rozdzielamy zmienne i otrzymujemy

$$g(y)dy = h(t)dt.$$

Całkując obustronnie powyższe równanie otrzymujemy rozwiązanie.

Umowa Stałą całkowania c zapisujemy tylko po stronie zmiennej niezależnej t.

Przykład W pewnym ruchu stosunek przebytej drogi do prędkości jest wielkością stałą równą 4. W chwili, gdy rozpoczęto odliczanie czasu (tj. $t = 0$ s.) przebyta droga wynosiła $x = 0.2$ m. Obliczyć przebytą drogę do czasu $t = 3$ s. Oznaczmy prędkość przez v. Możemy zapisać

$$\frac{x}{v} = 4,$$

$$\frac{x}{4} = v \text{ ale wiemy, że } v = \frac{dx}{dt}, \text{ zatem } \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}x.$$

Otrzymaliśmy równanie o rozdzielonych zmiennych, które rozwiązujemy:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{4},$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{4},$$

$$\ln x = 1/4t + \ln|c|, \;\; c \neq 0.$$

Droga wyraża się więc wzorem

$$x(t) = ce^{1/4t}.$$

Wykorzystamy teraz warunek początkowy

$$x(t=0) = x(0) = 0.2\text{m},$$

$$x(0) = 0.2 \Rightarrow e^0 c = 0.2 \Rightarrow c = 0.2,$$

a więc

$$x(t) = 0.2e^{1/4t}.$$

Szukaną drogę do chwili czasu $t = 3$ można teraz łatwo wyznaczyć:

$$x(3) = 0.2e^{3/4}\text{m}.$$

Przykład Filiżanka gorącej kawy o temperaturze 95C ostygła do 75C w czasie 5 minut w pokoju o temperaturze 20C. Zakładając, że zachodzi prawo

stygnięcia Newtona, wyznaczyć czas po którym kawa osiągnie temperaturę 50C.
Prawo stygnięcia Newtona: Szybkość z jaką układ stygnie jest proporcjonalna do różnicy temperatur pomiędzy układem a otoczeniem.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - M).$$

$$\frac{dT}{dt} - \text{Zmiana temperatury/szybkość stygnięcia.}$$

$$T - \text{temperatura ciała.}$$

$$M - \text{temperatura otoczenia.}$$

$$k - \text{stała dla danego układu.}$$

Podstawiam dane i rozdzielamy zmienne otrzymując po scałkowaniu rozwiązanie ogólne:

$$T(t) = 20 + ce^{-kt}$$

Wyznaczmy rozwiązanie szczególne wykorzystując warunek: $T(t = 0) = 95$:

$$T(t = 0) = 95 = 20 + c,$$

$$T(t) = 20 + 75e^{-kt}.$$

Następnie znajdujemy stałą k wykorzystując kolejny warunek $T(t = 5) = 75$:

$$T(t = 5) = 75 = 20 + 75e^{-5k},\ 11/15 = e^{-5k},\ k = -\ln 11/15/5,\ k = 0.062.$$

Zatem rozwiązanie szczególne ma postać:

$$T(t) = 20 + 75e^{-0.062t}.$$

Teraz znajdźmy czas po którym kawa osiągnie temperaturę 50C:

$$50 = 20 + 75e^{-0.062t},\ 2/5 = e^{-0.062t}, \text{skąd} t = -1000 \ln 2/5 \cdot 62 = 14.7789.$$

Oznacza to, że kawa osiągnie żądaną temperaturę po około 15 minutach.
Niektóre równania rzędu pierwszego da się sprowadzić do równania o rozdzielonych zmiennych.

1.2 Równanie różniczkowe jednorodne $y' = f(\frac{y}{t})$

Równanie postaci

$$y' = f(\frac{y}{t}) \tag{4}$$

nazywamy równaniem różniczkowym jednorodnym. Równanie to można sprowadzić do równania o rozdzielonych zmiennych za pomocą podstawienia:

$$u(t) = \frac{y(t)}{t}, \tag{5}$$

z którego można wyznaczyć

$$y = u \cdot t. \tag{6}$$

Po zróżniczkowaniu stronami równania (6)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} \cdot t + u, \tag{7}$$

i wstawieniu do (4) otrzymujemy równanie o rozdzielnych zmiennych.

Przykład Rozwiązać zagadnienie początkowe:

$$t\frac{dy}{dt} = t + y, \quad y(1) = 1.$$

Najpierw znajdujemy rozwiązanie ogólne przekształcając nasze równanie do postaci (4). W tym celu dzielimy obustronnie przez t:

$$\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{y}{t}.$$

Następnie dokonujemy przekształceń i po podstawieniu otrzymujemy równanie, którego rozwiązanie stanowi funkcja $u(t)$:

$$\frac{du}{dt} \cdot t = 1.$$

Po rozdzieleniu zmiennych

$$du = \frac{1}{t}dt$$

i scałkowaniu

$$\int du = \int \frac{1}{t}dt,$$

dostajemy rozwiązanie ogólne:

$$u = \ln|t| + c.$$

Wracając do podstawienia (5):

$$\frac{y}{t} = \ln|t| + c,$$

a stąd

$$y = t\ln|t| + ct.$$

Uwzględniając warunek początkowy $y(1) = 1$ dostajemy rozwiązanie szczególne

$$y = t\ln|t| + t.$$

1.3 Równanie różniczkowe postaci $y' = f(at + by + c)$

Również w tym przypadku stosujemy podstawienie

$$u(t) = at + by + c, \tag{8}$$

z którego po scałkowaniu wyznaczamy $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{du}{dt} = a + b\frac{dy}{dt}, \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{b} \cdot \frac{du}{dt} - \frac{a}{b}, \tag{10}$$

a następnie podstawiając otrzymujemy równanie o rozdzielonych zmiennych.

Przykład

Rozwiązać równanie różniczkowe:

$$\frac{dy}{dt} = (2t + y - 3)^2 - 4t - 2y + 5$$

Zapiszemy równanie w innej postaci:

$$\frac{dy}{dt} = (2t + y - 3)^2 - 2(2t + y - 3) - 1.$$

Stosujemy przekształcenia (8-10):

$$u(t) = 2t + y(t) - 3,$$

$$\frac{du}{dt} = 2 + \frac{dy}{dt}.$$

Wstawiając otrzymujemy równanie o rozdzielonych zmiennych:

$$\frac{du}{dt} - 2 = u^2 - 2u - 1,$$

$$\frac{du}{dt} = (u-1)^2.$$

Zakładając $u - 1 \neq 0$ (co pociąga za sobą $y \neq -2t + 4$) rozdzielamy zmienne:

$$\frac{du}{(u-1)^2} = dt,$$

a następnie całkujemy stronami:

$$\int \frac{du}{(u-1)^2} = \int dt,$$

$$-\frac{1}{u-1} = t + c,$$

skąd

$$u - 1 = -\frac{1}{t+c}.$$

Wracając do podstawienia, rozwiązanie ogólne możemy zapisać w postaci:

$$2t + y - 3 - 1 = -\frac{1}{t+c},$$

$$y = -2t + 4 - \frac{1}{t+c}.$$

Pozostaje jeszcze sprawdzenie, czy funkcja $y(t) = -2t + 4$ jest rozwiązaniem naszego równania. W tym celu podstawiamy do obydwu stron:

$$\frac{dy}{dt} = -2 = (2t - 2t + 4 - 3)^2 - 4t - 2(-2t + 4) + 5 = 1 - 4t + 4t - 8 + 5 = -2.$$

Zatem funkcja $y(t) = -2t + 4$ jest rozwiązaniem szczególnym.

1.4 Równanie różniczkowe liniowe I rzędu

Równanie postaci

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t) \tag{11}$$

nazywamy równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym, natomiast równanie

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0 \tag{12}$$

nazywamy równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym. Zakłada się, że funkcje $p(t)$ i $q(t)$ są ciągłe w pewnym przedziale.

Uwaga Równanie linowe jednorodne jest szczególnym przypadkiem równania o rozdzielonych zmiennych, którego rozwiązaniem szczególnym jest funkcja $y(t) = 0$.

Jedną z metod rozwiązania równania liniowego niejednorodnego jest metoda uzmienniania stałej, która zostanie zaprezentowana na przykładzie.

Przykład

Rozwiązać równanie liniowe niejednorodne

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = 2.$$

Jest to równanie liniowe niejednorodne, gdzie $p(t) = \frac{1}{t}$, $q(t) = 2$. Zaczynamy od rozwiązania równania jednorodnego

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = 0.$$

W tym celu rozdzielamy zmienne:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dt}{t},$$

i całkujemy

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dt}{t},$$

$$\ln|y| = -\ln|t| + \ln|c|, \quad \text{dla} \quad c \neq 0.$$

Wykorzystując własności logarytmów rozwiązanie ogólne równania jednorodnego możemy zapisać w postaci

$$y = \frac{c}{t}, \quad \text{dla} \quad c \in R.$$

W znalezionym rozwiązaniu dokonujemy **uzmiennienia** stałej c zastępując ją funkcją zmiennej t, np.

$$y(t) = \frac{c(t)}{t}.$$

Tak przedstawione rozwiązanie powinno spełniać równanie wyjściowe co można sprawdzić podstawiając je do obydwu stron równania. Wcześniej obliczamy pochodną:

$$\frac{dy}{dt} = (y(t))' = \left(\frac{c(t)}{t}\right)' = \frac{1}{t}\frac{dc}{dt} - \frac{c}{t^2}$$

i otrzymujemy

$$\frac{1}{t}\frac{dc}{dt} - \frac{c}{t^2} + \frac{c}{t^2} = 2,$$

$$\frac{1}{t}\frac{dc}{dt} = 2.$$

Pozostaje rozdzielić zmienne

$$dc = 2tdt$$

i następnie scałkować

$$\int dc = \int 2tdt,$$

$$c(t) = t^2 + c.$$

Rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego dostaniemy po ponownym podstawieniu powyższego do rozwiązania równania jednorodnego:

$$y(t) = \frac{t^2 + c}{t} = t + \frac{c}{t}.$$

Uwaga Rozwiązując równanie liniowe niejednorodne za pomocą metody uzmienniania stałej człon zawierający funkcję $c(t)$ redukuje się bez względu na postać równania.

Spróbujmy dowieść powyższe stwierdzenie. Będziemy szukać rozwiązania równania niejednorodnego (11), zaczynając od rozwiązania równania jednorodnego (12):

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t),$$

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0,$$

$$\frac{dy}{y} = -p(t)dt,$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(t)dt,$$

$$\ln|y| = -\int p(t)dt + \ln|c|,$$

$$y = ce^{-\int p(t)dt}.$$

W uzyskanym rozwiązaniu dokonujemy uzmiennienia stałej c:

$$y = c(t)e^{-\int p(t)dt}$$

i po zróżniczkowaniu stronami:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dc}{dt}e^{-\int p(t)dt} + c(t)e^{-\int p(t)dt}(-\int p(t)dt)' = \frac{dc}{dt}e^{-\int p(t)dt} - p(t)c(t)e^{-\int p(t)dt},$$

wstawiamy do wyjściowego równania:

$$\frac{dc}{dt}e^{-\int p(t)dt} - p(t)c(t)e^{-\int p(t)dt} + p(t)c(t)e^{-\int p(t)dt} = q(t).$$

Jak widzimy wyrażenie zawierające funkcję $c(t)$ redukuje się i otrzymujemy równanie o rozdzielonych zmiennych:

$$\frac{dc}{dt}e^{-\int p(t)dt} = q(t),$$

$$dc = q(t)e^{\int p(t)dt},$$

$$c(t) = \int q(t)e^{\int p(t)dt}dt + c.$$

Zatem ogólne rozwiązanie można otrzymać jako

$$y = e^{-\int p(t)dt} \cdot \left(\int q(t)e^{\int p(t)dt}dt + c \right).$$

1.5 Równanie różniczkowe Bernoulliego

Równanie różniczkowe postaci

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)y^{\alpha} \tag{13}$$

nazywamy równaniem różniczkowym Bernoulliego.
Zauważmy, że dla $\alpha = 0$ otrzymujemy równanie liniowe niejednorodne, zaś dla $\alpha = 1$ - równanie liniowe jednorodne. Załóżmy dalej, że $\alpha \in R \setminus \{0, 1\}$.
Rozwiązanie równania (13) umożliwi podstawienie

$$z(t) = y^{1-\alpha}(t). \tag{14}$$

Zróżniczkujmy powyższą zależność stronami

$$\frac{dz}{dt} = (1-\alpha)y^{-\alpha}\frac{dy}{dt}.$$

Podstawiając

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^{\alpha}}{1-\alpha}\frac{dz}{dt} \quad \text{do (13) otrzymujemy :}$$

$$\frac{y^{\alpha}}{1-\alpha}\frac{dz}{dt} = p(t)y = q(t)y^{\alpha}, \qquad /y^{\alpha}$$

$$\frac{1}{1-\alpha}\frac{dz}{dt} + p(t)y^{1-\alpha} = q(t),$$

$$\frac{dz}{dt} = (1-\alpha)p(t)y^{1-\alpha} = q(t)(1-\alpha).$$

Wykorzystując (14) pozbywamy się zmiennej y i otrzymujemy równanie liniowe niejednorodne

$$\frac{dz}{dt} = (1-\alpha)p(t)z = q(t)(1-\alpha).$$

Przykład
Rozwiązać równanie

$$3y' - y = \frac{t}{y^2}.$$

Zauważmy, że jest to równanie Bernoulliego dla $\alpha = -2$. Najpierw zapiszemy nasze równanie w innej postaci:

$$3\frac{dy}{dt} - y = \frac{t}{y^2} \qquad /y^2,$$

$$3y^2\frac{dy}{dt} - y^3 = t.$$

Stosujemy podstawienie:

$$z = y^{1-(-2)} = y^3,$$

$$\frac{dz}{dt} = 3y^2\frac{dy}{dt}.$$

Wstawiamy do przekształconego równania pamiętając, że $y^3 = z$:

$$\frac{dz}{dt} - z = t.$$

Otrzymaliśmy równianie liniowe niejednorodne.

$$\frac{dz}{dt} - z = 0,$$

$$\frac{dz}{z} = dt,$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int dt,$$

$$\ln|z| = t + \ln|c|, \quad \text{skąd} \quad z = ce^t.$$

Uzmienniamy stałą c:

$$z(t) = c(t)e^t \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{dc}{dt}e^t + ce^t.$$

Wstawiamy do równania niejednorodnego::

$$\frac{dc}{dt}e^t + ce^t - ce^t = t \Rightarrow \frac{dc}{dt}e^t = t.$$

Rozdzielamy zmienne:

$$dc = te^{-t}dt.$$

$$\int dc = \int te^{-t}dt.$$

$$c(t) = -te^{-t} - e^{-t} + c.$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$z(t) = (-te^{-t} - e^{-t} + c)e^t = -t - 1 + ce^t.$$

Wracamy do zmiennej y za pomocą podstawienia $z = y^3$ i dostajemy całkę ogólną:

$$y^3(t) = -t - 1 + ce^t.$$

1.6 Równanie różniczkowe zupełne

Rozpatrzmy równanie różniczkowe postaci

$$P(t,y)dt + Q(t,y)dy = 0 \ \text{ lub } \ \frac{dy}{dt} = -\frac{P(t,y)}{Q(t,y)}, \quad Q(t_0,y_0) \neq 0. \tag{15}$$

Jeżeli wyrażenie

$$P(t,y)dt + Q(t,y)dy \tag{16}$$

jest różniczką zupełną pewnej funkcji dwóch zmiennych $F(t,y)$, to równanie (15) nazywamy równaniem różniczkowym zupełnym. Skoro istnieje różniczka zupełna pewnej funkcji $F(t,y)$ to musi zachodzić

$$\frac{\partial F}{\partial t} = P(t,y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(t,y). \tag{17}$$

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to by wyrażenie (16) było różniczką zupełną pewnej funkcji $F(t,y)$ jest spełnienie równości

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{18}$$

Jeżeli warunek (18) jest spełniony to rozwiązanie równania zupełnego dane jest za pomocą funkcji uwikłanej

$$F(t,y) = c, \qquad \text{gdzie } c \text{ jest dowolną stałą.} \tag{19}$$

Przypomnienie

Niech $D \subset R^2$ będzie pewnym obszarem, $f : D \to R$ oraz $f(x,y) = 0$. Każdą funkcję $y(x)$, której wykres leży w obszarze D i dla której

$$f(x,y(x)) = 0, \ \text{dla } x \in D_y \tag{20}$$

nazywamy funkcją uwikłaną jednej zmiennej. Różniczkując równanie (20) otrzymamy

$$f'_x(x,y(x)) \cdot x' + f'_y(x,y(x)) \cdot y' = 0,$$

skąd

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \tag{21}$$

Na przykład $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$. Wtedy $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4$ oraz $y' = -\frac{2x-2}{2y+4}$ dla $y \neq -2$.

Przykład

Rozwiązać równanie

$$3t^2 - 2y + (3y^2 - 2t)\frac{dy}{dt} = 0.$$

Zaczynamy od przekształcenia równania do postaci (15):

$$(3t^2 - 2y)dt + (3y^2 - 2t)dy = 0,$$

gdzie

$$P(t,y) = 3t^2 - 2y, \qquad Q(t,y) = 3y^2 - 2t.$$

Ponieważ

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2 = \frac{\partial Q}{\partial t},$$

więc mamy do czynienia z równaniem zupełnym. Wykorzystamy teraz jeden z warunków (17) na przykład pierwszy:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = P(t,y) = 3t^2 - 2y.$$

Po scałkowaniu stronami otrzymujemy

$$F(t,y) = \int (3t^2 - 2y)dt = t^3 - 2ty + c(y).$$

Zwróćmy uwagę na stałą całkowania, którą możemy zapisać w tej postaci ponieważ nie zależy od zmiennej t. Kolejnym krokiem rozwiązania jest właśnie znalezienie funkcji $c(y)$. W tym celu zróżniczkujmy stronami $F(t,y)$ po zmiennej y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2t + c'(t).$$

Jest to lewa strona drugiego warunku (17) zatem możemy zapisać

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -2t + c'(y) = Q(t,y) = 3y^2 - 2t,$$

$$c'(y) = 3y^2, \quad \text{a stąd}$$

$$c(y) = \int 3y^2 dt = y^3,$$

czyli szukana funkcja wyraża się wzorem

$$F(t, y) = t^3 - 2ty + y^3,$$

a rozwiązanie równania w postaci uwikłanej zapisujemy jako

$$t^3 - 2ty + y^3 = c.$$

2 Równania różniczkowe zwyczajne II rzędu

Równaniem różniczkowym zwyczajnym liniowym rzędu drugiego nazywamy równanie postaci

$$F(t, y, y', y'') = 0 \tag{22}$$

Niektóre z równań rzędu drugiego, w zależności od swojej postaci, można sprowadzić do równań rzędu pierwszego.

2.1 Równanie postaci $F(t, y', y'') = 0$

Równanie to poznajemy po tym, że zmienna zależna y nie występuje w nim w sposób jawny. Rozwiązanie znajdujemy poprzez podstawienie nowej zmiennej:

$$u(t) = y'(t), \tag{23}$$

a następnie po zróżniczkowaniu

$$u'(t) = y''(t). \tag{24}$$

Wstawiając do wyjściowego równania otrzymujemy równanie rzędu pierwszego

$$F(t, u, u') = 0, \tag{25}$$

które rozwiązujemy w zależności od jego postaci.

Przykład
Rozwiązać równanie różniczkowe

$$y'' = 1 + y'^2.$$