Płaszczyzny i proste w $\mathbb{R}^3$ - ćwiczenia CD

Zadanie 1. Znaleźć miejsce geometryczne punktów, których odległości od punktów $A = (2, 1, 4)$ i $B = (-4, 3, 2)$ są równe.

Poszukiwane punkty P o zadanej własności mają współrzędne (x, y, z), które traktujemy jako niewiadome. Zachodzi warunek $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$. Ponieważ $\overrightarrow{AP} = [x-2, y-1, z-4]$ i $\overrightarrow{BP} = [x+4, y-3, z-2]$, więc

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2} = \sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2}$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = (x+4)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 8z + 16 = x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 + z^2 - 4z + 4$$

$$-12x + 4y - 4z - 8 = 0 \ ,$$

więc ostatecznie otrzymujemy

$$3x - y + z + 2 = 0 \ .$$

Punkty, których odległości od punktów $A = (2, 1, 4)$ i $B = (-4, 3, 2)$ są równe, tworzą zatem płaszczyznę o równaniu $3x - y + z + 2 = 0$.

Zadanie 2. Na osi Oy znaleźć punkt równo oddalony od płaszczyzny $\alpha : 3x + 6y - 2z - 9 = 0$ i od punktu $N(1, 0, -2)$.

Równanie osi Oy jest postaci $x = 0, y = t, z = 0, t \in \mathbb{R}$, więc punkt P należący do tej prostej ma wspórzędne $P(0, t, 0)$. Korzystając ze wzoru na odległość punktu od płaszczyzny i faktu, że $\overrightarrow{PN} = [1, -t, -2]$, warunek $d(P, \alpha) = |\overrightarrow{PN}|$ można zapisać w postaci

$$\frac{|3 \cdot 0 + 6 \cdot t - 2 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2}} = \sqrt{1^2 + (-t)^2 + (-2)^2}$$

i stąd

$$\frac{|6t - 9|}{7} = \sqrt{t^2 + 5}$$

$$|6t - 9|^2 = 49(t^2 + 5)$$

$$13t^2 + 108t + 164 = 0 \ ,$$

skąd otrzymujemy dwa rozwiązania $t = 2$ lub $t = -\frac{82}{13}$. Zatem na osi Oy istnieją dwa punkty równo oddalone od płaszczyzny α i od punktu N; są to $P_1(0, 2, 0)$ oraz $P_2(0, -\frac{82}{13}, 0)$.

Zadanie 3. Przez prostą $l : \begin{cases} 6x - y + z = 0 \\ 5x + 3z - 10 = 0 \end{cases}$ poprowadzić płaszczyznę π równoległą do osi Ox.

Zapiszmy równanie parametryczne prostej l. W tym celu należy rozwiązać układ równań definiujący prostą l traktując jedną ze zmiennych, np. z jako parametr. Mamy więc $z = t$ i

$$\begin{cases} 6x - y = -t \\ 5x = -3t + 10 \ , \end{cases}$$

skąd $x = \frac{1}{5}(-3t + 10)$, a po wstawieniu tego wyrażenia do pierwszego z równań otrzymujemy $y = -\frac{13}{5}t + 12$. Zatem równanie parametryczne prostej l jest postaci

$$x = -\tfrac{3}{5}t + 2 \ , \ y = -\tfrac{13}{5}t + 12 \ , \ z = t \ , \ t \in \mathbb{R} \ .$$

Ponieważ szukana płaszczyzna ma być równoległa do osi Ox oraz do l (bo jeśli l jest zawarta w płaszczyźnie, to jest do niej równoległa), to wektory kierunkowe tych prostych rozpinają płaszczyznę. Tymi wektorami są wersor $\overrightarrow{i}$ osi Ox oraz wektor $\overrightarrow{u} = [-\frac{3}{5}, -\frac{13}{5}, 1]$ lub dowolny inny równoległy do niego. Wektorem równoległym do $\overrightarrow{u}$ jest np. wektor $5\overrightarrow{u} = [-3, -13, 5]$ (wygodniej jest brać ten wektor ze względu na całkowite współrzędne). Wystarczy napisać równanie parametryczne płaszczyzny rozpiętej na tych dwóch wektorach i przechodzącej przez dowolnie wybrany punkt prostej l; niech to będzie np. punkt odpowiadający $t = 0$, czyli $P(2, 12, 0)$. Stąd

$$\pi : \begin{cases} x &= 2 + s - 3t \\ y &= 12 - 13t \\ z &= 5t \end{cases} \text{, gdzie } t, s \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 4. Napisać równanie prostej k przechodzącej przez punkt $A(1, -3, 2)$ i przez punkt B przecięcia prostych

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3} \quad \text{oraz} \quad l_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{y+11}{2} = \frac{z+1}{1}\ .$$

Proste l_1 i l_2 można zapisać w postaci parametrycznej

$$l_1 : x = 2t + 1\ ,\ y = -t - 2\ ,\ z = 3t\ ,\ t \in \mathbb{R} \quad \text{oraz} \quad l_2 : x = s - 1\ ,\ y = 2s - 11\ ,\ z = s - 1\ ,\ s \in \mathbb{R}\ .$$

Zwróćmy uwagę na różne parametry w obu równaniach; tak być musi bo parametry są niezależne od siebie, co wykorzystamy za moment. Punkt B jest punktem przecięcia prostych l_1 i l_2 jeśli istnieją takie t i s, że wartości odpowiadające współrzędnym x, y, z są równe. Zachodzi zatem układ równań

$$\begin{cases} 2t + 1 &= s - 1 \\ -t - 2 &= 2s - 11 \\ 3t &= s - 1 \end{cases} .$$

Z pierwszego i trzeciego równania otrzymujemy natychmiast, że $t = 1$, $s = 4$. **Uwaga.** Para ta będzie rozwiązaniem układu jeśli spełnia równanie drugie. Ponieważ tak rzeczywiście jest, to punkt B otrzymamy wstawiając $t = 1$ do równania prostej l_1 lub $s = 4$ do równania prostej l_2. Stąd $B(3, -3, 3)$. Wektorem kierunkowym prostej k jest wektor $\overrightarrow{AB} = [2, 0, 1]$. Zatem

$$k : x = 1 + 2t\ ,\ y = -3\ ,\ z = 2 + t\ ,\ t \in \mathbb{R}\ .$$

Zadanie 5. Znaleźć punkt B symetryczny do $A(5, 2, -1)$ względem płaszczyzny $\pi : 2x - y + 3z + 23 = 0$.

Zadanie składa się z dwóch części. Pierwsza to wyznaczenie rzutu prostopadłego punktu A na płaszczyznę π; oznaczmy ten rzut przez A'. W tym celu należy wyznaczyć prostą l przechodzącą przez A i prostopadłą do π. Wektorem kierunkowym tej prostej jest wektor normalny płaszczyzny. Zatem l jest postaci

$$l : x = 2t + 5\ ,\ y = -t + 2\ ,\ z = 3t - 1\ ,\ t \in \mathbb{R}\ .$$

Punkt A' otrzymać można jako część wspólną l i π; wystarczy więc wstawić do równania płaszczyzny równanie parametryczne prostej. Stąd

$$2(2t + 5) - (-t + 2) + 3(3t - 1) + 23 = 0\ ,$$

czyli $t = -2$. Zatem $A'(1, 4, -7)$.

Drugi etap to wyznaczenie na prostej l punktu $B(x_B, y_B, z_B)$ takiego, że $|AA'| = |A'B|$. Najłatwiej uzyskać punkt B zauważając, że dwa wektory $\overrightarrow{AA'}$ i $\overrightarrow{A'B}$ mają nie tylko tę samą długość, ale też ten sam kierunek i zwrot. Są więc równe. Zatem ich odpowiednie współrzędne są identyczne. Ponieważ $\overrightarrow{AA'} = [-4, 2, -6]$ i $\overrightarrow{A'B} = [x_B - 1, y_B - 4, z_B + 7]$, więc

$$x_B - 1 = -4\ ,\ y_B - 4 = 2\ ,\ z_B + 7 = -6\ ,$$

czyli $B(-3, 6, -13)$.

Zadanie 6. Znaleźć punkt B symetryczny do $A(4,3,10)$ względem prostej $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$.

Zadanie składa się z dwóch części. Pierwsza to wyznaczenie rzutu prostopadłego punktu A na prostą l; oznaczmy ten rzut przez A'. W tym celu należy wyznaczyć płaszczyznę π przechodzącą przez A i prostopadłą do l. Wektor kierunkowy tej prostej jest wektorem normalnym płaszczyzny. Zatem π jest postaci $2x + 4 + 5z + D = 0$. Z faktu, że $A \in \pi$ wynika, że współrzędne punktu A spełniają równanie płaszczyzny. Stąd $2 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 10 + D = 0$. Mamy $D = -70$ i ostatecznie

$$\pi : 2x + 4y + 5z - 70 = 0 \ .$$

Punkt A' otrzymać można jako część wspólną l i π; wystarczy więc wstawić do równania płaszczyzny równanie parametryczne prostej. Stąd

$$2(2t+1) + 4(4t+2) + 5(5t+3) - 70 = 0 \ ,$$

czyli $t = 1$. Zatem $A'(3,6,8)$.

Drugi etap jest identyczny jak w poprzednim zadaniu. Z faktu, że $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A'B}$ oraz $\overrightarrow{AA'} = [-1,3,-2]$ i $\overrightarrow{A'B} = [x_B - 3, y_B - 6, z_B - 8]$, więc

$$x_B - 3 = -1 \ , \ y_B - 6 = 3 \ , \ z_B - 8 = -2 \ ,$$

czyli $B(2,9,6)$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Obliczyć objętość czworościanu ograniczonego płaszczyzną $2x + 3y + 6z - 12 = 0$ i płaszczyznami układu współrzędnych.

2. Znaleźć równanie płaszczyzny równoległej do $\alpha : 2x + y - 4z + 8 = 0$ i oddalonej od punktu $M(1,2,0)$ o $\sqrt{21}$.

3. Na krawędzi przecięcia płaszczyzn $\alpha_1 : \ 2x - y + z - 8 = 0$ i $\alpha_2 : \ 4x + 3y - z + 14 = 0$ znaleźć punkt P oddalony o 7 od płaszczyzny $\beta : 2x + 3y - 6z - 10 = 0$.

4. Znaleźć równanie płaszczyzny, w której leżą dwie proste
$$l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2} \quad \text{oraz} \quad l_2 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1} \ .$$

5. Znaleźć odległość punktu $A(1,-1,-2)$ od prostej $l : \frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

Odpowiedzi: 1. $V = 8$; **2.** $2x + y - 4z + 17 = 0$ oraz $2x + y - 4z - 25 = 0$; **3.** $P_1\,(0,-3,5)$ lub $P_2(\frac{98}{23}, -\frac{363}{23}, -\frac{375}{23})$; **4.** $5x + 3y - z - 1 = 0$; **5.** 7.