1 Układy równań liniowych

Przykład 1.
Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \; . \end{cases}$$

Mamy dwie macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

o wymiarach odpowiednio 3×3 i 3×4. Zatem rzędy tych macierzy mogą być równe co najwyżej 3.

Mamy

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0 \; .$$

Oznacza to, że jedyna podmacierz zawarta w A, czyli ona sama, ma wyznacznik równy 0, więc $\operatorname{rz} A < 3$.

Ponadto podmacierz kwadratowa macierzy U powstała przez skreślenie z macierzy U pierwszej kolumny ma wyznacznik

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} = -76 \; ,$$

co oznacza, że $\operatorname{rz} U = 3$. Z twierdzenia K-C wynika, że układ jest sprzeczny.

Przykład 2.
Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y - 2z &= 1 \\ 2x - y + 5z &= 5 \; . \end{cases}$$

Mamy dwie macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

o wymiarach odpowiednio 2×3 i 2×4. Zatem rzędy tych macierzy mogą być równe co najwyżej 2. Ponieważ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \; ,$$

więc $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} U = 2$. Macierzą bazową układu jest podmacierz macierzy A stopnia 2 powstała przez skreślenie ostatniej kolumny. Oznaczmy tą podmacierz A_0, jest wyznacznik jest równy -3.

Z powyższego kształtu macierzy bazowej wynika, że zmienne x i y są zmiennymi bazowymi, zaś z jest zmienną niebazową, czyli parametrem; oznaczmy go przez t. Układem bazowym jest więc

$$\begin{cases} x + y &= 1 + 2t \\ 2x - y &= 5 - 5t \; . \end{cases}$$

Po dodaniu do siebie tych równań i podzieleniu przez 3 mamy $x = 2 - t$, skąd $y = -1 + 3t$. Ostatecznie więc rozwiązaniem układu równań jest

$$x = 2 - t \; , \; y = -1 + 3t \; , \; z = t \; , \; t \in \mathbb{R} \; .$$

Przykład 3.

Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= & 8 \\ -7x_1 + x_2 + 8x_3 &= & 12 \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= & 7 \\ -9x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= & 9\ . \end{cases}$$

Mamy dwie macierze:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 5 \\ -7 & 1 & 8 \\ -5 & 2 & 3 \\ -9 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 5 & 8 \\ -7 & 1 & 8 & 12 \\ -5 & 2 & 3 & 7 \\ -9 & 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

o wymiarach odpowiednio 4×3 i 4×4. Zatem rzędy tych macierzy mogą być co najwyżej odpowiednio 3 i 4.

Stsosują regułę Sarrusa mamy

$$\det \begin{bmatrix} -8 & 2 & 5 \\ -7 & 1 & 8 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix} = 21\ ,$$

zatem $\operatorname{rz} A = 3$. Ponadto, w wyniku dodania kolumny czwartej do kolumny pierwszej, a następnie zastosowania twierdzenia Laplace'a do kolumny pierwszej uzyskanej macierzy, mamy

$$\det \begin{bmatrix} -8 & 2 & 5 & 8 \\ -7 & 1 & 8 & 12 \\ -5 & 2 & 3 & 7 \\ -9 & 4 & 3 & 9 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 8 \\ 5 & 1 & 8 & 12 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 3 & 9 \end{bmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \\ 4 & 3 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 1 & 8 & 12 \\ 4 & 3 & 9 \end{vmatrix}\ .$$

Zatem, po zastosowaniu metody Sarrusa do wyznaczników stopnia 3, mamy

$$\det U = -5 \cdot 14 + 2 \cdot 35 = 0\ .$$

Oznacza to, że w macierzy U nie istnieje podmacierz stopnia czwartego o wyznaczniku różnym od zera. W konsekwencji $\operatorname{rz} U < 4$. Z drugiej strony, $\operatorname{rz} A \leqslant \operatorname{rz} U$ i $\operatorname{rz} A = 3$, co daje $\operatorname{rz} U = 3$. Macierzą bazową układu jest podmacierz macierzy A powstała przez skreślenie ostatniego wiersza, gdyż wykazaliśmy, że wyznacznik tej podmacierzy, oznaczmy ją A_0, jest równy 21.

Z powyższego kształtu macierzy bazowej wynika, że układem bazowym jest więc

$$\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= & 8 \\ -7x_1 + x_2 + 8x_3 &= & 12 \\ -5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= & 7\ . \end{cases}$$

Jest to układ Cramera. Mamy ponadto,

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 12 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 21\ , \ |A_2| = \begin{vmatrix} -8 & 8 & 5 \\ -7 & 12 & 8 \\ -5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 63\ , \ |A_2| = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 8 \\ -7 & 1 & 12 \\ -5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 42\ .$$

Stąd

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A_0|} = \frac{21}{21} = 1\ , \ x_2 = \frac{|A_2|}{|A_0|} = \frac{63}{21} = 3\ , \ x_1 = \frac{|A_3|}{|A_0|} = \frac{42}{21} = 2\ .$$

Rozwiąż zadania:

1. $\begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ 3x - 2y - z = 8 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 5y + z = 0 \\ -x + y + 5z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - 4z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x + y + 4z = 11 \\ -2x + 3y + z = 0 \\ x - 2y - z = -1 \\ 5x - y + 4z = 13 \end{cases}$