1 Całka potrójna

Zadanie 1. Na podstawie Twierdzenia 1 z wykładu obliczyć całkę potrójną po prostopadłościanie.

(a) $\iiint_P \frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)}\, dxdydz, \quad P = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 3\}$

(b) $\iiint_P xyz^2\, dxdydz, \quad P = \{0 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$

(c) $\iiint_P (x - 2y2z)\, dxdydz, \quad P = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 1 \leqslant y \leqslant 2,\ 1 \leqslant z \leqslant 3\}$

Rozwiązanie przykładu (a):

$$
\begin{aligned}
\iiint_P \frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)}\, dxdydz &= \int_0^1 \left[\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(y+1)} \left[\int_0^3 \frac{1}{z+1}\, dz\right] dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(y+1)} \left[\ln|z+1|\right]_0^3 dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^2 \frac{1}{(x+1)(y+1)} \left[\ln 4 - \ln 1\right] dy\right] dx \\
&= \ln 4 \int_0^1 \left[\frac{1}{x+1} \int_0^2 \frac{1}{(y+1)} dy\right] dx \\
&= 2\ln 2 \int_0^1 \left[\frac{1}{x+1} \left[\ln|y+1|\right]_0^2\right] dx \\
&= 2\ln 2 \int_0^1 \left[\frac{1}{x+1} \left[\ln 3 - \ln 1\right]\right] dx \\
&= 2\ln 2 \ln 3 \int_0^1 \left[\frac{1}{x+1}\right] dx \\
&= 2\ln 2 \ln 3 \left[\ln|x+1|\right]_0^1 \\
&= 2\ln 2 \ln 3 \left[\ln 2 - \ln 1\right] = 2\ln^2 2 \ln 3
\end{aligned}
$$

Zadanie 2. Korzystając z Definicji 1 oraz Twierdzenia 2 z wykładu obliczyć całkę potrójną po zbiorze G.

(a) $\iiint_G xy\, dxdydz, \quad G = \{(x,y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant xy\}$, gdzie $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant -x+1\}$

(b) $\iiint_G x^2y^3z\, dxdydz, \quad G = \{(x,y) \in D,\ 0 \leqslant z \leqslant xy\}$, gdzie $D = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant x\}$

(c) $\iiint_G x\, dxdydz,$ gdzie G jest ograniczony płaszczyznami układu oraz płaszczyzną $2x+2y+z-6=0$; wskazówka: zbiór G można zapisać w postaci $G = \{0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant -x+3,\ 0 \leqslant z \leqslant -2x-2y+6\}$

Rozwiązanie przykładu (a):

$$
\begin{aligned}
\iiint_G xy\, dxdydz &= \iint_D \left[\int_0^{xy} xy\, dz\right] dxdy \\
&= \iint_D xy \left[\int_0^{xy} dz\right] dxdy \\
&= \iint_D xy\, [z]_0^{xy}\, dxdy \\
&= \iint_D x^2y^2 dxdy
\end{aligned}
$$

Zbiór $D=\{0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant -x+1\}$ jest zbiorem normalnym względem osi Ox, zatem

$$\begin{aligned}\iint_D x^2y^2dxdy &= \int_0^1\left(\int_0^{-x+1}x^2y^2dy\right)dx=\int_0^1 x^2\left(\int_0^{-x+1}y^2dy\right)dx=\int_0^1 x^2\left(\frac{1}{3}y^3\right)_0^{-x+1}dx\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 x^2(-x+1)^3dx=\frac{1}{3}\int_0^1(-x^5+3x^4-3x^3+x^2)dx\\ &= \frac{1}{3}\left[-\frac{x^6}{6}+\frac{3x^5}{5}-\frac{3x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{180}\end{aligned}$$

Zadanie 3. Korzystając z Twierdzenia 3 z wykładu obliczyć:

(a) objętość bryły ograniczonej paraboloidą $16-x^2-y^2=4z$ i płaszczyznami $x+y+z=4,\ x+y=4,\ x=0,\ y=0.$

(b) objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z=x^2+y^2,\ z=0,\ y=3x,\ y=3,\ x=0.$

(c) objętość bryły ograniczonej powierzchniami $x^2+y^2=1,\ z=0,\ x+y+z=3.$

Rozwiązanie przykładu (a):

Zbiór G możemy opisać w następujacy sposób:

$$G=\{0\leqslant x\leqslant 4,\ 0\leqslant y\leqslant 4-x,\ -x-y+4\leqslant z\leqslant \frac{16-x^2-y^2}{4}\}$$

stąd

$$\begin{aligned}|G|=\iiint_G 1\ dxdydz &= \iint_D\left[\int_{-x-y+4}^{\frac{16-x^2-y^2}{4}}1\ dz\right]dxdy\\ &= \iint_D [z]_{-x-y+4}^{\frac{16-x^2-y^2}{4}}\ dxdy\\ &= \iint_D\left[\left(\frac{16-x^2-y^2}{4}\right)-(-x-y+4)\right]dxdy\\ &= \iint_D(4-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}y^2+x+y-4)dxdy\ .\end{aligned}$$

Obszar D traktujemy jako normalny względem osi x, zatem

$$D:\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 4\\ 0\leqslant y\leqslant 4-x\ ,\end{cases}$$

stąd

$$\begin{aligned}|G| &= \iint_D(4-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}y^2+x+y-4)dxdy\\ &= \int_0^4\left(\int_0^{4-x}(4-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}y^2+x+y-4)dy\right)dx\\ &= \int_0^4\left(4y-\frac{x^2y}{4}-\frac{y^3}{12}+xy+\frac{y^2}{2}-4y\right)_0^{4-x}dx\\ &= \int_0^4\left(\frac{x^3}{3}-\frac{11}{6}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}\right)dx\\ &= \left[\frac{x^4}{12}-\frac{11}{18}x^3+\frac{2}{3}x^2+\frac{8}{3}x\right]_0^4=\frac{32}{9}\ .\end{aligned}$$