1 Całka podwójna

Załóżmy, że mamy dany zbiór $D \subset R^2$ w którym określona jest funkcja dwóch zmiennych $f(x, y)$. Dokonajmy podziału zbioru D na n-części D_i, $i = 1, 2 \ldots n$ siatką dowolnych krzywych. W każdym ze zbioru D_i, którego pole jest równe $|D_i|$, wybieramy punkt pośredni (x_i, y_i), a następnie tworzymy sumę:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)|D_i|.$$

Definicja 1 *Jeżeli dla dowolnego normalnego ciągu podziałów zbioru D (normalny ciąg oznacza $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{i} |D_i| = 0, i = 1, 2 \ldots n.$) istnieje skończona granica $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, niezależnie od doboru punktu pośredniego, to funkcję f nazywamy całkowalną w zbiorze D, zaś wartość tej granicy nazywamy całką podwójną z funkcji f i oznaczamy*

$$\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy.$$

Mamy następujące własności całki podwójnej:

Twierdzenie 1 *Jeżelii funkcje f i g są całkowalne w zbiorze D oraz c jest dowolną stałą, to*

- $\iint\limits_{D} (f(x, y) \pm g(x, y))dxdy = \iint\limits_{D} f(x, y)dxdy \pm \iint\limits_{D} g(x, y)dxdy;$
- $\iint\limits_{D} (cf(x, y))dxdy = c \iint\limits_{D} (f(x, y))dxdy$
- *jeżeli $D = D_1 \cup D_2$ oraz $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, to* $\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy.$

1.1 Całka podwójna po prostokącie

Twierdzenie 2 *Jeśli f jest ciągła w prostokącie $P = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$, to*

$$\iint\limits_{P} f(x, y)\ dxdy = \int_{a_1}^{a_2} \left[\int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\ dy\right] dx\ .$$

Wzór pozostaje prawdziwy przy dowolnej zmianie kolejności całek iterowanych. (Całka iterowana to całka po jednej zmiennej, czyli: $\int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\ dy$ lub $\int_{a_1}^{a_2} f(x, y)\ dx$.

Przykład.
Oblicz $\iint\limits_{P} \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\ dxdy \quad , \quad P = \{1 \leqslant x \leqslant 3\ ,\ 1 \leqslant y \leqslant 3\}$.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{P} \tfrac{1}{4}(x^2 + y^2)\ dxdy &= \int_1^3 \left[\int_1^3 \tfrac{1}{4}(x^2 + y^2)\ dy\right] dx \\
&= \tfrac{1}{4} \int_1^3 \left[x^2 y + \tfrac{1}{3} y^3\right]_1^3 dx \\
&= \tfrac{1}{4} \int_1^3 (2x^2 + \tfrac{26}{3})dx \\
&= \tfrac{1}{4} \left[\tfrac{2}{3} x^3 + \tfrac{26}{3} x\right]_1^3 = \tfrac{26}{3}.
\end{aligned}$$

Przykład.
Oblicz $\iint\limits_P xy(x-y)\ dxdy \quad , \quad P = \{0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_P xy(x-y)\ dxdy &= \int_0^1 \left[\int_0^2 (x^2y - xy^2)\ dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}x^2y^2 - \tfrac{1}{3}xy^3\right]_0^2 dx \\
&= \int_0^1 (2x^2 - \tfrac{8}{3}x) dx \\
&= \left[\tfrac{2}{3}x^3 - \tfrac{8}{3}\cdot\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{4}{3} = -\tfrac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Definicja 2 *Zbiór G nazywamy normalnym względem osi Ox jeśli można opisać go przy pomocy nierówności*

$$G : \begin{cases} h_1(x) \leqslant y \leqslant h_2(x) \\ x \in [a,b]\ . \end{cases} \tag{1}$$

Twierdzenie 3 *Jeśli f jest ciągła w zbiorze G normalnym względem osi Ox postaci (1), to*

$$\iint\limits_G f(x,y)\ dxdy = \int_a^b \left[\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\ dy\right] dx\ .$$

Analogicznie możemy zdefiniować pojęcie zbioru normalnego względem osi Oy i całki podwójnej po takim zbiorze. Mianowicie

Definicja 3 *Zbiór G nazywamy normalnym względem osi Oy jeśli można opisać go przy pomocy nierówności*

$$G : \begin{cases} k_1(y) \leqslant x \leqslant k_2(y) \\ x \in [c,d]\ . \end{cases} \tag{2}$$

Twierdzenie 4 *Jeśli f jest ciągła w zbiorze G normalnym względem osi Oy postaci (2), to*

$$\iint\limits_G f(x,y)\ dxdy = \int_c^d \left[\int_{k_1(y)}^{k_2(y)} f(x,y)\ dx\right] dy\ .$$

Przykład.
Oblicz $\iint\limits_G e^x\ dxdy$, gdzie zbiór D jest zbiorem ograniczonym prostymi $x = 0$, $y = 2$ i krzywą $y = e^x$.

Zauważmy, że zbiór nasz możemy opisać w następującej postaci: $x \in [0, \ln 2]$, zaś $y \in [e^x, 2]$. Oznacza to, że nasz zbiór jest normalny względem osi Ox. Zatem mamy

$$\begin{aligned}
\iint\limits_G e^x\ dxdy &= \int_0^{\ln 2} \left[\int_{e^x}^2 e^x\ dy\right] dx \\
&= \int_0^{\ln 2} \left[e^x y\right]_{e^x}^2 dx \\
&= \int_0^{\ln 2} \left(2e^x - e^{2x}\right) dx \\
&= \left[2e^x - \tfrac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln 2} = (4 - \tfrac{1}{2}\cdot 4) - (2 - \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\ .
\end{aligned}$$

Przykład.

Oblicz $\iint\limits_G 2y\ dxdy$, gdzie zbiór D jest zbiorem ograniczonym krzywą $y = \sqrt{x}$ i prostymi $y = 0$ oraz $x + y = 2$.

Zauważmy, że nasz zbiór G jet nrmalny względem osi Oy, gdyż można go opisać nierównościami: $0 \leqslant y \leqslant 1$ i $y^2 \leqslant x \leqslant 2 - y$. (Nie jest to zbiór normalny względem osi Ox, ponieważ górna ograniczenie zbioru składa się z dwóch krzywych i aby go opisać zbiór należałoby podzielić na dwa kawałki).

$$\begin{aligned}
\iint\limits_G 2y\ dxdy &= \int_0^1 \left[\int_{y^2}^{2-y} 2y\ dx\right] dy \\
&= \int_0^1 [2xy]_{y^2}^{2-y}\, dy \\
&= \int_0^1 \left(2y(2-y) - 2y^3\right) dy \\
&= \int_0^1 \left(-2y^3 - 2y^2 + 4y\right) dy \\
&= \left[-\tfrac{1}{2}y^4 - \tfrac{2}{3}y^3 + 2y^2\right]_0^1 = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{2}{3} + 2 = \tfrac{5}{6}\ .
\end{aligned}$$

1.2 Zamiana zmiennych w całce podwójnej.

Niech Δ i D będą zbiorami odpowiednio na płaszczyznach uOv i xOy. Przekształceniem obszaru Δ w obszar D nazywamy funkcję $T : \Delta \to D$ określoną wzorem:

$$(x, y) = T(u, v) = (\phi(u, v), \psi(u, v)), \quad gdzie (u, v) \in \Delta.$$

Obrazem zbioru Δ przy przekształceniu T nazywamy zbiór:

$$T(\Delta) := \{(x, y) : x = \phi(u, v), y = \phi(u, v), (u, v) \in \Delta\}.$$

Przekształcenie T nazywamy:

- ciągłym, jeżeli funkcjr ϕ i ψ są ciągłe na zbiorze Δ;
- różnowartościowym, jeżeli różnym punktom zbioru Δ odpowiadają różne punkty jego obrazu D.

Przy zamianie zmiennych w całce podwójnej używamy operatora nazywanego Jakobianem przekształcenia. Mamy

Definicja 4 *Jakobianem przekształcenia $T(u, v) = (\phi(u, v), \psi(u, v))$ nazywamy funkcję określoną wzorem:*

$$J_T(u, v) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \phi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix}.$$

Dla całki podwójnej istnieje twierdzenie o zamianie zmiennych w całce podwójnej, które jest odpowiednikiem twiedzenia o całkowaniu przez podstawienie dla całki pojedyńczej. Mamy:

Twierdzenie 5 *Niech*

1. *przekształcenie T : $\begin{cases} x = \phi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$ odwzorowuje różnowartościowo wnętrze zbioru Δ na wnętrze zbioru D;*
2. *funkcje ϕ, ψ mają ciągłe pochodne cząstkowe rzędu pierwszego na pewnym zbiorze otwartym zawierającym Δ,*
3. *funkcja f jest określona i ciągła w zbiorze D*
4. *jakobian J_T jest różny od zera wewnątrz zbioru Δ.*

Wtedy

$$\iint\limits_D f(x, y) dx dy = \iint\limits_\Delta f(\phi(u, v), \psi(u, v)) |J_T(u, v)| du dv.$$

1.3 Współrzędne biegunowe

W przypadku, gdy obszar cakowania jest kołem, pierścieniem wycinkiem jednej z tych figur a, także i w wielu innych przypadkch (gdy w opisie zbioru występuje $x^2 + y^2$ lub $x^2 - y^2$) wygodnie jest przy obliczaniu całki podwójnej wprowadzić współrzędne biegunowe.

Definicja 5 *Współrzędnymi biegunowymi nazywamy układ zmiennych (r, φ), które wiąże ze współrzędnymi kartezjańskimi (x, y) następująca zależność:*

$$\begin{cases} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{cases}.$$

Zmienne (r, φ) spełniają następujące warunki $r \geqslant 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ (czasami wygodniej jest przyjąć zakres zmienności φ w zakresie $-\pi$ do π, wybór taki jest również prawidłowy).

W przypadku współrzędnych biegunowych Jakobian, oznaczony jako $J(r, \varphi)$ jest stały i równy r. Wzór na zamianę całki podwójnej przy użyciu współrzędnych biegunowych przyjmuje postać:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iiint_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi,$$

gdzie Δ jest obrazem zbioru D poprzez współrzędne biegunowe.

Przykład.
Obliczyć całkę $\iint_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}dxdy$, gdzie D jest opisany warunkiem $x^2+y^2 \leqslant 4$.

Rozpocznijmy od przekształcenia zbioru D w zbiór Δ, przekształcenie to określi nam dokładny zakres zmienności (r, φ). Mamy

$$x^2+y^2 = (r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2\left[(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2\right] = r^2,$$

Zatem z warunku opisującego zbiór D mamy $r^2 \leqslant 4$ co jest równoważne $r \leqslant 2$. Ponieważ nie ma żadnych dodatkowych warunków zadania przyjmuje najszerszy zakres zmienności φ czyli przedział $[0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}dxdy &= \iint_\Delta \sqrt{4-r^2}\cdot rdrd\varphi = \int_0^2\left[\int_0^{2\pi}\sqrt{4-r^2}\cdot rd\varphi\right]dr \\ &= \int_0^2\left[\sqrt{4-r^2}\cdot r\int_0^{2\pi}d\varphi\right]dr = \int_0^2\left(\sqrt{4-r^2}\cdot r\,[\varphi]_0^{2\pi}\right)dr \\ &= 2\pi\int_0^2\left(\sqrt{4-r^2}\cdot r\right)dr\end{aligned}$$

Stosując podstawienie $4-r^2=t^2$ mamy $rdr=-tdt$ i stosując zamianę granic otrzymjemy

$$\iint_D \sqrt{4-(x^2+y^2)}dxdy = 2\pi\int_2^0 (t\cdot(-t))\,dt = -2\pi\int_2^0 t^2dt = -2\pi\left[\frac{t^3}{3}\right]_2^0 = \frac{16}{3}\pi.$$

Przykład.
Obliczyć całkę $\iint_D xydxdy$, gdzie D jest opisany warunkiem $x^2+y^2 \leqslant 2x$, $y \geqslant 0$.

Rozpocznijmy od przekształcenia zbioru D w zbiór Δ, przekształcenie to określi nam dokładny zakres zmienności (r, φ). z poprzedniego zadania wiemy, że $x^2+y^2=r^2$.

Zatem z warunku opisującego zbiór D mamy $r^2 \leqslant 2r\cos\varphi$, co jest równoważne $r \leqslant 2\cos\varphi$. Ponieważ $r \geqslant 0$ i poprzedni warunek implikuje, że $\cos\varphi \geqslant 0$, a stąd mamy warunek (1) $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ponadto warunek $y \geqslant 0$ jest równoważny $\sin\varphi \geqslant 0$, czyli (2) $\varphi \in [0, \pi]$. Warunki (1) i (2) dają $\varphi \in [0, \pi]$. Zatem

$$\begin{aligned}\iint_D xydxdy &= \iint_\Delta (r\cos\varphi r\sin\varphi)\cdot rdrd\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2\cos\varphi} r^3\cos\varphi\sin\varphi dr\right]d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\cos\varphi\sin\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^3dr\right]d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\varphi\sin\varphi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\varphi}\right)d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(4\cos^5\varphi\sin\varphi\right)d\varphi\end{aligned}$$

Podstawiając $\cos\varphi = t$ mamy $-\sin\varphi d\varphi = dt$ i zmieniając granice całkowania otrzymujemy:

$$\iint_D xydxdy = 4\int_0^1 (t^5)dt = 4\left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$