1. Macierze, układy równań

Wyznaczniki, macierz odwrotna

Definicja 1. *(Dopełnienie algebraiczne)*
Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$.Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A nazywamy liczbę:

$$d_{ij} = (-1)^{i+j} \left| A_{ij} \right|,$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie jej i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Pojęcie dopełnienia algebraicznego jest pomocne w obliczaniu wyznaczników i odwracaniu macierzy dowolnego stopnia.

Twierdzenie 1. *(Rozwinięcie Laplace'a wyznacznika)*
Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geqslant 2$ oraz liczby i i j będą ustalone. Wyznacznik macierzy A możemy obliczyć ze wzorów:

- $$|A| = a_{i1}d_{i1} + a_{i2}d_{i2} + \cdots a_{in}d_{in},$$

  - rozwiniecie Laplace'a względem i-tego wiersza.

- $$|A| = a_{1j}d_{1j} + a_{2j}d_{2j} + \cdots a_{nj}d_{nj},$$

  - rozwiniecie Laplace'a względem j-tej kolumny.

Twierdzenie Laplace'a wraz z własnościami wyznaczników pozwala szybko obliczać ich wartości.

Definicja 2. *(Własności wyznaczników)*

1. *Wyznacznik macierzy mającej wiersz (kolumnę) złożoną z samych zeer jest równy* 0.
2. *Wyznacznik macierzy zmieni znak, jeżeli przestawimy między sobą dwa wiersze (lub dwie kolumny).*
3. *Wyznacznik macierzy mającej dwa jednakowe wiersze (lub dwie jednakowe kolumny) jest równy* 0.
4. *Jeżeli wszystkie elementy pewnego wiersza (lub pewnej kolumny) macierzy kwadratowej zawierają pewien czynnik, to czynnik ten można wyłączyć przed wyznacznik.*
5. *Wyznaczniki macierzy A i A^T są sobie równe.*
6. *Wyznacznik macierzy nie zmieni się, jeżeli do pewnego wiersza (lub pewnej kolumny) dodamy odpowiadające im elementy innego wiersza (lub innej kolumny) pomnożone przez pewną liczbę.*

Uwaga 1. Można tak przekształcić macierz, aby w wierszu lub kolumnie znajdował się co najwyżej jeden element niezerowy.

Definicja 3. *(Macierz odwrotna)*
Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n. Macierzą odwrotną do macierzy A nazywamy macierz oznaczoną przez A^{-1}, która spełnia warunki:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

gdzie I_n oznacza macierz jednostkową stopnia n.

Uwaga 2. Macierz kwadratową A nazywamy osobliwą, jeżeli $|A| = 0$. W przeciwnym razie mówimy, że macierz A jest nieosobliwa.

Twierdzenie 2. *Macierz kwadratowa jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest nieosobliwa. Jeżeli macierz $A = [a_{ij}$ stopnia n jest nieosobliwa, to*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} D^T,$$

gdzie $D = [d_{ij}]$ oznacza macierz stopnia n złożoną z dopełnień algebraicznych wszystkich elementów macierzy A.

Definicja 4. *Własności:*

- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}(A^{-1})$
- $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$

Układy równań liniowych

Definicja 5. *Układem m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \cdots, x_n$ gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ nazywamy układ postaci:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases},$$

gdzie $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Rozwiązaniem układu równań liniowych nazywamy ciąg $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ liczb rzeczywistych spełniających ten układ.
Układ oznaczony - posiada dokładnie jedno rozwiązanie.
Układ nieoznaczony - posiada nieskończenie wiele rozwiązań.
Układ sprzeczny - nie posiada rozwiązań.
Zauważmy, że powyższy układ można zapisać w postaci macierzowej $AX = B$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Macierz A nazywa się macierzą główną układu, macierz B - macierz (kolumna) wyrazów wolnych, a macierz X - macierz (kolumna) niewiadomych. Pokażemy jedną z metod znalezienia rozwiązania układu oznaczonego, w przypadku, gdy macierz A jest macierzą kwadratową, nieosobliwą.

Definicja 6. *Układ równań $AX = B$ nazywamy:*

- *układem **jednorodnym**, jeżeli $B = 0$ (jedno z rozwiązań $X = 0$)*
- *układem **niejednorodnym**, jeżeli $B \neq 0$.*

Definicja 7. *Układ równań* $AX = B$ *nazywamy układem Cramera, jeżeli macierz* A *jest macierzą kwadratową stopnia* n *nieosobliwą.*

Twierdzenie 3. *(Wzór Cramera)*
Układ Cramera $AX = B$ *ma dokładnie jedno rozwiązanie dane wzorem:*

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \cdots x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

gdzie A_i *oznacza macierz* A*, w której* i*-tą kolumnę zastąpiono kolumną wyrazów wolnych* B*.*

Uwaga 3. Rozwiązanie układu Cramera $AX = B$ dane jest wzorem: $X = A^{-1}B$. Poniżej podamy opis metody eliminacji Gaussa, dzięki której rozwiążemy dowolny układ równań liniowych $AX = B$.

1. Budujemy macierz rozszerzoną układu $[A|B]$, która skład się z macierzy głównej A i dopisanej kolumny wyrazów wolnych B.

2. Przekształcamy (za pomocą elementarnych operacji na wierszach) macierz rozszerzoną układu $[A|B]$ do macierzy $[A'|B']$ opisującej układ równoważny wyjściowemu i jednocześnie zawierającej macierz jednostkową w lewym górnym rogu, a pod nią wiersz złożony z samych zer. Wówczas możliwe są trzy sytuacje:

   (a) Układ będzie sprzeczny, jeżeli zerowemu wierszowi w macierzy A' będzie odpowiadał niezerowy element w macierzy B.

   (b) Układ będzie oznaczony, jeżeli poza macierzą jednostkową w macierzy A' nie zostanie żadna kolumna.

   (c) Układ będzie nieoznaczony, jeżeli poza macierzą jednostkową w macierzy A' pozostanie choć jedna kolumna. Liczba dodatkowych kolumn odpowiada liczbie parametrów.