ZADANIE 15.1. Obliczyć całkę $I=\int x(x-1)(x-2)\,dx$.

Rozwiązanie. Po doprowadzeniu funkcji podcałkowej do postaci wielomianu całkujemy

$$I=\int (x^3-3x^2+2x)\,dx=\int x^3dx-3\int x^2dx+2\int x\,dx=\frac{x^4}{4}-3\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+C$$

i ostatecznie $I=\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2+C$.

ZADANIE 15.2. Obliczyć całkę $I=\int (x^2-x+1)^2\,dx$.

Rozwiązanie. Podnosząc funkcję podcałkową do kwadratu kolejno otrzymujemy

$$I=\int (x^4-2x^3+3x^2-2x+1)\,dx=$$
$$=\int x^4dx-2\int x^3dx+3\int x^2dx-2\int x\,dx+\int dx=$$
$$=\frac{x^5}{5}-2\frac{x^4}{4}+3\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+x+C=$$
$$=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+x^3-x^2+x+C\,.$$

ZADANIE 15.3. Przyśpieszenie w danym ruchu prostoliniowym wyraża się wzorem $a=12t^2+18\sin 3t-2$. Wyznaczyć wzór określający prędkość v w zależności od czasu t, jeżeli dla $t=0$ prędkość $v=10$; wyznaczyć również wzór określający drogę x, jeżeli dla $t=0$ droga $x=5$.

Rozwiązanie. Mamy

$$v=\int a\,dt=\int (12t^2+18\sin 3t-2)\,dt=4t^3-6\cos 3t-2t+C\,.$$

Przyjmując $t=0$ otrzymujemy $v=-6+C=10$, skąd $C=16$. Ostatecznie

$$v=4t^3-6\cos 3t-2t+16\,.$$

Dalej,

$$x=\int v\,dt=\int (4t^3-6\cos 3t-2t+16)\,dt=t^4-2\sin 3t-t^2+16t+C_1\,.$$

Dla $t=0$ mamy $x=5$, zatem $C_1=5$, a więc

$$x=t^4-2\sin 3t-t^2+16t+5\,.$$

Zadanie 15.4. Obliczyć całkę $I=\int(x^2+a^2)\,x\,dx$.

Rozwiązanie. Całkę tę można obliczyć rozkładając ją na dwa składniki i stosując w każdym składniku wzór (15.2.1). Otrzymujemy

$$I=\tfrac{1}{4}x^4+\tfrac{1}{2}a^2x^2+C\,.$$

Ale można również zastosować podstawienie $x^2+a^2=u$, skąd przez zróżniczkowanie otrzymujemy

$$2x\,dx=du\,,\qquad \text{czyli}\qquad x\,dx=\tfrac{1}{2}du\,.$$

Na podstawie wzoru (15.3.4) na zamianę zmiennych oraz reguły (15.3.2) otrzymujemy

$$I=\tfrac{1}{2}\int u\,du\,(^1)\,,\qquad \text{skąd}\qquad I=\tfrac{1}{4}u^2+C'\,.$$

Ostatecznie więc mamy

$$\int(x^2+a^2)\,x\,dx=\tfrac{1}{4}(x^2+a^2)^2+C'\,.$$

Zadanie 15.5. Dane jest przyśpieszenie w ruchu prostoliniowym $a=3t+\sin\frac{1}{2}t$. Wyznaczyć wzór określający prędkość v jako funkcję czasu t, jeżeli wiemy, że w chwili $t=0$ jest $v=v_0$; wyznaczyć również drogę x w zależności od czasu, jeżeli wiadomo nam, że dla $t=0$ jest $x=x_0$.

Rozwiązanie. Mamy

$$v=\int a\,dt=\int(3t+\sin\tfrac{1}{2}t)\,dt=\tfrac{3}{2}t^2-2\cos\tfrac{1}{2}t+C\,.$$

Dla $t=0$ mamy $v=v_0$; stąd określamy stałą całkowania $C=2+v_0$. Zatem

$$v=\tfrac{3}{2}t^2-2\cos\tfrac{1}{2}t+2+v_0\,.$$

Dalej,

$$x=\int v\,dt=\int(\tfrac{3}{2}t^2-2\cos\tfrac{1}{2}t+2+v_0)\,dt=\tfrac{1}{2}t^3-4\sin\tfrac{1}{2}t+2t+v_0t+C_1\,.$$

Dla $t=0$ mamy $x=x_0$, a więc $x_0=C_1$. Ostatecznie otrzymujemy

$$x=\tfrac{1}{2}t^3-4\sin\tfrac{1}{2}t+2t+v_0t+x_0\,.$$

Zadanie 15.6. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{x(\sqrt{x}-x^2\sqrt[3]{x})}{\sqrt[4]{x}}\,dx\,.$$

---

(1) Zauważmy, że symbol du we wzorach $x\,dx=\frac{1}{2}du$ oraz $\int u\,du$ oznacza zupełnie co innego. W pierwszym przypadku jest to różniczka funkcji x^2, w drugim natomiast oznacza, że zmienną całkowania jest u. Mechaniczne podstawienie jednego oznaczenia na miejsce drugiego jest dozwolone na podstawie teorii i to też tłumaczy używanie jednego symbolu w dwóch znaczeniach.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x>0$. Przedstawiamy pierwiastki w postaci potęg o wykładnikach ułamkowych(¹)

$$\sqrt{x}=x^{1/2}, \quad \sqrt[3]{x}=x^{1/3}, \quad \sqrt[4]{x}=x^{1/4}.$$

Wykonując mnożenia $x\sqrt{x}=x\cdot x^{1/2}=x^{3/2}$, $x\cdot x^2\sqrt[3]{x}=x\cdot x^2\cdot x^{1/3}=x^{10/3}$, otrzymujemy

$$I=\int\frac{x^{3/2}-x^{10/3}}{x^{1/4}}\,dx.$$

Stosując regułę całkowania (15.3.1) otrzymujemy

$$I=\int\frac{x^{3/2}}{x^{1/4}}dx-\int\frac{x^{10/3}}{x^{1/4}}dx=\int x^{3/2-1/4}dx-\int x^{10/3-1/4}dx=\int x^{5/4}dx-\int x^{37/12}dx.$$

Na podstawie wzoru (15.2.1) otrzymujemy

$$I=\frac{x^{9/4}}{\frac{9}{4}}-\frac{x^{49/12}}{\frac{49}{12}}+C=\tfrac{4}{9}x^{9/4}-\tfrac{12}{49}x^{49/12}+C=\tfrac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x}-\tfrac{12}{49}x^4\sqrt[12]{x}+C.$$

ZADANIE 15.7. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x^2}\,dx.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x>0$. Postępując podobnie jak w poprzednim zadaniu otrzymujemy

$$I=\int\frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^2}\,dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}-2}-x^{\frac{1}{3}-2}\right)dx=\int x^{-\frac{3}{2}}dx-\int x^{-\frac{5}{3}}dx.$$

Na podstawie wzoru (15.2.1) mamy

$$I=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}-\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}}+C=-2x^{-\frac{1}{2}}+\tfrac{3}{2}x^{-\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C.$$

ZADANIE 15.8. Obliczyć całkę

$$I=\int\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}, \qquad a\neq 0.$$

Rozwiązanie. Ponieważ licznik różni się tylko czynnikiem stałym od różniczki wyrażenia x^2+a^2, więc stosujemy podstawienie $x^2+a^2=u$, przy czym $u>0$. Różniczkowanie daje $x\,dx=\frac{1}{2}du$. Jeżeli $n\neq 1$, to mamy

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^n}=\frac{1}{2}\int u^{-n}du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-n+1}}{-n+1}+C=\frac{-1}{2(n-1)u^{n-1}}+C.$$

Powracamy do zmiennej x i ostatecznie otrzymujemy

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{-1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+C, \qquad \text{gdzie} \quad a\neq 0,\ n\neq 1.$$

(¹) Na podstawie wzoru $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m=a^{m/n}$, gdzie $a>0$.

W przypadku gdy $n=1$, mamy

$$I=\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2}=\tfrac{1}{2}\ln(x^2+a^2)+C.$$

ZADANIE 15.9. Obliczyć całkę

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}.$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x>\frac{3}{2}$. Wykonujemy zamianę zmiennych $\sqrt{2x-3}=t$. Stąd $2x-3=t^2$, $dx=t\,dt$, przy czym $t>0$.

Podstawiając powyższe wartości do całki otrzymujemy

$$I=\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}=\int \frac{t\,dt}{t}=\int dt=t+C=\sqrt{2x-3}+C.$$

ZADANIE 15.10. Obliczyć całkę $\int x^2\sqrt{2x^3-3}\,dx$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x\geqslant\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$. Wykonujemy podstawienie

$$\sqrt{2x^3-3}=t, \quad \text{czyli} \quad 2x^3-3=t^2,$$

skąd różniczkując otrzymujemy

$$6x^2\,dx=2t\,dt, \quad \text{czyli} \quad x^2dx=\tfrac{1}{3}t\,dt.$$

Zatem

$$\int x^2\sqrt{2x^3-3}\,dx=\int\sqrt{2x^3-3}\cdot x^2\,dx=\int t\cdot\tfrac{1}{3}t\,dt=$$

$$=\tfrac{1}{3}\int t^2\,dt=\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{3}t^3+C=\tfrac{1}{9}(\sqrt{2x^3-3})^3+C.$$

ZADANIE 15.11. Obliczyć całkę $\int xe^{x^2}\,dx$.

Rozwiązanie. Wykonujemy podstawienie $x^2=t$, skąd różniczkując obie strony otrzymujemy $2x\,dx=dt$, $x\,dx=\frac{1}{2}\,dt$, a więc

$$\int xe^{x^2}\,dx=\int e^{x^2}\cdot x\,dx=\int e^t\cdot\tfrac{1}{2}dt=\tfrac{1}{2}\int e^t\,dt=\tfrac{1}{2}e^t+C=\tfrac{1}{2}e^{x^2}+C.$$

ZADANIE 15.12. Obliczyć całkę $\sin x\cos x\,dx$.

Rozwiązanie. Zadanie rozwiążemy trzema sposobami.

Sposób I. Wykonujemy podstawienie $\sin x=t$. Różniczkowanie daje $\cos x\,dx=dt$. Całkujemy

$$\int\sin x\cos x\,dx=\int t\,dt=\tfrac{1}{2}t^2+C=\tfrac{1}{2}\sin^2 x+C.$$

Sposób II. Korzystamy ze wzoru $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$. Mamy

$$\int\sin x\cos x\,dx=\tfrac{1}{2}\int\sin 2x\,dx.$$

Teraz wykonujemy podstawienie $2x=u$, skąd $dx=\frac{1}{2}\,du$. A więc

$$\int\sin x\cos x\,dx=\tfrac{1}{2}\int\sin u\cdot\tfrac{1}{2}du=\tfrac{1}{4}\int\sin u\,du=-\tfrac{1}{4}\cos u+C_1=-\tfrac{1}{4}\cos 2x+C_1.$$

Sposób III. Wykonujemy podstawienie $\cos x=t$; różniczkując otrzymujemy $-\sin x\,dx=$ $=dt$. Całkujemy

$$\int \sin x \cos x\,dx=-\int t\,dt=-\tfrac{1}{2}t^2+C_2=-\tfrac{1}{2}\cos^2 x+C_2 .$$

Otrzymaliśmy trzy różne wyniki: $\frac{1}{2}\sin^2 x$, $-\frac{1}{4}\cos 2x$, $-\frac{1}{2}\cos^2 x$. Nie będzie w tym sprzeczności, gdy okażemy, że różnica każdych dwóch wyników jest stała. Mamy

$$\tfrac{1}{2}\sin^2 x-(-\tfrac{1}{4}\cos 2x)=\tfrac{1}{2}\sin^2 x+\tfrac{1}{4}\cos 2x=\tfrac{1}{4}(2\sin^2 x+\cos 2x)=$$
$$=\tfrac{1}{4}(2\sin^2 x+1-2\sin^2 x)=\tfrac{1}{4},$$

więc $C=C_1+\frac{1}{4}$. Podobnie,

$$\tfrac{1}{2}\sin^2 x-(-\tfrac{1}{2}\cos^2 x)=\tfrac{1}{2}(\sin^2 x+\cos^2 x)=\tfrac{1}{2},$$

więc $C=C_2+\frac{1}{2}$.

Zadanie 15.13. Obliczyć całkę

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx .$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x>0$. Wykonujemy podstawienie $\ln x=t$ i różniczkujemy $\dfrac{1}{x}\,dx=dt$. Mamy więc

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx=\int t\,dt=\tfrac{1}{2}t^2+C=\tfrac{1}{2}(\ln x)^2+C .$$

Zadanie 15.14. Obliczyć całkę

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}} .$$

Rozwiązanie. Zakładamy, że $-1<x<1$. Wykonujemy podstawienie $x^2=t$, skąd $2x\,dx=dt$, czyli $x\,dx=\frac{1}{2}\,dt$. Zauważmy, że $0<t<1$. Otrzymujemy

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}=\int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\tfrac{1}{2}\arcsin t+C=\tfrac{1}{2}\arcsin(x^2)+C .$$

Zadanie 15.15. Obliczyć całkę $\int xe^x\,dx$.

Rozwiązanie. Całkujemy przez części przyjmując

$$u=x,\quad dv=e^x\,dx,\qquad \text{skąd}\qquad du=dx,\quad v=\int e^x\,dx=e^x.$$

Całkę daną możemy napisać w postaci $\int x\,de^x$; w myśl wzoru (15.3.3) na całkowanie przez części mamy

$$\int x\,de^x=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C=e^x(x-1)+C .$$

Zadanie 15.16. Obliczyć całkę $\int x\sin x\,dx$.

Rozwiązanie. Całkujemy przez części przyjmując

$$u=x,\quad dv=\sin x\,dx,\qquad \text{skąd}\qquad du=dx,\quad v=\int \sin x\,dx=-\cos x .$$

Otrzymujemy

$\int x\sin x\,dx = -x\cos x - \int(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$

Zadanie 15.17. Obliczyć całkę $\int e^x \sin x\,dx$.

Rozwiązanie. Całkujemy przez części przyjmując

$$u=\sin x,\ dv=e^x\,dx, \quad \text{skąd} \quad du=\cos x\,dx,\ v=\int e^x\,dx=e^x.$$

Otrzymujemy

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx.$$

Podobnie całkując przez części całkę po prawej stronie ostatniej równości otrzymujemy

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx.$$

Podstawiając otrzymaną wartość do poprzedniej równości otrzymujemy

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x\,dx,$$

skąd po przeniesieniu całki na lewą stronę równości mamy

$$2\int e^x \sin x\,dx = e^x(\sin x - \cos x).$$

Ostatecznie więc

$$\int e^x \sin x\,dx = \tfrac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

Zadanie 15.18. Obliczyć całkę $\int \ln x\,dx$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x>0$. Całkujemy przez części przyjmując

$$u=\ln x,\ dv=dx, \quad \text{skąd} \quad du=\frac{1}{x}\,dx,\ v=\int dx = x.$$

Obliczamy

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int dx =$$

$$= x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

Zadanie 15.19. Obliczyć całkę $\int x^{10}\ln x\,dx$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x>0$. Całkujemy przez części przyjmując

$$u=\ln x,\ dv=x^{10}\,dx, \quad \text{skąd} \quad du=\frac{1}{x}\,dx,\ v=\int x^{10}\,dx=\tfrac{1}{11}x^{11}.$$

Otrzymujemy

$$\int x^{10}\ln x\,dx = \tfrac{1}{11}x^{11}\ln x - \int \tfrac{1}{11}x^{11}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \tfrac{1}{11}x^{11}\ln x - \tfrac{1}{11}\int x^{10}\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{11}x^{11}\ln x - \tfrac{1}{11}\cdot\tfrac{1}{11}x^{11} + C = \tfrac{1}{11}x^{11}(\ln x - \tfrac{1}{11}) + C.$$

ZADANIE 15.20. Obliczyć całkę $\int (\ln x)^2\, dx$.

Rozwiązanie. Zakładamy, że $x>0$. Całkujemy przez części przyjmując

$$u=(\ln x)^2,\quad dv=dx, \qquad \text{skąd} \qquad du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx,\quad v=\int dx=x.$$

Obliczamy

$$\int (\ln x)^2\,dx=x(\ln x)^2-\int x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx=x(\ln x)^2-2\int \ln x\,dx.$$

Na podstawie zadania 15.18 mamy w dalszym ciągu

$$\int (\ln x)^2\,dx=x(\ln x)^2-2x(\ln x-1)+C=x\big((\ln x)^2-2\ln x+2\big)+C.$$

ZADANIE 15.21. Obliczyć całkę $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

Rozwiązanie. Całkujemy przez części przyjmując

$$u=\operatorname{arctg} x,\quad dv=dx, \qquad \text{skąd} \qquad du=\frac{dx}{x^2+1},\quad v=\int dx=x.$$

Wówczas mamy

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx=x\operatorname{arctg} x-\int\frac{x\,dx}{x^2+1}.$$

Ostatnią całkę obliczamy podstawiając $x^2+1=t$, skąd $x\,dx=\frac{1}{2}\,dt$ (por. zad. 15.8). Zauważmy, że $t>0$. Mamy

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+1}=\int\frac{\frac{1}{2}\,dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|=\frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$