1 Wyrażenia potęgowe i logarytmiczne.

I. Wyrażenia potęgowe (wykładnik całkowity).

Dla $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ mamy $a^1 = a$, $a^n = a^{n-1} \cdot a$.
Zatem $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$.
Przyjmujemy ponadto, że $a^0 = 1, a \neq 0$.
Dla $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbf{N}$ mamy $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Własności wyrażeń potęgowych.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3. $a^m \cdot b^m = (ab)^m$
4. $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
6. jeśli $a > 1$ i $m > n$, to $a^m > a^n$
7. jeśli $0 < a < 1$ i $m > n$, to $a^m < a^n$

II. Pierwiastki i wyrażenia potęgowe (wykładnik wymierny).

Dla $a \geqslant 0$, $n \in \mathbf{N}$ pierwiastkiem arytmetycznym n-tego stopnia z liczby a nazywamy liczbę rzeczywistą $b \geqslant 0$ taką, że $b^n = a$. Piszemy $b = \sqrt[n]{a}$.

Ponadto, dla $a < 0$ i $n \in NPar$ przyjmujemy, że $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$.

Zatem jeśli n jest parzyste, oraz $a < 0$, to pierwiastek arytmetyczny nie istnieje.

Dla $a > 0$ oraz $m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}$ mamy $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

IV. Logarytmy.

Dla $a > 0, a \neq 1$ oraz $b > 0$ logarytmem przy podstawie a z liczby b nazywamy liczbę c taką, że $a^c = b$.

Zatem
$\boxed{\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b}$.

W szczególności (gdy $a = e$) logarytm nazywamy **naturalnym**, piszemy wtedy $\log_e b = \ln b$.

Własności wyrażeń logarytmicznych.

1. $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$
2. $\log_a b - \log_a c = \log_a(b/c)$
3. $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$
4. $\log_a b = \frac{\log_d b}{\log_d a}$, $d > 0, d \neq 1$
5. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, $b \neq 1$
6. $\log_{a^n} b = \frac{1}{n} \log_a b$
7. $\log_a \left(a^b\right) = b$
8. $a^{\log_a b} = b$

Zadania.

Oblicz

I. $\log_{1/3} 27$, $\log_{1/9} 3\sqrt{3}$, $\log_{1/2} \frac{1}{8}$, $\log_{1/8} \frac{1}{2}$, $\log_{\sqrt{2}} 8$, $\log_{\sqrt{2}/2} 8$,

II. $2^{5-\log_2 5}$, $2^{\log_{2\sqrt{2}} 3}$, $(\sqrt[3]{2})^{\frac{1}{\log_3 2}}$, $(\frac{3}{2})^{1+\frac{1}{1-\log_3 2}}$,

III. $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5$.

2 Ogólne własności funkcji.

Niech dane będą niepuste zbiory X, Y. Jeśli każdemu elementowi zbioru X przyporządkujemy dokładnie jeden element zbioru Y, to mówimy, że została określona funkcja (odwzorowanie) zbioru X w zbiór Y i piszemy $f : X \to Y$.

Każdy element zbioru X nazywamy argumentem funkcji f, cały zbiór X nazywamy dziedziną funkcji f i piszemy $\mathcal{D}$ lub $\mathcal{D}_f$.

Element zbioru Y, który fukcja f przyporządkowuje argumentowi x oznaczamy przez $f(x)$ i nazywamy wartością funkcji odpowiadającą argumentowi x. Zbiór wszystkich wartości funkcji nazywamy przeciwdziedziną i piszemy $\mathcal{R}$ lub $\mathcal{R}_f$.

Uwaga.

Jeśli funkcję określa tylko wzór, bez jawnego określenia dziedziny, to zbiór elementów należących do X, dla których ten wzór ma sens, nazywamy **dziedziną naturalną** funkcji.

UWAGA.
Podanie jawne dziedziny lub wyznaczenie dziedziny naturalnej jest częścią definicji funkcji, jest więc niezbędne. Jednak wyznaczenie przeciwdziedziny nie jest dla prawidłowego zdefiniowania funkcji potrzebne, często jest trudne.

PRZYKŁAD.

I. $f(x) = \sqrt{4-(x-4)^2} \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{D} \quad , \ \mathcal{R} \quad .$

II. $g(x) = \sqrt{4-(x-4)^2} + \frac{1}{(x-3)(x-5)} \qquad \rightarrow \quad \mathcal{D} \quad , \ \mathcal{R} \quad .$

Niech $f : \mathbf{R} \supset X \rightarrow Y \subset \mathbf{R}$, $y = f(x)$ będzie funkcją rzeczywistą (jednej zmiennej).

Definicja 1 *Zbiór* $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y = f(x), x \in X\}$ *nazywamy wykresem funkcji* f *w* X.

UWAGA.
Każda prosta postaci $x = a, a \in \mathbf{R}$ przecina wykres funkcji co najwyżej w jednym punkcie.

Definicja 2 *Dwie funkcje* f_1 *oraz* f_2 *są równe, jeśli* $\mathcal{D}_{f_1} = \mathcal{D}_{f_2}$ *oraz dla każdego* x *należącego do dziedziny mamy* $f_1(x) = f_2(x)$. *Piszemy wtedy* $f_1 \equiv f_2$.

UWAGA.
Zatem dwie funkcje o różnych dziedzinach są różne. Na przykład $f_1(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ oraz $f_2(x) = x-1$ są różne mimo, że dla każdego $x \neq -1$ mamy $f_1(x) = f_2(x)$. Jest to konsekwencją tego, że $\mathcal{D}_{f_1} = \mathbf{R} \setminus \{-1\} \neq \mathbf{R} = \mathcal{D}_{f_2}$.

Definicja 3 *Funkcję* $f : X \rightarrow Y$ *nazywamy różnowartościową w zbiorze* X *gdy*

$$\bigwedge_{x_1,x_2 \in X} [x_1 \neq x_2] \Rightarrow [f(x_1) \neq f(x_2)] \, .$$

UWAGA.
Funkcję różnowartościową nazywamy również funkcją **wzajemnie jednoznaczną**. Zapisujemy ten fakt symbolem $1:1$.

PRZYKŁAD.
Zbadaj różnowartościowość funkcji:

1. $f(x) = \frac{x+5}{x-3}$,
2. $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$,
3. $h(x) = x^2 + 2x - 3$.

Niech dane będą dwie funkcje $f : X \to U$ oraz $g : W \to Y$. Niech ponadto $\mathcal{R}_f \subset \mathcal{D}_g$. Zatem

$$f : X \ni x \to u = f(x) \in \mathcal{R}_f \quad \text{oraz} \quad g : \mathcal{D}_g \ni u \to y = g(u) \in Y \ .$$

Można więc przyporządkować argumentowi $x \in X$ wartość $y = g(u) = g(f(x)) \in Y$. W ten sposób zdefiniowaliśmy nową funkcję

$$h : X \to Y \quad \text{daną wzorem} \quad h(x) = g(f(x)) \ .$$

Funkcję h nazywamy **złożeniem** lub **superpozycją** funkcji f i g i piszemy $h = g \circ f$. Funkcję f nazywamy funkcją **wewnętrzną**, a g funkcją **zewnętrzną** tego złożenia.

UWAGA.
Jeśli nie zachodzi warunek $\mathcal{R}_f \subset \mathcal{D}_g$, to składać funkcje f i g można tylko w pewnym podzbiorze zbioru X, mianowicie takim $A \subset X$, dla którego zawężenie funkcji f - oznaczmy je przez $\tilde{f}$ - ma zbiór wartości $\mathcal{R}_{\tilde{f}}$ zawarty w dziedzinie funkcji g.

UWAGA.
Złożenie funkcji na ogół nie jest przemienne, tzn.

$$g \circ f \neq f \circ g \ .$$

PRZYKŁAD.
Wyznaczyć, o ile to możliwe, złożenia $g \circ f$ i $f \circ g$ dla funkcji

1. $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = -2 + \sin x$,
2. $f(x) = \log x$ i $g(x) = 1 - x^2$.

Definicja 4 *Funkcję $g : Y \to X$ nazywamy funkcją* **odwrotną** *do funkcji $f : X \to Y$ jeśli dla każdego elementu $x \in X$ zachodzi równość $g(f(x)) = x$ oraz dla każdego elementu $y \in Y$ zachodzi równość $f(g(y)) = y$.*

UWAGA.
Funkcję odwrotną oznaczamy symbolem f^{-1}.

Twierdzenie 1 *Jeśli funkcja $f : X \to Y$ jest różnowartościowa w X, to istnieje funkcja odwrotna do niej.*

PRZYKŁADY.
Wyznacz funkcje odwrotne do

1. $f(x) = \frac{x+5}{x-3}$,
2. $h(x) = x^2 + 2x - 3$ w zbiorze $(-\infty, -1]$.

UWAGA.
Zauważmy, że funkcja odwrotna do $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$ istnieje, ale nie jesteśmy w stanie jej wyznaczyć.

UWAGA.
Jeśli funkcja $g : Y \to X$, $g(y) = x$ jest funkcją odwrotną do funkcji $f : X \to Y$, $f(x) = y$, to w prostokątnym układzie współrzędnych XOY wykresy obu funkcji są identyczne, gdyż równania $g(y) = x$ i $f(x) = y$ wyznaczają ten sam zbiór.
Jeśli jednak w definicji funkcji odwrotnej g zamienimy y i x rolami, po to by argumentem funkcji g był zgodnie z naszymi przyzwyczajeniami x, to wykres funkcji g będzie obrazem wykresu funkcji f w symetrii osiowej względem prostej $y = x$.

PRZYKŁAD.
Funkcją odwrotną do $f(x) = x^3$ jest $g(y) = \sqrt[3]{y}$. Wykresem obu funkcji jest krzywa jak na rysunku. Zamieniając y na x w definicji funkcji odwrotnej g otrzymujemy $g(x) = \sqrt[3]{x}$, której wykres jest odbiciem wykresu funkcji f względem prostej $y = x$.

Definicja 5 *Funkcję* $f : X \to Y$ *nazywamy* **rosnącą** *w przedziale* (a, b), *jeśli*

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in(a,b)} [x_1 < x_2] \Rightarrow [f(x_1) \leqslant f(x_2)] \,.$$

Definicja 6 *Funkcję* $f : X \to Y$ *nazywamy* **ściśle rosnącą** *w przedziale* (a, b), *jeśli*

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in(a,b)} [x_1 < x_2] \Rightarrow [f(x_1) < f(x_2)] \,.$$

Definicja 7 *Funkcję* $f : X \to Y$ *nazywamy* **malejącą** *w przedziale* (a, b), *jeśli*

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in(a,b)} [x_1 < x_2] \Rightarrow [f(x_1) \geqslant f(x_2)] \,.$$

Definicja 8 *Funkcję* $f : X \to Y$ *nazywamy* **ściśle malejącą** *w przedziale* (a, b), *jeśli*

$$\bigwedge_{x_1,x_2\in(a,b)} [x_1 < x_2] \Rightarrow [f(x_1) > f(x_2)] \,.$$

Definicja 9 *Mówimy, że funkcja jest* **monotoniczna** *w przedziale* (a, b), *jeśli jest w tym przedziale rosnąca lub malejąca.*

PRZYKŁAD.
Funkcja $f : x \longrightarrow \operatorname{tg} x$ rośnie w każdym z przedziałów postaci $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, nie rośnie jednak w sumie przedziałów tej postaci. Np. dla $x_1 = 0 < \frac{3\pi}{4} = x_2$ mamy $f(x_1) = 0 > -1 = f(x_2)$.

Twierdzenie 2 *Niech funkcja* $g : (c, d) \longrightarrow (a, b)$ *będzie funkcją odwrotną do funkcji* $f : (a, b) \longrightarrow (c, d)$. *Wtedy*

1. *jeśli* f *jest rosnąca, to* g *jest rosnąca,*
2. *jeśli* f *jest malejąca, to* g *jest malejąca.*

Twierdzenie 3 *Złożenie dwóch funkcji, które są jednocześnie rosnące lub jednocześnie malejące jest funkcją rosnącą. Złożenie funkcji rosnącej i malejącej (w dowolnej kolejności) jest funkcją malejąca.*

Uwaga.
W szczególności dla $x > 0$ mamy

1. jeśli $f(x)$ jest rosnąca, to $f(1/x)$ jest malejąca,
2. jeśli $f(x)$ jest malejąca, to $f(1/x)$ jest rosnąca.

Zadanie.
Zbadać monotoniczność funkcji
$f(x) = \frac{x+2}{x^2+4}$,

Definicja 10 *Funkcję* $f : X \to Y$ *nazywamy* **parzystą**, *jeśli*
$$\bigwedge_{x \in X} \left(-x \in X \ \wedge \ f(x) = f(-x)\right) \ .$$
Definicja 11 *Funkcję* $f : X \to Y$ *nazywamy* **nieparzystą**, *jeśli*
$$\bigwedge_{x \in X} \left(-x \in X \ \wedge \ f(x) = -f(-x)\right) \ .$$

Przykłady.
Zbadać parzystość funkcji

I. $f(x) = \frac{(x^3+5x^2+3x-9)(x^3-x^2-5x-3)}{x^2+4x+3}$,

II. $f(x) = \frac{2^x-3^x}{2^x+3^x}$,

Definicja 12 *Funkcję* $f : X \to Y$ *nazywamy* **okresową**, *jeśli*
$$\bigvee_{T>0} \bigwedge_{x \in X} \left(x \pm T \in X \ \wedge \ f(x+T) = f(x)\right) \ .$$

Liczbę T nazywamy okresem funkcji f.
Najmniejszą z liczb T, o których mowa w powyższej definicji nazywamy **okresem podstawowym** funkcji f.

Przykłady.
I. $f(x) = \sin x \qquad \to X = \mathbf{R}$, $T = 2\pi$ lub dowolna wielokrotność 2π,

II. $g(x) = \operatorname{ctg} x \qquad \to X = \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$, $T = \pi$ lub dowolna wielokrotność π,

3 Funkcje elementarne.

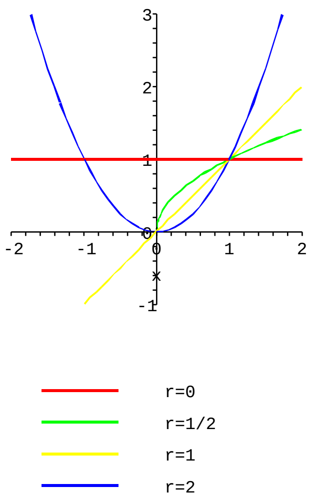
Funkcjami elementarnymi nazywamy: funkcje wymierne (w tym: wielomiany), wykładnicze, trygonometryczne, odwrotne do wymienionych (w tym: funkcje algebraiczne, logarytmiczne, cyklometryczne) oraz wszystkie funkcje otrzymywane w wyniku skończenie wielu działań arytmetycznych lub złożeń tych funkcji.

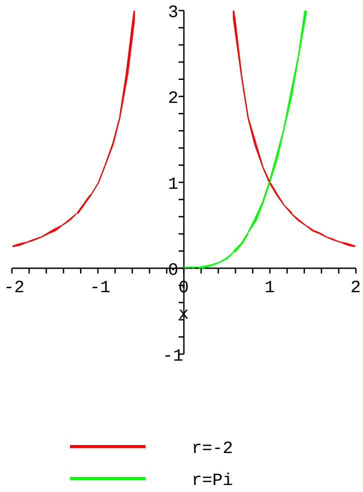
3.1 Przegląd funkcji elementarnych.

I. Funkcja potęgowa.

$$f : x \to x^r \ , \ r \in \mathbf{R} \ .$$

$$\mathcal{D}_f = \begin{cases} \mathbf{R}_+ & , \ r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}, \\ \mathbf{R} \setminus \{0\} & , \ r \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}, \\ \mathbf{R} & , \ r \in \mathbf{N} \ . \end{cases}$$





WŁASNOŚCI FUNKCJI POTĘGOWEJ.

1. funkcja potęgowa jest parzysta dla $r = 2k \ , \ k \in \mathbf{Z}$ i nieparzysta dla $r = 2k+1 \ , \ k \in \mathbf{Z}$.

2. zawężenie funkcji potęgowej $f : x \to x^r \ , \ r \in \mathbf{R}$ do zbioru $\mathbf{R}_+$ jest zatem funkcją różnowartościową dla dowolnego $r \neq 0$.

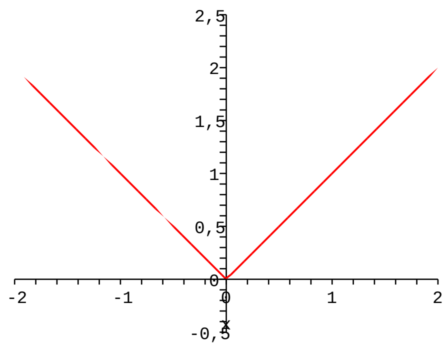
3. funkcją odwrotną do funkcji potęgowej $f : \mathbf{R}_+ \ni x \to x^r = y \ , \ r \neq 0$ jest funkcja potęgowa $g : \mathbf{R}_+ \ni y \to y^{1/r}$.

4. jeśli $r = 2k+1$, $k \in \mathbf{Z}$, to funkcja $f : \mathbf{R} \ni x \to x^r$ jest różnowartościowa w całej dziedzinie, zatem funkcją odwrotną do niej jest $g : y \to y^{1/r}$, przy czym $\mathcal{D}_g = \mathcal{R}_f$.

Uwaga. Funkcja **wartość bezwzględna (moduł)**

$$|x| = \begin{cases} x & , \ x \geqslant 0 \\ -x & , \ x < 0 \end{cases}$$

jest funkcją elementarną gdyż $|x| = \sqrt{x^2}, x \in \mathbf{R}$ - jest więc złożeniem funkcji kwadratowej i funkcji do niej odwrotnej.



II. Wielomian.

Wyrażenie $a \cdot x^n$, gdzie a jest pewną stałą rzeczywistą, n jest ustaloną liczbą całkowitą nieujemną, a x zmienną nazywamy **jednomianem** zmiennej x, zaś n - stopniem, a a - współczynnikiem jednomianu $a \cdot x^n$.

Wielomian (funkcja wielomianowa):

$$f : x \to a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \ .$$

$\mathcal{D}_f = \mathbf{R}$.
Jeśli $a_n \neq 0$, to mówimy, że f jest wielomianem stopnia n.

W szczególności:
gdy $n = 2$, to mówimy, że f jest wielomianem stopnia 2 lub funkcją **kwadratową**,
gdy $n = 1$, to mówimy, że f jest wielomianem stopnia 1 lub funkcją **liniową**,
gdy $n = 0$, to mówimy, że f jest wielomianem stopnia 0 lub funkcją **stałą**.

Własności wielomianów.

1. Wielomian jest funkcją parzystą $\Leftrightarrow \bigwedge_{k \in \mathbf{N}} a_{2k+1} = 0$.

   Wielomian jest funkcją nieparzystą $\Leftrightarrow \bigwedge_{k \in \mathbf{N}} a_{2k} = 0$.

2. Wielomian stopnia n ma co najwyżej n miejsc zerowych.
3. Wielomian stopnia n ma co najwyżej $n - 1$ ekstremów.
4. Suma, różnica, iloczyn, złożenie dwóch wielomianów jest wielomianem.
5. $$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} a_n \cdot x^n = \begin{cases} +\infty & \text{gdy } a_n > 0, \\ -\infty & \text{gdy } a_n < 0. \end{cases}$$

III. Funkcja wymierna.

Funkcja wymierna to iloraz dwóch wielomianów, zatem

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

przy czym Q nie jest wielomianem zerowym.
$\mathcal{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{x : Q(x) = 0\}$.

W szczególnych przypadkach:
gdy $Q(x) \equiv c$, $c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, to funkcja wymierna jest wielomianem,
gdy $P(x) = ax + b$, $Q(x) = cx + d$, $ad - bc \neq 0$, to funkcja wymierna jest postaci

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

i nazywamy ją funkcją **homograficzną** $\quad \rightarrow$ patrz własności funkcji homograficznej.

Własności funkcji wymiernej.

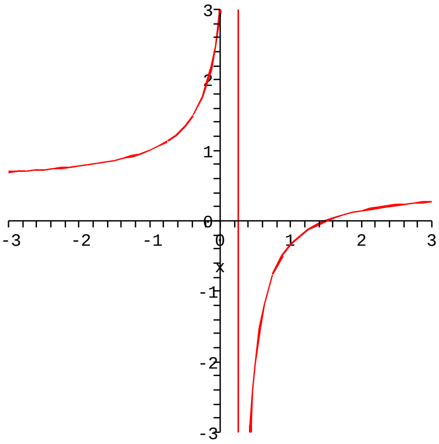
1. Jeśli P i Q z definicji funkcji wymiernej nie mają wspólnych dzielników, to każda prosta postaci $x = c$, gdzie $c \in \{x : Q(x) = 0\}$ jest asymptotą pionową funkcji f.
2. Jeśli $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, to prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą funkcji f.
   Jeśli $\operatorname{st} P = \operatorname{st} Q = n$ oraz $P(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n, Q(x) = b_0 + \ldots + b_n x^n$ to prosta $y = \frac{a_n}{b_n}$ jest asymptotą poziomą funkcji f.
   Jeśli $\operatorname{st} P = \operatorname{st} Q + 1$, to funkcja f posiada asymptotę ukośną.
3. Suma, różnica, iloczyn, iloraz, złożenie dwóch funkcji wymiernych jest funkcją wymierną.

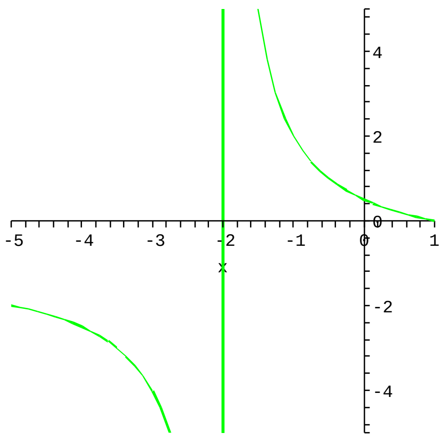
Własności funkcji homograficznej $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$.

1. Funkcję homograficzną można przedstawić w postaci

$$f(x) = \frac{1}{c}\left(a + \frac{bc - ad}{cx + d}\right) \; ,$$

   jest więc złożeniem funkcji liniowej i funkcji odwrotność.
2. $\mathcal{D}_f = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, $\mathcal{R}_f = \mathbf{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$
3. Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola (równoosiowa), której asymptotą poziomą jest prosta $y = -\frac{d}{c}$, zaś pionową prosta $x = \frac{a}{c}$.
4. Funkcja homograficzna jest różnowartościowa w całej swojej dziedzinie.
5. Funkcją odwrotną do $f : x \to \frac{ax+b}{cx+d} = y$, $ad - bc \neq 0$ jest funkcja homograficzna $g : y \to \frac{-dy+b}{cy-a}$.
6. Funkcja homograficzna jest bądź malejąca bądź rosnąca w każdym z przedziałów $(-\infty, -\frac{d}{c})$ oraz $(-\frac{d}{c}, \infty)$.





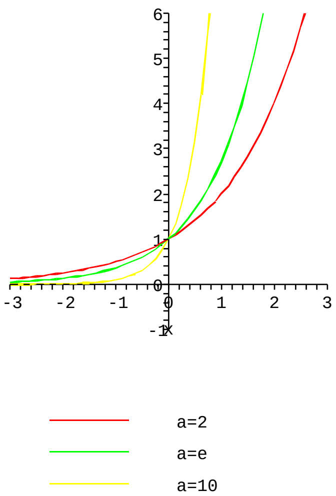
$f(x) = \frac{2x-3}{4x-1}$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1-x}{x+2}$

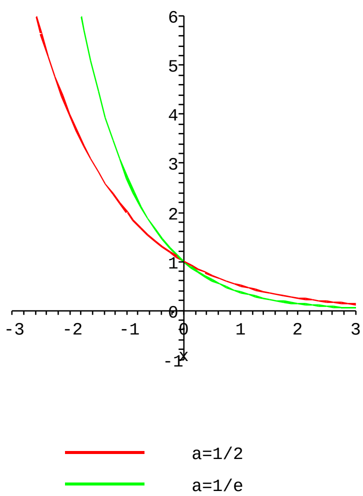
UWAGA.
Jeśli f jest malejąca (rosnąca) w każdym z przedziałów $(-\infty, -\frac{d}{c})$ oraz $(-\frac{d}{c}, \infty)$, to nie znaczy to, że f jest malejąca (rosnąca) w całej dziedzinie!
Dla przykładu funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ maleje osobno w $(-\infty, 0)$ oraz w $(0, \infty)$, ale nie maleje w zbiorze $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, gdyż np. dla $x_1 = -1 < 1 = x_2$ nie jest prawdą, że $f(x_1) = -1 > 1 = f(x_2)$.

IV. Funkcja wykładnicza.

$$f : \mathbf{R} \ni x \to a^x \ , \ a > 0 \ , \ a \neq 1 \ .$$

$\mathcal{D}_f = \mathbf{R} \quad , \quad \mathcal{R}_f = \mathbf{R}_+$





Własności funkcji wykładniczej.

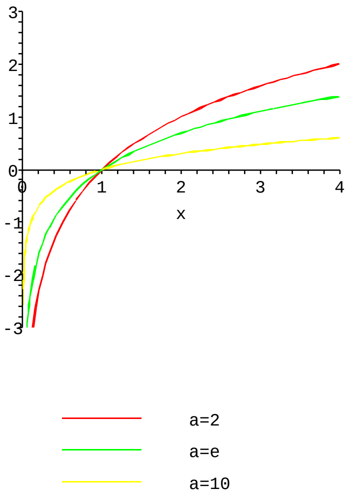
1. Funkcja wykładnicza jest różnowartościowa w całej dziedzinie.
2. Funkcją odwrotną do $f : x \to a^x = y$, $a > 0$, $a \neq 1$ jest funkcja $g : y \to \log_a y$.
3. Jeśli $a > 1$, to funkcja $f : x \to a^x$ jest rosnąca w $\mathbf{R}$.
   Jeśli $0 < a < 1$, to funkcja $f : x \to a^x$ jest malejąca w $\mathbf{R}$.
4. Prosta $y = 0$ jest aymptotą poziomą funkcji wykładniczej.

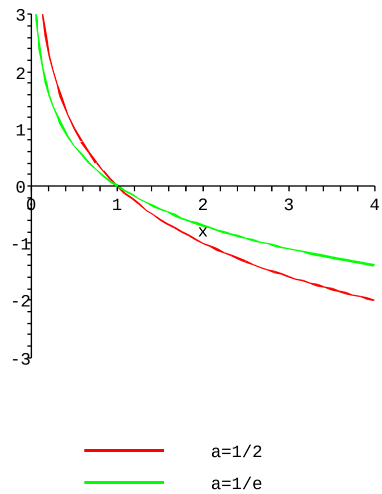
W szczególności (gdy $a = e$) funkcję $f(x) = e^x$ nazywamy funkcją **exponens**, piszemy również $f(x) = \exp(x)$.

V. Funkcja logarytmiczna.

$$f : \mathbf{R}_+ \ni x \to \log_a x \ , \ a > 0 \ , \ a \neq 1 \ .$$

$\mathcal{D}_f = \mathbf{R}_+$, $\mathcal{R}_f = \mathbf{R}$





Własności funkcji logarytmicznej.

1. Funkcja logarytmiczna jest różnowartościowa w całej dziedzinie.
2. Funkcją odwrotną do $f : x \to \log_a x = y$, $a > 0$, $a \neq 1$ jest funkcja $g : y \to a^y$.
3. Jeśli $a > 1$, to funkcja $f : x \to \log_a x$ jest rosnąca w $\mathbf{R}_+$.
   Jeśli $0 < a < 1$, to funkcja $f : x \to \log_a x$ jest malejąca w $\mathbf{R}_+$.

4. Prosta $x = 0$ jest aymptotą pionową funkcji logarytmicznej.

VI. Funkcje trygonometryczne.

Funkcje $\sin$, $\cos$, tg, ctg definiuje się jako funkcje zmiennej rzeczywistej będącej łukową miarą kąta skierowanego.
W przypadku kąta ostrego funkcje trygonometryczne można określić jako proporcje boków w trójkącie prostokątnym.

WŁASNOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH.

	$\sin$	$\cos$	tg	ctg
dziedzina	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$	$\mathbf{R}\setminus\{k\pi\}$
przeciwdziedzina	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
Parzystość/Nieparzystość	N	P	N	N
okresowość	$T=2\pi$	$T=2\pi$	$T=\pi$	$T=\pi$
różnowartościowość*	$[-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi]$	$[k\pi,\pi+k\pi]$	$(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$	$(k\pi,\pi+k\pi)$
ekstrema	$\frac{\pi}{2}+k\pi$	$k\pi$	$-$	$-$
asymototy pionowe	$-$	$-$	$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$	$x=k\pi$

* różnowartościowość w każdym z przedziałów
$k \in \mathbf{Z}$

UWAGA.
Funkcje trygonometryczne nie są różnowartościowe w swych dziedzinach. Nie posiadają więc funkcji odwrotnych. Jeżeli jednak zawęzimy te funkcje do odpowiednich przedziałów, to otrzymamy funkcje różnowartościowe. Tak uzyskane zawężenia funkcji trygonometrycznych mają już funkcje odwrotne zwane funkcjami **cyklometrycznymi**.

funkcja	dziedzina zawężona	funkcja odwrotna
$\sin$	$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$	$\arcsin$
$\cos$	$[0,\pi]$	$\arccos$
tg	$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$	arctg
ctg	$(0,\pi)$	arcctg

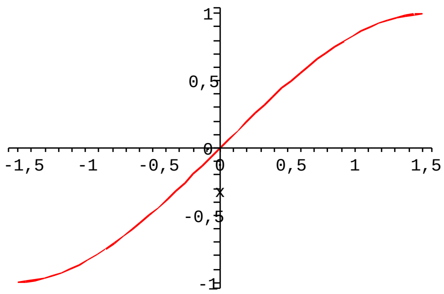
$\rightarrow$ wzory trygonometryczne (w tym wzory redukcyjne)

VII. Funkcje cyklometryczne.

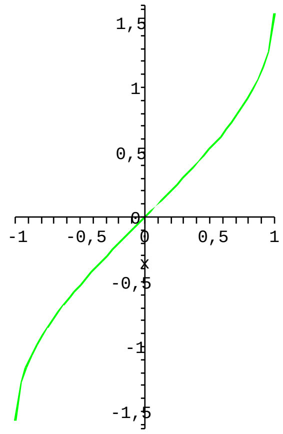
Funkcje cyklometryczne są funkcjami odwrotnymi do odpowiednio zawężonych funkcji trygonometrycznych.

funkcja prosta f	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{R}_f$	funkcja odwrotna g	$\mathcal{D}_g$	$\mathcal{R}_g$
$f : x \longrightarrow \sin x = y$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1, 1]$	$g : y \longrightarrow \arcsin y$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$f : x \longrightarrow \cos x = y$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	$g : y \longrightarrow \arccos y$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$f : x \longrightarrow \operatorname{tg} x = y$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\mathbf{R}$	$g : y \longrightarrow \operatorname{arctg} y$	$\mathbf{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$f : x \longrightarrow \operatorname{ctg} x = y$	$(0, \pi)$	$\mathbf{R}$	$g : y \longrightarrow \operatorname{arcctg} y$	$\mathbf{R}$	$(0, \pi)$

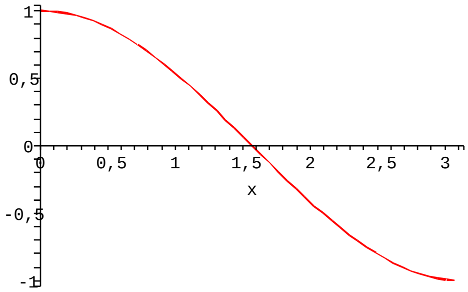
Wartości funkcji cyklometrycznych są więc łukowymi miarami kątów odpowiadających w zawężonej dziedzinie wartości stosownej funkcji trygonometrycznej.



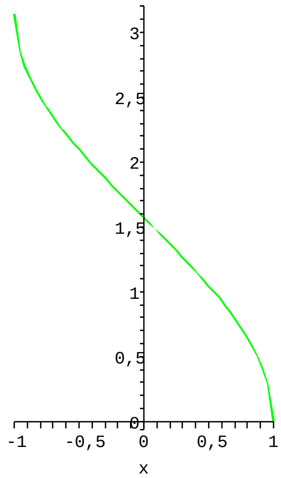
$y = \sin(x)$



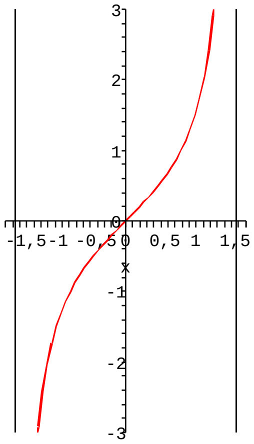
$y = \arcsin(x)$



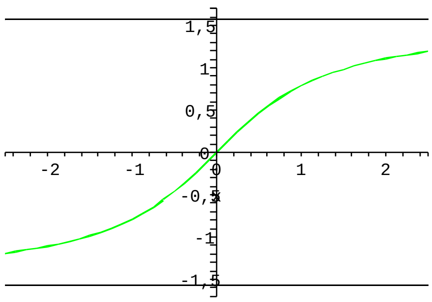
$y = \cos(x)$



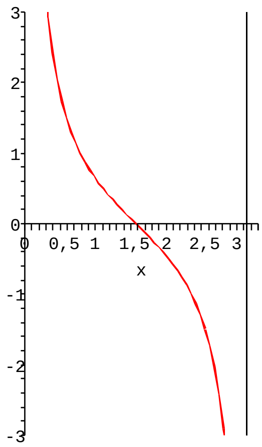
$y = \arccos(x)$



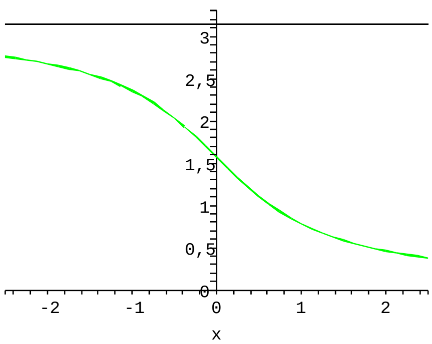
$y = \mathrm{tg}(x)$



$y = \mathrm{arctg}(x)$



$y = \mathrm{ctg}(x)$



$y = \mathrm{arcctg}(x)$

Przykład.
Mamy

$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, bo $\cos \frac{\pi}{2} = 0$,
$\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, bo $\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{4}) = -1$,
$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, bo $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Należy pamiętać o przeciwdziedzinie funkcji cyklometrycznej. Np.

$\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, ale $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$,
$\sin \pi = 0$, ale $\arcsin 0 = 0$,
$\operatorname{ctg}(-\frac{\pi}{4}) = -1$, ale $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$,
$\sin(\frac{\pi}{6} + 4\pi) = \frac{1}{2}$, ale $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

* monotoniczność w całej dziedzinie

Funkcje cyklometryczne są różnowartościowe w swych dziedzinach, posiadają więc funkcje odwrotne - są nimi odpowiednie funkcje trygonometryczne. Mamy więc wzory

$$\sin(\arcsin x) = x \ , \ |x| \leqslant 1 \ ,$$

$$\arcsin(\sin x) = x \ , \ |x| \leqslant \frac{\pi}{2} \ ,$$

oraz analogiczne wzory dla pozostałych funkcji cyklometrycznych.

Zadania.
I. Oblicz

a) $\operatorname{arctg}(2\sin(\arccos(-\frac{1}{2})))$,

b) $\sin(\operatorname{arctg}(\cos 0))$,

c) $\arccos(\sin(\operatorname{arcctg} 1))$.

II. Udowodnić, że

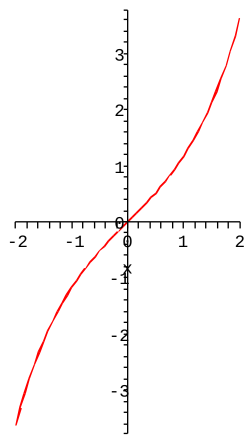
a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$,

b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1, 1]$.

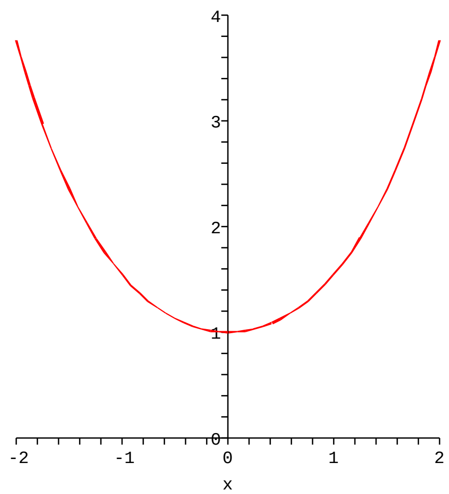
VIII. Funkcje hiperboliczne.

Definicja 13 *Funkcję* $f : x \to \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$*, której dziedziną jest zbiór* $\mathbf{R}$*, nazywamy funkcją* **sinus hiperboliczny** *i oznaczamy* $\sinh x$*.*
Funkcję $f : x \to \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right)$*, której dziedziną jest zbiór* $\mathbf{R}$*, nazywamy funkcją* **cosinus hiperboliczny** *i oznaczamy* $\cosh x$*.*

$\mathcal{R}_{\sinh} = \mathbf{R} \quad , \quad \mathcal{R}_{\cosh} = [1, \infty).$

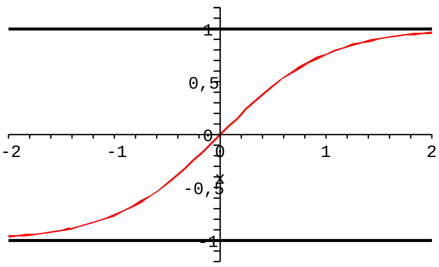


$y = \sinh(x)$

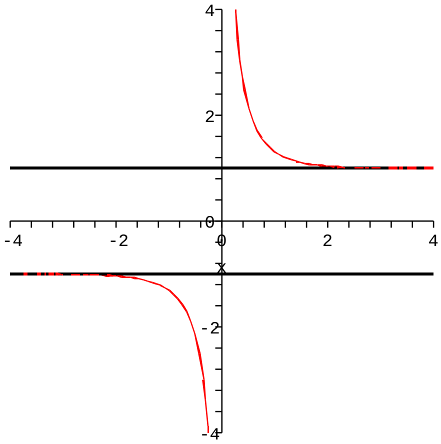


$y = \cosh(x)$

Definicja 14 *Funkcję* $f : x \to \frac{\sinh x}{\cosh x}$*, której dziedziną jest zbiór* $\mathbf{R}$*, nazywamy funkcją* **tangens hiperboliczny** *i oznaczamy* $\operatorname{tgh} x$*.*
Funkcję $f : x \to \frac{\cosh x}{\sinh x}$*, której dziedziną jest zbiór* $\mathbf{R} \setminus \{0\}$*, nazywamy funkcją* **cotangens hiperboliczny** *i oznaczamy* $\operatorname{ctgh} x$*.*



$y = \mathrm{tgh}(x)$



$y = \mathrm{ctgh}(x)$

$\mathcal{R}_{\mathrm{tgh}} = (-1, 1) \quad , \quad \mathcal{R}_{\mathrm{ctgh}} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Wykres funkcji $f(x) = \cosh x$ lub $g(x) = a \cosh \frac{x}{a}, a \neq 0$ nazywamy **krzywą łańcuchową**.

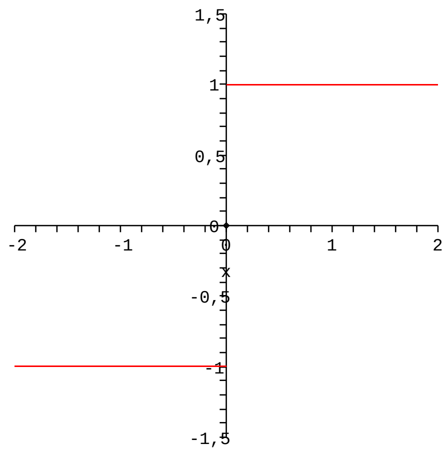
WYBRANE WZORY DOTYCZĄCE FUNKCJI HIPERBOLICZNYCH.

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
3. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
4. $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
5. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

IX. Przykłady funkcji nieelementarnych.

1. Funkcja signum.

$$\mathrm{sgn}\, x = \begin{cases} 1 & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ -1 & , \ x < 0 \end{cases} \quad , \quad \mathcal{D} = \mathbf{R} \ , \ \mathcal{R} = \{-1, 0, 1\} \ .$$



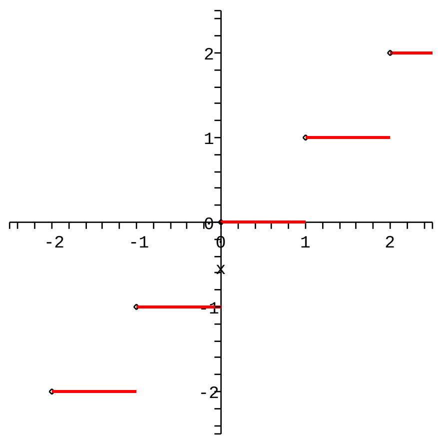
Zauważmy, że

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases} .$$

2. Funkcja całość.

$$[x] = \mathrm{Ent}(x) = \text{największa liczba całkowita nie większa od } x \ .$$

$\mathcal{D} = \mathbf{R}$, $\mathcal{R} = \mathbf{Z}$.



Dla $k \in \mathbf{Z}$ i dowolnego $x \in \mathbf{R}$ zachodzi: $k \leqslant x \leqslant k+1 \Rightarrow [x] = k$.
Na przykład:

$$[1917] = 1917 \ , \ [\pi] = 3 \ , \ [\sqrt{2}] = 1 \ , \ [-2.5] = -3 \ , \ [-\pi] = -4 \ .$$

3.2 Wielomiany i funkcje wymierne - dalsze własności.

I. Funkcja kwadratowa.

postać ogólna	$f(x) = ax^2 + bx + c\ ,\ a \neq 0$	
postać kanoniczna	$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\,(x-p)^2 + q$	$p = -\frac{b}{2a}\ ,\ q = -\frac{\Delta}{4a}$ są współrzędnymi wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f
postać iloczynowa	$f(x) = a(x - x_0)^2$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$, gdy $\Delta = 0$
	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ ,\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, gdy $\Delta > 0$

Twierdzenie 4 *Jeśli x_1, x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego $ax^2+bx+c = 0$ (zatem $a \neq 0, \Delta > 0$), to*

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{c} \qquad , \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{c} \qquad\qquad \textit{wzory Viete'a}$$

II. Wielomiany.

Dwa wielomiany $P(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ i $Q(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m$ są równe wtedy i tylko wtedy gdy

$$\operatorname{st} P = \operatorname{st} Q =: s \quad \text{oraz} \quad \bigwedge_{0 \leqslant j \leqslant s} a_j = b_j\ .$$

Wielomian $W(x)$ jest podzielny przez niezerowy wielomian $P(x)$ (piszemy wtedy $P(x)|W(x)$) wtedy i tylko wtedy gdy istnieje wielomian $Q(x)$ taki, że

$$W(x) = P(x) \cdot Q(x)\ .$$

Ogólnie, jeśli $W(x)$ i $P(x)$ są wielomianami ($P(x)$ - wielomian niezerowy), to istnieją wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$ takie, że

$$\operatorname{st} R < \operatorname{st} P =: s \quad \text{oraz} \quad W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)\ .$$

W powyższych równościach $Q(x)$ nazywamy ilorazem wielomianu $W(x)$ przez $P(x)$, zaś $R(x)$ - resztą z dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$. Powyższe wzory można zapisać w postaci

$$\frac{W(x)}{P(x)} = Q(x) \quad \text{oraz} \quad \frac{W(x)}{P(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{P(x)} \quad \text{dla } x \in \mathcal{D}_P\ .$$

→ algorytm dzielenia pisemnego wielomianów

Przykład.
I. Wielomian $W(x) = x^3 - x^2 + x - 6$ jest podzielny przez $P(x) = x^2 + x + 3$. Mamy $\frac{W(x)}{P(x)} = x - 2$ lub $W(x) = P(x)(x - 2)$.
II. Wielomian $W(x) = x^4 + 1$ nie jest podzielny przez $P(x) = x^2 + x + 1$. Ilorazem z dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$ jest $Q(x) = x^2 - x$,a resztą $R(x) = x + 1$. Zatem $\frac{x^4+1}{x^2+x+1} = x^2 - x + \frac{x+1}{x^2+x+1}$.

Twierdzenie 5 **(o rozkładzie wielomianu)** *Każdy wielomian jest iloczynem czynników stopnia co najwyżej drugiego.*

Zastosowanie → np. rozwiązywanie równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach

Twierdzenie 6 **(Bezout)** *Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy $W(x)$ jest podzielny przez $x - x_0$.*

Twierdzenie 7 **(o pierwiastkach całkowitych wielomianu)** *Jeśli liczba całkowita $p \neq 0$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ o współczynnikach całkowitych, to jest ona dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.*

Twierdzenie 8 **(o pierwiastkach wymiernych wielomianu)** *Jeśli liczba wymierna $\frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ o współczynnikach całkowitych, to p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0, a q jest dzielnikiem współczynnika a_n.*

Przykład.
I. Rozwiąż równanie $x^3 + 5x^2 + 9x + 9 = 0$.
Zauważmy, że $x_0 = -3$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x) = x^3 + 5x^2 + 9x + 9$.
Zatem $(x + 3)|W(x)$ i mamy

$$W(x) = (x + 3)(x^2 + 2x + 3) \ .$$

Stąd $W(x) = 0$ jest równoważne

$$x + 3 = 0 \quad \vee \quad x^2 + 2x + 3 = 0 \ ,$$

więc $x = -3$ jest jedynym pierwiastkiem równanie $x^3 + 5x^2 + 9x + 9 = 0$.
II. Znaleźć rozkład iloczynowy wielomianu $W(x) = x^7 - 3x^6 + 5x^5 - 7x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 3x - 1$.
Ponieważ $W(1) = 0$, więc

$$W(x) = (x-1)V(x) \quad , \quad V(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \ .$$

Ale

$$\begin{aligned} V(x) = (x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1) - 2x(x^4 - 2x^2 + 1) &= (x^2+1)^3 - 2x(x^2+1)^2 \\ &= (x^2+1)^2(x^2 - 2x + 1) = (x^2+1)^2(x-1)^2 \ . \end{aligned}$$

Stąd

$$W(x) = (x^2+1)^2(x-1)^3 \ .$$

ZADANIE.
Znaleźć rozkład iloczynowy wielomianu

1. $W(x) = x^4 + 4$,
2. $W(x) = 6x^3 + 23x^2 + 25x + 6$.

UWAGA.
Liczbę x_0 nazywamy k-krotnym pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy gdy $W(x)$ jest podzielny przez $(x - x_0)^k$, ale nie jest podzielny przez $(x - x_0)^{k+1}$.

III. Funkcje wymierne.

Szczególnymi przypadkami funkcji wymiernej są funkcje

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{oraz} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} \ ,$$

zwane **ułamkami prostymi** odpowiednio I i II typu. W powyższych ułamkach $n \in \mathbf{N}$, zaś A, B, C, a, p, q są stałymi rzeczywistymi, przy czym zakładamy, że $p^2 - 4q < 0$.

Niech dana będzie funkcja wymierna $\frac{P(x)}{Q(x)}$, Q nie jest wielomianem zerowym.

Mówimy, że funkcja wymierna jest ułamkiem właściwym, jeśli $\mathrm{st}\, P < \mathrm{st}\, Q$. W przeciwnym razie funkcja wymierna jest ułamkiem niewłaściwym.

Każdy ułamek niewłaściwy można przedstawić w postaci ułamka właściwego i wielomianu (wykonując dzielenie $P(x)$ przez $Q(x)$):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = V(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \; .$$

Twierdzenie 9 **(o rozkładzie funkcji wymiernej)** *Każda funkcja wymierna $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie Q nie jest wielomianem zerowym, będąca ułamkiem właściwym, jest sumą ułamków prostych.*

Aby uzyskać taki rozkład należy przedstawić $Q(x)$ w postaci iloczynowej. Następnie każdemu czynnikowi rozkładu postaci $(x-a)^n$ przypisujemy n ułamków I typu, zaś każdemu czynnikowi rozkładu postaci $(x^2+px+q)^n$, $p^2-4q<0$ przypisujemy n ułamków II typu, według zasady:

czynnik rozkładu mianownika	odpowiadający mu ułamek prosty
$x-a$	$\frac{A}{x-a}$
$(x-a)^n$	$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$
x^2+px+q	$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$
$(x^2+px+q)^n$	$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$

gdzie $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$. Na koniec wyznaczamy nieznane współczynniki rozkładu $\rightarrow$ metoda współczynników nieoznaczonych.

Przykład.

Wyznacz rozkład funkcji wymiernej na ułamki proste:

1. $f(x) = \frac{3x^2+6x+2}{x^3+3x^2+2x}$.

   Ponieważ $x^3+3x^2+2x = x(x+1)(x+2)$ przewidujemy, że $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}$ i wyznaczamy A, B, C. Jest $A = B = C = 1$, skąd $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$.

2. $f(x) = \frac{1}{x^4+4x^2}$.