Całka krzywoliniowa - ćwiczenia

Zadanie 1.

Korzystając z Twierdzenia 1 z wykładu obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną daną równaniem parametrycznym.

(a) $\int\limits_K y\ dx + z\ dy + x\ dz$, gdzie K jest łamaną $ABCD$, gdzie $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (1,1,0)$, $D = (1,1,1)$,

(b) $\int\limits_K y(x-y)\ dx + x\ dy$, gdzie K jest dana parametryzacją: $x(t) = t$, $y(t) = 2t^2$, gdzie $t \in [0,1]$,

(c) $\int\limits_K x\ dx + y\ dy + z\ dz$, gdzie K jest dana parametryzacją: $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = 1-t$, gdzie $t \in [0,1]$,

(d) $\int\limits_K xy\ dx + (y-x)\ dy + z\ dz$, gdzie K jest dana parametryzacją: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$

(e) $\int\limits_K -zy\ dx + xz\ dy + xy\ dz$, gdzie K jest dana parametryzacją: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z = t$ gdzie $t \in [0, 2\pi]$

Rozwiązanie przykładu (a):

Piszemy równania parametryczne kolejnych odcinków łamanej (korzystamy ze wzoru na parametryzację odcinka w przestrzeni):

$$\text{AB:} \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0, \text{ gdzie } \ t \in [0,1], \end{cases} \qquad \text{BC:} \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = t \\ z(t) = 0, \text{ gdzie } \ t \in [0,1], \end{cases} \qquad \text{CD:} \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = 1 \\ z(t) = t, \text{ gdzie } \ t \in [0,1]. \end{cases}$$

Obliczamy poszczególne całki krzywoliniowe skierowane wzdłuż każdego z łuków.

Dla parametryzacji łuku AB mamy $x'(t) = 1,\ y'(t) = 0,\ z'(t) = 0$. Podstawiając do wzoru z Twierdzenia 1, mamy

$$\int\limits_{AB} y\ dx + z\ dy + x\ dz = \int\limits_0^1 (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + t \cdot 0)\ dt = 0.$$

Dla parametryzacji łuku BC mamy $x'(t) = 0,\ y'(t) = 1,\ z'(t) = 0$, wtedy

$$\int\limits_{BC} y\ dx + z\ dy + x\ dz = \int\limits_0^1 (t \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0)\ dt = 0.$$

Analogicznie, dla parametryzacji łuku CD mamy $x'(t) = 0,\ y'(t) = 0,\ z'(t) = 1$. Otrzymujemy

$$\int\limits_{CD} y\ dx + z\ dy + x\ dz = \int\limits_0^1 (1 \cdot 0 + t \cdot 0 + 1 \cdot 1)\ dt = \int\limits_0^1 1\ dt = t|_0^1 = 1.$$

Ostatecznie, szukana całka jest sumą wszystkich całek, zatem

$$\int\limits_K y\ dx + z\ dy + x\ dz = 0 + 0 + 1 = 1.$$

Zadanie 2.

Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną daną równaniem funkcyjnym.

Jeżeli równanie krzywej K jest dane równaniem $y = y(x)$ dla $x \in [a, b]$, to

$$\int_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right]\ dx.$$

(a) $\int\limits_K xy\ dx - x^2\ dy$, gdzie K jest łukiem hiperboli $y = \frac{1}{x}$ dla $x \in [1, 4]$,

(b) $\int\limits_K \frac{y}{x}\ dx + \frac{x}{y}\ dy$, gdzie K jest łukiem paraboli $y = x^2$ dla $x \in [-1, 1]$,

(c) $\int\limits_K 2xy\ dx + x^2\ dy$, gdzie K jest łukiem paraboli $y = x^2$ dla $x \in [0, 1]$.

Rozwiązanie przykładu (c):

Liczymy pochodną $y'(x) = 2x$. Korzystając ze wzoru mamy:

$$\begin{aligned} \int\limits_K 2xy\ dx + x^2\ dy &= \int\limits_0^1 \left(2x \cdot x^2 + x^2 \cdot 2x\right)\ dx \\ &= \int\limits_0^1 4x^3\ dx = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}x^4\right)_0^1 = 1. \end{aligned}$$

Zadanie 3.

Korzystając z Twierdzenia 2 z wykładu obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną daną równaniem parametrycznym.

(a) $\int\limits_K (x^2 + y^2)\ dl$, gdzie K jest odcinkiem AB, gdzie $A = (2, 1)$, $B = (3, 2)$

(b) $\int\limits_K (x + y)\ dl$, gdzie K jest obwodem trójkąta o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (0, 1)$ i $C = (1, 0)$

(c) $\int\limits_K \frac{xz}{1+2y}\ dl$, gdzie K jest dana parametryzacją $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $z(t) = \frac{2}{3}t^3$, gdzie $t \in [0, 1]$,

(d) $\int\limits_K (x^2 + y^2 + z^2)\ dl$, gdzie K jest dana parametryzacją $x(t) = 4\sin t$, $y(t) = 4\cos t$, $z(t) = 3t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$,

(e) $\int\limits_K xy\ dl$, gdzie K jest dana parametryzacją $x(t) = 2\cos t$, $y(t) = 2\sin t$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$.

Rozwiązanie przykładu (a):

Piszemy równania parametryczne odcinka AB (korzystamy ze wzoru na parametryzację odcinka na płaszczyźnie):

$$AB : \begin{cases} x(t) = 2 + t \\ y(t) = 1 + t, \ \text{gdzie} \ \ t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Dla parametryzacji odcinka AB obliczamy pochodne $x'(t) = 1,\ y'(t) = 1$. Podstawiając do wzoru z Twierdzenia 2, mamy

$$\begin{aligned}\int\limits_K (x^2+y^2)\ dl &= \int\limits_0^1 ((2+t)^2+(1+t)^2)\sqrt{1^2+1^2}\ dt = \sqrt{2}\int\limits_0^1 (2t^2+6t+5)\ dt \\ &= \sqrt{2}(\frac{2}{3}t^3+3t^2+5t)|_0^1 = \sqrt{2}(\frac{2}{3}+3+5) = 8\frac{2}{3}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Rozwiązanie przykładu (d):
Dla parametryzacji krzywej K obliczamy pochodne $x'(t) = 4\cos t,\ y'(t) = -4\sin t,\ z'(t) = 3$. Podstawiając do wzoru z Twierdzenia 2 oraz korzystając z "jedynki trygonometrycznej", mamy

$$\begin{aligned}\int\limits_K (x^2+y^2+z^2)\ dl &= \int\limits_0^1 \Big((4\sin t)^2+(4\cos t)^2+(3t)^2\Big)\sqrt{(4\cos t)^2+(-4\sin t)^2+3^2}\ dt \\ &= \int\limits_0^1 (16+9t^2)\sqrt{16+9}\ dt = 5\int\limits_0^1 (16+9t^2)\ dt \\ &= 5(16t+3t^3)|_0^1 = 95\end{aligned}$$

Zadanie 4.

Obliczyć całkę krzywoliniową nieskierowaną daną równaniem funkcyjnym.

Jeżeli równanie krzywej K jest dane równaniem $y = y(x)$ dla $x \in [a,b]$, to

$$\int_K f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx\ .$$

(a) $\int\limits_K \frac{1}{x-y}\ dl$, gdzie K jest odcinkiem prostej $y = \frac{1}{2}x-2$ dla $x \in [0,4]$,

(b) $\int\limits_K y\ dl$, gdzie K jest krzywą $y = 2\sqrt{x}$, $x \in [0,1]$,

(c) $\int\limits_K \frac{x}{y^4}\ dl$, gdzie K jest krzywą $y = \frac{1}{x}$, $x \in [1,2]$,

(d) $\int\limits_K y^2\sqrt{1+x}\ dl$, gdzie K jest krzywą $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $x \in [0,3]$.

Rozwiązanie przykładu (a):

Liczymy pochodną $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$. Korzystając ze wzoru mamy:

$$\begin{aligned}\int\limits_K \frac{1}{x-y}\ dl &= \int\limits_0^4 \frac{1}{x-(\frac{1}{2}x-2)}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\ dx \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_0^4 \frac{1}{\frac{1}{2}x+2}\ dx = \sqrt{5}\left[\ln\left|\frac{1}{2}x+2\right|\right]_0^4 = \sqrt{5}\ln 2.\end{aligned}$$