1 Geomatria analityczna w $\mathbb{R}^3$

Przestrzenią $\mathbb{R}^3$ nazywamy zbiór uporządkowanych trójek liczb rzeczywistych. Zatem $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Pojęciami pierwotnymi, czyli takimi których się nie definiuje, są: **punkt**, **prosta** i **płaszczyzna**. **Wektorem** nazywamy uporządkowaną parę punktów, oznaczamy go $\overrightarrow{u}$ lub $\overrightarrow{AB}$. Pierwszy z punktów nazywamy początkiem wektora, drugi - końcem. Kierunkiem wektora niezerowego nazywamy kierunek prostej wyznaczonej przez ten wektor. Zwrotem wektora $\overrightarrow{AB}$ nazywamy zwrot półprostej o początku A i przechodzącej przez B. Wektor zerowy $\overrightarrow{0}$ (w którym początek pokrywa się z końcem) nie ma kierunku ani zwrotu. Długość wektora $\overrightarrow{AB}$ to długość odcinka łączącego punkty A i B.

Układem współrzędnych kartezjańskich jest układ trzech ustalonych wzajemnie prostopadłych prostych przecinających się w punkcie O zwanym **początkiem układu**. Osie nazwane Ox, Oy i Oz tworzą układ prawoskrętny. Oznacza to, że obserwując płaszczyznę xOy z dowolnego punktu na dodatniej półosi Oz widzimy, że w wyniku obrotu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara kąt o początkowym ramieniu Ox i końcowym Oy ma miarę $\pi/2$. Na każdej z osi wektor o początku w O o zwrocie zgodnym ze zwrotem osi i długości 1, zwany **wersorem**, określa jednostkę osi. Dzięki temu można określić współrzędne dowolnego punktu przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wersory osi układu współrzęnych oznaczamy symbolami $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$.

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ definiujemy działania na wektorach analogicznie jak w $\mathbb{R}^2$:

- dodawanie wektorów, piszemy $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ - wektor wypadkowy zgodnie z regułą równoległoboku,
- mnożenie wektora przez liczbę rzeczywistą k, piszemy $k \cdot \overrightarrow{u}$ - skalowanie wektora w skali $|k|$ przy zachowaniu zwrotu gdy $k > 0$ i zmianie zwrotu na przeciwny gdy $k < 0$,
- odejmowanie wektorów, piszemy $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ - wzorem $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} := \overrightarrow{u} + (-1) \cdot \overrightarrow{v}$.

W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ definiujemy także następujące iloczyny wektorów:

- iloczyn skalarny wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ (analogicznie jak w $\mathbb{R}^2$)
- iloczyn wektorowy wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$
- iloczyn mieszany wektorów $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$.

Mówimy, że wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ są **współliniowe**, jeśli istnieje liczba $k \in \mathbb{R}$ taka, że $\overrightarrow{u} = k \cdot \overrightarrow{v}$. Inaczej mówiąc, wektory są współliniowe jeśli wyznaczają jeden kierunek, czyli są równoległe. Mówimy, że wektory $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{w}$ są **współpłaszczyznowe**, jeśli są równoległe do tej samej płaszczyzny.

Definicja 1 **Iloczynem skalarnym** *niezerowych wektorów* $\overrightarrow{u}$ *i* $\overrightarrow{v}$ *nazywamy* <u>*liczbę*</u> $|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \cos\alpha$, *gdzie* α *jest kątem pomiędzy* $\overrightarrow{u}$ *i* $\overrightarrow{v}$ *i oznaczamy symbolem* $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}$. *Ponadto, jeśli* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *lub* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, *to przyjmujemy, że* $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 0$.

Własności iloczynu skalarnego.

1. $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \circ \overrightarrow{u}$,
2. $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{u} = |\overrightarrow{u}|^2$,
3. $\overrightarrow{u} \circ (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{w}$,
4. jeśli $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ są niezerowe, to $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$,
5. jeśli $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, v_3]$, to $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$.

Definicja 2 Iloczynem wektorowym *niezerowych i niewspółliniowych wektorów* $\overrightarrow{u}$ *i* $\overrightarrow{v}$ *nazywamy* <u>*wektor*</u> $\overrightarrow{w}$ *taki, że:*

1. $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{u}$ *i* $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{v}$,
2. $|\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin\alpha$, *gdzie* α *jest kątem pomiędzy* $\overrightarrow{u}$ *i* $\overrightarrow{v}$
3. *trójka wektorów* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ *ma orientację taką samą jak układ współrzędnych.*

Iloczyn wektorowy oznaczamy symbolem $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. *Ponadto, jeśli*

1. $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *lub* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$,
2. *wektory* $\overrightarrow{u}$ *i* $\overrightarrow{v}$ *są współliniowe,*

to przyjmujemy, że $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Własności iloczynu wektorowego.

1. $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$ (uwaga na znak!),
2. $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$,
3. jeśli $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, v_3]$, to

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Definicja 3 Iloczynem mieszanym *wektorów* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *i* $\overrightarrow{w}$ *nazywamy* <u>*liczbę*</u>

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Uwaga. Z powyższych definicji wynika, że długość iloczynu wektorowego wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ jest równa polu równoległoboku rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$. Z kolei, liczba $|(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|$ jest równa objętości równoległościanu rozpiętego na tych wektorach. W konsekwencji, pole trójkąta rozpiętego przez wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ jest równe połowie iloczynu wektorowego wektorów $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$, zaś liczba $\frac{1}{6}|(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|$ jest równa objętości czworościanu rozpiętego na tych wektorach.

Twierdzenie 1 *Wektory* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *i* $\overrightarrow{w}$ *są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy gdy* $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0$.

Przykład 1.
Znaleźć wektor jednostkowy prostopadły do wektora $\overrightarrow{a} = [3, 6, 8]$ i do osi Ox.

Oznaczmy poszukiwany wektor przez $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2, u_3]$. Z własności 4 iloczynu skalarnego wynika, że $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{a} = 0$ oraz $\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{i} = 0$ (bo prostopadłość do osi Ox oznacza prostopadłość do wersora tej osi).Ponadto, $|\overrightarrow{u}| = 1$.

Mamy układ warunków

$$\begin{cases} 3u_1 + 6u_2 + 8u_3 & = & 0 \\ u_1 & = & 0 \\ \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2} & = & 1\,. \end{cases}$$

Zatem

$$\begin{cases} u_1 & = & 0 \\ 6u_2 + 8u_3 & = & 0 \\ (u_2)^2 + (u_3)^2 & = & 1 \;, \end{cases}$$

skąd otrzymujemy dwa rozwiązania $\overrightarrow{u} = [0, 4/5, -3/5]$ oraz $\overrightarrow{u} = [0, -4/5, 3/5]$.

Przykład 2.
Pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ wynosi 10. Oblicz pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$.

Z uwagi po Definicji 3 wynika, że pole P_1 równoległoboku zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ jest równe długości wektora $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, zaś pole P_2 równoległoboku zbudowanego na wektorach $3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ i $\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$ jest równe długości wektora $(3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times (\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v})$.

$$P_2 = |(3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \times (\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v})| = |3\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} - 6\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v}| \;.$$

Dowolny niezerowy wektor jest współliniowy z samym sobą, więc $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Wykorzystując to i własność 1 iloczynu wektorowego mamy

$$P_2 = \left|\overrightarrow{0} - 6\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u} - \overrightarrow{0}\right| = |-6\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} - \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = |-7\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}| = 7P_1 = 70 \;.$$

Przykład 3.
Dane są trzy wierzchołki czworościanu: $A(4, 0, -2)$, $B(6, -2, 2)$, $C(4, -4, 6)$. Wyznacz czwarty wierzchołek D wiedząc, że D leży na osi Oy a objętość czworościanu jest równa 40.

Wierzchołek D leży na osi Oy, więc $D(0, t, 0)$, gdzie t jest niewiadomą. Można przyjąć, że czworościan jest rozpięty na wektorach np. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$. Wiadomo, że objętość czworościanu zbudowanego na tych wektorach wynosi 40. Mamy więc (patrz, uwaga po Definicji 3)

$$\tfrac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = 40 \;.$$

Mamy

$$\overrightarrow{AB} = [2, -2, 4] \;,\; \overrightarrow{AC} = [0, -4, 8] \;,\; \overrightarrow{AD} = [-4, t, 2] \;,$$

a zatem

$$\left|\begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 8 \\ -4 & t & 2 \end{vmatrix}\right| = |-16 - 16t| = 16|t + 1| = 40 \;.$$

Stąd $|t+1| = 5$, czyli $t = 4$ lub $t = -6$. Poszukiwany wierzchołek D ma współrzędne $(0, 4, 0)$ lub $(0, -6, 0)$.