1.1 Ciągi liczbowe

Definicja 1. *Ciągiem liczbowym nazywamy funkcję odwzorowującą zbiór liczb naturalnych w zbiór liczb rzeczywistych.*

Wartość tej funkcji dla liczby naturalnej n nazywamy n-tym wyrazem ciągu i oznaczamy a_n. Ciąg o takich wyrazach oznaczamy (a_n). Ciągi przedstawiamy na płaszczyźnie jako zbiór punktów o współrzędnych (n, a_n).
Uwaga. Będziemy stosować następujące oznaczenia zbiorów liczbowych: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – zbiór liczb całkowitych, $\mathbb{R}$ – zbiór liczb rzeczywistych.

Przykłady.

(a) $a_n = \frac{n}{n+1}$; $\quad a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$, $a_3 = \frac{3}{4}$

(b) $b_n = \frac{1}{n}$; $\quad b_1 = 1$, $b_2 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{1}{3}$

Definicja 2. *Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem rosnącym wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} > a_n$.*

Definicja 3. *Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem malejącym wtedy, gdy dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność $a_{n+1} < a_n$.*

Definicja 4. *Ciąg jest ograniczony z góry, jeżeli wszystkie jego wyrazy są mniejsze od pewnej ustalonej liczby. Ciąg jest ograniczony z dołu, jeżeli wszystkie jego wyrazy są większe od pewnej ustalonej liczby.*

Przykłady.

(a) $a_n = \frac{n}{n+1}$ - ciąg rosnący, ograniczony z dołu $m = \frac{1}{2}$, ograniczony z góry $M = 1$

(b) $b_n = \frac{1}{n}$ - ciąg malejący, ograniczony z dołu $m = 0$, ograniczony z góry $M = 1$

1.2 Granica ciągu

Definicja 5 (granica właściwa ciągu). *Mówimy, że* **ciąg** (a_n) **ma granicę** *(właściwą) g albo że* **jest zbieżny do granicy** *g (albo że dąży do g), co zapisujemy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \qquad \textit{albo} \qquad a_n \to g \textit{ gdy } n \to \infty,$$

jeśli dla dowolnej liczby dodatniej ε istnieje liczba n_0 taka, że wszystkie wyrazy ciągu o wskaźnikach większych od n_0 różnią się od g mniej niż o ε, tzn.

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} |a_n - g| < \varepsilon \ .$$

Przykłady.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Definicja 6 (granica niewłaściwa ciągu). *Mówimy, że*

1. **ciąg** (a_n) **ma granicę** *(niewłaściwą)* ∞ *(albo że dąży do* ∞*), co zapisujemy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

jeśli dla dowolnej liczby A *istnieje liczba* n_0 *taka, że wszystkie wyrazy ciągu o wskaźnikach większych od* n_0 *są większe od* A*, tzn.*

$$\bigwedge_{A} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} a_n > A \ .$$

2. **ciąg** (a_n) **ma granicę** *(niewłaściwą)* $-\infty$ *(albo że dąży do* $-\infty$*), co zapisujemy*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

jeśli dla dowolnej liczby A *istnieje liczba* n_0 *taka, że wszystkie wyrazy ciągu o wskaźnikach większych od* n_0 *są mniejsze od* A*, tzn.*

$$\bigwedge_{A} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n>n_0} a_n < A \ .$$

Przykłady.

(a) $a_n = n$

(b) ciąg arytmetyczny o pierwszym wyrazie $a_1 = 2$ i różnicy $r = 3$, tzn. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n + 3$

Uwaga. Ciąg, który ma granicę właściwą nazywamy **ciągiem zbieżnym**. Wszystkie inne ciągi nazywamy ciągami **rozbieżnymi**. W szczególności, jeśli ciąg dąży do $\pm\infty$, to mówimy, że jest rozbieżny do $\pm\infty$.

Uwaga. Każdy ciąg arytmetyczny o różnicy dodatniej dąży do ∞ (jest rozbieżny do ∞). Każdy ciąg arytmetyczny o różnicy ujemnej dąży do $-\infty$ (jest rozbieżny do $-\infty$).

Twierdzenie 1 (o jednoznaczności granicy ciągu). *Każdy ciąg zbieżny ma dokładnie jedną granicę.*

Przykład.
ciąg $a_n = (-1)^n$ jest rozbieżny

Twierdzenie 2 (o ograniczoności ciągu zbieżnego). *Jeżeli ciąg jest zbieżny (do granicy właściwej), to jest ograniczony.*

Uwaga. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Kontrprzykładem jest ciąg $a_n = (-1)^n$, który jest ograniczony, ale nie jest zbieżny.

Uwaga. Granica ciągu geometrycznego $a_n = q^n$ zależy od wartości q:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{gdy } |q| < 1 \\ 1 & \text{gdy } q = 1 \\ \infty & \text{gdy } q > 1 \\ \text{nie istnieje} & \text{gdy } q \leqslant -1 \end{cases}$$

Przykłady.

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} 3^n = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(-\tfrac{5}{4}\right)^n \text{ nie istnieje}$$

Twierdzenie 3 (rachunek granic właściwych)**.** *Jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne (do granic właściwych), to:*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$,
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$,
3. $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$,
4. $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, *o ile* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$,
5. $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n$, *gdzie* $c\in\mathbb{R}$,
6. $\lim_{n\to\infty}(a_n)^p = (\lim_{n\to\infty} a_n)^p$, *gdzie* $p\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$,
7. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}$, *gdzie* $k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Uwaga. We wzorach *6.* i *7.* zakładamy, że wyrażenia po obu stronach znaku równości mają sens.

Twierdzenie 4 (rachunek granic niewłaściwych)**.** .

1. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *i* $c\in\mathbb{R}$, *to* $\lim_{n\to\infty}\dfrac{c}{a_n} = 0$. Symbolicznie: $\dfrac{c}{\infty} = 0$.
2. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n = c$, $c\in\mathbb{R}$, *to* $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \infty$.
   Symbolicznie: $\infty + c = \infty$.
3. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, *to* $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \infty$.
   Symbolicznie: $\infty + \infty = \infty$.
4. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n = c$, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *to*
   $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = \begin{cases}\infty & \text{gdy } c>0\\ -\infty & \text{gdy } c<0\end{cases}$. Symbolicznie: $\infty\cdot c = \begin{cases}\infty & \text{gdy } c>0\\ -\infty & \text{gdy } c<0\end{cases}$.
5. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, *to* $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = \infty$.
   Symbolicznie: $\infty\cdot\infty = \infty$.
6. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *i* $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$, *to* $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n) = -\infty$.
   Symbolicznie: $\infty\cdot(-\infty) = -\infty$.
7. *Jeżeli* $\lim_{n\to\infty} a_n = c$, $c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *i* $b_n>0$ *dla każdego* n, *to*
   $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \begin{cases}\infty & \text{gdy } c>0\\ -\infty & \text{gdy } c<0\end{cases}$. Symbolicznie: $\dfrac{c}{0^+} = \begin{cases}\infty & \text{gdy } c>0\\ -\infty & \text{gdy } c<0\end{cases}$.

Uwaga. Analogicznie możemy zapisać działania z symbolem $-\infty$:

$$\frac{c}{-\infty} = 0; \quad -\infty + c = -\infty; \quad -\infty + (-\infty) = -\infty; \quad -\infty\cdot c = \begin{cases}-\infty & \text{gdy } c>0\\ \infty & \text{gdy } c<0\end{cases};$$

$$(-\infty)\cdot(-\infty)=\infty; \quad \frac{c}{0^-}=\begin{cases}-\infty & \text{gdy } c>0\\ \infty & \text{gdy } c<0\end{cases};$$

Uwaga. Niektóre z symbolicznych działań na symbolach niewłaściwych nie dają się zdefiniować – są to tzw. **symbole nieoznaczone**:

$$\frac{\infty}{\infty};\quad \infty-\infty;\quad \infty\cdot 0;\quad \frac{0}{0};\quad \infty^0;\quad 0^0;\quad 1^\infty.$$

Przykłady. Oblicz granice:

a) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n}{3n^2+8}$

Nie możemy zastosować twierdzenia o granicy ilorazu (Twierdzenie 3, pkt.4.), bo ciągi $(2n^2+n)$ i $(3n^2+8)$ są rozbieżne; tzn. mamy $\frac{\infty}{\infty}$. Ale wyłączmy n^2 z licznika i mianownika.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{3n^2+8}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2+\frac{n}{n^2})}{n^2(3+\frac{8}{n^2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{8}{n^2}}\overset{(*)}{=}\frac{2+0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

(*) zgodnie z Twierdzeniem 4, pkt.1 mamy: $\frac{1}{n}\to 0$ i $\frac{8}{n^2}\to 0$

b) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2-3n^5}{n^3+1}$

Mamy $\frac{-\infty}{\infty}$; wyłączmy n^3 z licznika i mianownika.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n^5}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(\frac{1}{n}-3n^2)}{n^3(1+\frac{1}{n^3})}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-3n^2}{1+\frac{1}{n^3}}\overset{(*)}{=}\frac{0-\infty}{1+0}\overset{(**)}{=}-\infty$$

(*) zgodnie z Twierdzeniem 4, pkt.1 mamy: $\frac{1}{n}\to 0$ i $\frac{1}{n^3}\to 0$
(**) wykorzystujemy Uwagę do Twierdzenia 4

c) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\sqrt[3]{8n^3+1}}{n\sqrt{n^2+1}}$

Mamy $\frac{\infty}{\infty}$ (patrz Twierdzenie 3, pkt.5).

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sqrt[3]{8n^3+1}}{n\sqrt{n^2+1}} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n(1+\frac{1}{n})\sqrt[3]{n^3(8+\frac{1}{n^3})}}{n\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})n\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^3}}}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{8}}{1}=2\end{aligned}$$

d) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+1)^{499}}{(n^3+1)^{333}}$

Mamy $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)^{499}}{(n^3+1)^{333}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2(1+\frac{1}{n^2})\right)^{499}}{\left(n^3(1+\frac{1}{n^3})\right)^{333}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{998}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{499}}{n^{999}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{333}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{499}}{n\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{333}}=0$$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$

Mamy $\infty-\infty$. Wykorzystamy wzór skróconego mnożenia $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

f) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{3^n+2}$

Mamy $\frac{\infty}{\infty}$ (patrz Uwaga dot. granicy ciągu geometrycznego). Wyłączmy 3^n z licznika i mianownika.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{3^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\left(\frac{2^n}{3^n}-\frac{1}{3^n}\right)}{3^n\left(1+\frac{2}{3^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\frac{1}{3^n}}{1+\frac{2}{3^n}}\overset{(*)}{=}\frac{0-0}{1+0}=0$$

(*) wykorzystujemy Uwagę dot. granicy ciągu geometrycznego oraz Twierdzenie 4, pkt.1

Twierdzenie 5 (o trzech ciągach)**.** *Jeżeli ciągi* (a_n), (b_n), (c_n) *spełniają warunki:*

1. $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ *dla każdego* $n \geqslant n_0$,
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$,

to $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

Uwaga. Ciąg $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry, a zatem jest zbieżny. Granicę tego ciągu oznaczamy przez e:

$$e\overset{def}{=}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Liczba e z dokładnością do 10 cyfr po przecinku jest równa $e=2,7182818285$.

Twierdzenie 6 (o ciągach z granicą e)**.** *Jeżeli ciąg* (a_n) *o wyrazach dodatnich jest rozbieżny do* ∞, *to*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$$

Uwaga. Powyższe twierdzenie jest prawdziwe także wtedy, gdy ciąg (a_n) o wyrazach ujemnych jest rozbieżny do $-\infty$.

Przykłady. Oblicz granice:

a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^4\overset{(*)}{=}e^4$$

(*) $a_n=\frac{n}{4}\to\infty$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{3n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{3n}{n+2}} \overset{(*)}{=} e^{\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+2}} \overset{(**)}{=} e^3$$

(*) $a_n = n+2 \to \infty$ (**) $\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n+2} = 3$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^{2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2}\right]^{\frac{2n+1}{-n^2}} \overset{(*)}{=} e^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{-n^2}} \overset{(**)}{=} e^0 = 1$$

(*) $a_n = -n^2 \to -\infty$ (**) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{-n^2} = 0$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n+4}\right)^{n}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+4}\right)^{n} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3n+4}\right)^{n} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n+4}{-3}}\right)^{\frac{3n+4}{-3}}\right]^{\frac{-3n}{3n+4}} \overset{(*)}{=} e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-3n}{3n+4}} \overset{(**)}{=} e^{-1}\end{aligned}$$

(*) $a_n = \frac{3n+4}{-3} \to -\infty$ (**) $\lim_{n\to\infty}\frac{-3n}{3n+4} = -1.$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{2n+1}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{2n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{2n+1} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+3}{-4}}\right)^{\frac{n+3}{-4}}\right]^{\frac{-4(2n+1)}{n+3}} \overset{(*)}{=} e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-8n-4}{n+3}} \overset{(**)}{=} e^{-8},\end{aligned}$$

(*) $a_n = \frac{n+3}{-4} \to -\infty$ (**) $\lim_{n\to\infty}\frac{-8n-4}{n+3} = -1.$
