

Wektory - iloczyn skalarny, wektorowy, mieszany - ćwiczenia

Przykład 1.

Oblicz kąt między wektorami $\vec{a} = [3, -1, 2]$ i $\vec{b} = [1, 2, 3]$.

Z definicji iloczynu skalarnego (Definicja 1) wiemy, że $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$. Stąd otrzymujemy

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Liczmy iloczyn skalarny (własność 5) oraz długości wektorów \vec{a} i \vec{b} :

$$\vec{a} \circ \vec{b} = [3, -1, 2] \circ [1, 2, 3] = 3 - 2 + 6 = 7, \quad |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{14},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \text{ i wstawiamy do wzoru:}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{1}{2}. \quad \text{Odpowiedź: } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Przykład 2.

Na płaszczyźnie XOZ wyznacz punkt P , tak aby wektor \vec{AP} był prostopadły do wektora \vec{AB} i miał długość 3, gdzie $A = (-1, 1, 0)$, $B = (-1, -1, -1)$.

Oznaczmy współrzędne punktu $P = (x, y, z)$. Punkt P leży na płaszczyźnie XOZ , a więc $y = 0$. Ponadto, z własności iloczynu skalarnego (własność 4) wiemy, że $\vec{AP} \perp \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AP} \circ \vec{AB} = 0$.

Otrzymujemy układ warunków:

$$\begin{cases} \vec{AP} \circ \vec{AB} = 0 \\ |\vec{AP}| = 3 \end{cases}$$

$$\text{Ale mamy: } \vec{AP} = [x + 1, -1, z], \quad \vec{AB} = [0, -2, -1], \quad |\vec{AP}| = \sqrt{(x + 1)^2 + (-1)^2 + z^2} \text{ i}$$

$$\vec{AP} \circ \vec{AB} = 2 - z, \text{ więc układ warunków przyjmuje postać:}$$

$$\begin{cases} 2 - z = 0 \\ (x + 1)^2 + (-1)^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

Po wstawieniu $z = 2$ do drugiego równania otrzymujemy $x = 1$ lub $x = -3$. Odpowiedź: są dwa takie punkty: $P = (1, 0, 2)$ lub $P = (-3, 0, 2)$.

Przykład 3.

Oblicz pole trójkąta o wierzchołkach $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, -1, 2)$, $C = (0, 4, 0)$.

Z uwagi po Definicji 3 wynika, że pole równoległoboku zbudowanego na wektorach \vec{AB} i \vec{AC} jest równe długości wektora $\vec{AB} \times \vec{AC}$, zatem pole trójkąta ABC jest równe połowie pola tego równoległoboku. Mamy: $\vec{AB} = [-1, -3, -1]$, $\vec{AC} = [-1, 2, -3]$ oraz

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} - 2\vec{k} + \vec{j} - 3\vec{k} - 3\vec{j} + 2\vec{i} = [11, -2, -5].$$

$$\text{Stąd } P = \frac{1}{2} \sqrt{11^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \frac{5}{2} \sqrt{6}.$$

Przykład 4.

Oblicz pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Wektory $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ to wersory osi układu współrzędnych, tzn. $\vec{i} = [1, 0, 0]$, $\vec{j} = [0, 1, 0]$, $\vec{k} = [0, 0, 1]$, a więc $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = [3, 2, 1]$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} = [1, -1, 2]$ oraz

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 3\vec{k} + \vec{j} - 2\vec{k} + \vec{i} - 6\vec{j} = [5, -5, -5].$$

Pole równoległoboku zbudowanego na wektorach \vec{a} i \vec{b} jest równe długości wektora $\vec{a} \times \vec{b}$, czyli $P = \sqrt{5^2 + (-5)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{3}$.

Przykład 5.

Oblicz objętość czworościanu o wierzchołkach $P = (1, 1, 1)$, $Q = (1, 2, 3)$, $R = (-1, 1, 0)$, $S = (0, 0, 1)$.

Z uwagi po Definicji 3 wynika, że objętość czworościanu rozpiętego na wektorach \vec{PS}, \vec{PR} i \vec{PQ} jest równa jednej szóstej wartości bezwzględnej z iloczynu mieszanego tych wektorów, tzn.

$V = \frac{1}{6} |(\vec{PS}, \vec{PR}, \vec{PQ})|$. Mamy: $\vec{PS} = [-1, -1, 0]$, $\vec{PR} = [-2, 0, -1]$, $\vec{PQ} = [0, 1, 2]$ oraz

$$(\vec{PS}, \vec{PR}, \vec{PQ}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5.$$

A zatem $V = \frac{1}{6} |-5| = \frac{5}{6}$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Oblicz iloczyn skalarny $\vec{a} \circ \vec{b}$, jeśli $\vec{a} = [-1, 2, -3]$, $\vec{b} = [2, 0, -1]$.
2. Dla jakiej wartości parametru p wektory $\vec{a} = [p, 1, 1]$ i $\vec{b} = [2p, p, -1]$ są prostopadłe.
3. Obliczyć iloczyn wektorowy wektorów $\vec{a} = [-3, 2, 0]$ i $\vec{b} = [1, 5, -2]$.
4. Obliczyć iloczyn mieszany wektorów $\vec{a} = [-3, 2, 1]$, $\vec{b} = [0, 1, -5]$ i $\vec{c} = [2, 3, -4]$.
5. Na płaszczyźnie XOY znaleźć wektor \vec{p} prostopadły do wektora $\vec{a} = [4, 3, -5]$ i mający długość wektora \vec{a} .
6. Oblicz pole równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a} = [0, 3, -2]$, $\vec{b} = [-1, 2, 5]$.
7. Oblicz objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{a} = [1, -1, 2]$, $\vec{b} = [0, 3, -2]$, $\vec{c} = [-1, 5, 0]$.
8. Sprawdzić, czy wektory $\vec{a} = [-1, 3, -5]$, $\vec{b} = [1, -1, 1]$ i $\vec{c} = [4, -2, 0]$ są współpłaszczyznowe.

Odpowiedzi. 1. 1; 2. -1 lub $\frac{1}{2}$; 3. $[-4, -6, -17]$; 4. -55; 5. $[3\sqrt{2}, -4\sqrt{2}, 0]$ lub $[-3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 0]$ 6. $\sqrt{374}$; 7. 14; 8. TAK