Inżynieria Biomedyczna

Ćwiczenia 27.04.2020. - całka podwójna po prostokącie i obszarze normalnym

---

Zadanie 1. Na podstawie Twierdzenia 2 z wykładu obliczyć całkę podwójną po prostokącie.

(a) $\iint_P x^3y^2\ dxdy, \quad P = \{0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

(b) $\iint_P e^{x+y}\ dxdy, \quad P = \{0 \leqslant x \leqslant \ln 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 5,\}$

(c) $\iint_P x^2(x+4y)\ dxdy, \quad P = \{0 \leqslant x \leqslant 3,\ 1 \leqslant y \leqslant 2,\}$

(d) $\iint_P \sin(x+y)\ dxdy, \quad P = \{-\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4},\}$

(e) $\iint_P x\sin(xy)\ dxdy, \quad P = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ \pi \leqslant y \leqslant 2\pi,\}$

(f) $\iint_P e^{2x-y}\ dxdy, \quad P = \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 0,\}$

Rozwiązanie przykładu (b) i (d):

$$\begin{aligned}
(b) \iint_P e^{x+y}\ dxdy &= \int_0^{\ln 4}\left[\int_0^{\ln 5}(e^x\cdot e^y)dy\right]dx = \int_0^{\ln 4}\left(e^x\left[e^y\right]_0^{\ln 5}\right)dx \\
&= \int_0^{\ln 4}\left(e^x\left[e^{\ln 5}-e^0\right]\right)dx = 4\int_0^{\ln 4} e^x dx = 4\left[e^x\right]_0^{\ln 4} \\
&= 4\left[e^{\ln 4}-e^0\right] = 12.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(d) \iint_P \sin(x+y)\ dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin(x+y))dy\right]dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[-\cos(x+y)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(-\cos(x+\tfrac{\pi}{4})+\cos x\right)dx = \left[-\sin(x+\tfrac{\pi}{4})+\sin x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \left[-\sin\tfrac{\pi}{2}+\sin\tfrac{\pi}{4}\right]-\left[-\sin 0+\sin(-\tfrac{\pi}{4})\right] = -1+2\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}-1.
\end{aligned}$$

Zadanie 2. Korzystając z Definicji zbioru normalnego względem osi Ox lub Oy oraz Twierdzenia o obliczaniu całki po zbiorze normalnym przedstawionego na wykładzie obliczyć całki podwójne po zbiorze G.

(a) $\iint_G (x^2 + y)\, dxdy$, gdzie G jest ograniczony krzywmi $y = x^2$ i $x = y^2$.

(b) $\iint_G \frac{x^2}{y^2}\, dxdy$, gdzie G ograniczony jest krzywymi $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$.

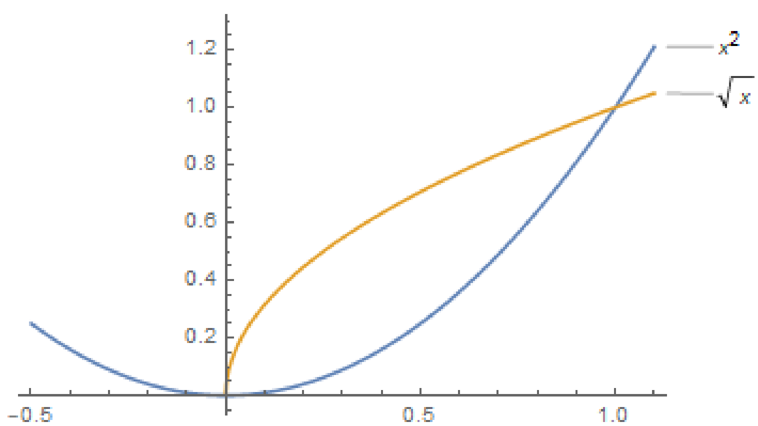
(c) $\iint_G \cos(x + y) dxdy$, gdzie G jest ograniczony prostymi $x = 0$, $y = x$, $y = \pi$;

(d) $\iint_G xydxdy$, gdzie G jest ograniczony krzywymi $y = 4 - x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = 0$;

(e) $\iint_G (x^2 - xy) dxdy$, gdzie G jest ograniczony prostą $y = x$ i krzywą $y = 3x - x^2$;

(f) $\iint_G (x^2 + y) dxdy$, gdzie G jest ograniczony krzywymi $y = 4x - x^2$, $y = x^2 - 6$;

Rozwiązanie przykładu (a): Wyznaczymy granice całkowania: w tym celu wyznaczymy punkty wspólne wykresu krzywej $y = x^2$ i $x = y^2$. Wstawiając do równania drugiego za zmienną y z równania pierwszego otrzymujemy równanie: $x = x^4$ lub równoważnie $x(1 - x^3) = 0$, co jak widać ma dwa rozwiązania $x = 0$ i $x = 1$. Zatem $x \in [0, 1]$.



Jak na naszym zbiorze zmienia się zmienna y? Z rysunku widzimy, że dla każdego $x \in [0, 1]$ dolna granica zbioru przebiega wzdłuż krzywej $y = x^2$, zaś górna wzdłuż $y = \sqrt{x}$. A zatem nasz zbiór całkowania G jest zbiorem normalnym względem osi Ox i możemy go opisać następującymi warunkami:

$$0 \leqslant x \leqslant 1; \qquad x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}.$$

Z twierdzenia o obliczaniu całki podwójnej po zbiorze normalnym względem osi Ox otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\iint_G (x^2+y)\ dxdy &= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)\ dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[x^2 y + \tfrac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left[x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{1}{2}x - x^4 - \tfrac{1}{2}x^4\right] dx \\
&= \left[\tfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{10}x^5\right]_0^1 = \tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10} = \tfrac{33}{140}.
\end{aligned}$$