

1 Ekstrema funkcji dwóch zmiennych - ćwiczenia

Przykład 1

Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Rozwiązanie tego zadania rozpoczniemy od obliczenia pochodnych cząstkowych. Mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y.$$

Wyznamy teraz wszystkie pary (x, y) dla których warunek konieczny jest spełniony. Warunek

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

jest równoważny

$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 10x = 0 \\ 2xy + 2y = 0 \end{cases}$$

Z drugiego równania mamy $2y(x + 1) = 0$, a stąd otrzymujemy $y = 0$ lub $x = -1$.

Podstawiając $y = 0$ do równania pierwszego mamy: $6x^2 + 10x = 0$, czyli $2x(3x + 5) = 0$. A zatem $x = 0$ lub $x = -\frac{5}{3}$. Otrzymaliśmy dwa punkty, w których może być ekstremum. Są to punkty $A(0, 0)$, $B(-\frac{5}{3}, 0)$.

Podstawiając $x = -1$ do równania pierwszego mamy: $6 + y^2 - 10 = 0$, czyli $y^2 = 4$. A zatem $y = 2$ lub $y = -2$. Otrzymaliśmy kolejne dwa punkty, w których może być ekstremum. Są to punkty $C(-1, 2)$, $D(-1, -2)$.

Do warunku dostatecznego potrzebujemy pochodnych rzędu drugiego. Mamy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 10, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x + 2.$$

Dla punktu $A(0, 0)$ mamy

$$W(A) = \begin{vmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 20 > 0,$$

co oznacza, że w tym punkcie jest ekstremum. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 10 > 0$, jest to minimum równe $f(0, 0) = 0$.

W punkcie $B(-\frac{5}{3}, 0)$ mamy

$$W(B) = \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} = \frac{40}{3} > 0,$$

co oznacza, że w tym punkcie też jest ekstremum. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -10 < 0$, jest to maksimum równe $f(-\frac{5}{3}, 0) = \frac{125}{27}$.

Dla punktów $C(-1, 2)$ i $D(-1, -2)$ mamy:

$$W(C) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0, \quad W(D) = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0,$$

co oznacza, że w tych punktach ekstremum nie występuje.

Przykład 2

Wyznaczyć ekstrema funkcji $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y + 2$.

Rozwiązanie tego zadania rozpoczniemy od wyznaczenia dziedziny D_f : $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Teraz obliczamy pochodne cząstkowe:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + 1.$$

Wyznamy teraz wszystkie pary (x, y) dla których warunek konieczny jest spełniony. Warunek

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

jest równoważny

$$\begin{cases} -\frac{8}{x^2} + \frac{1}{y} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} + 1 = 0 \end{cases}$$

Jeśli pierwsze równanie pomnożymy przez x^2y , a drugie przez y^2 , to otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} -8y + x^2 = 0 \\ -x + y^2 = 0 \end{cases}$$

Z drugiego równania wyznaczamy $x = y^2$ i wstawiamy do pierwszego

$$-8y + y^4 = 0, \quad \text{czyli} \quad y(-8 + y^3) = 0, \quad \text{a stąd} \quad y = 0 \quad \text{lub} \quad y = 2.$$

Ale $y = 0 \notin D_f$, więc mamy tylko jeden punkt stacjonarny $A = (4, 2)$, bo dla $y = 2$ otrzymujemy $x = y^2 = 4$.

Do warunku dostatecznego potrzebujemy pochodnych rzędu drugiego. Mamy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{16}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}.$$

Dla punktu $A(4, 2)$ mamy

$$W(A) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{16} > 0,$$

co oznacza, że w tym punkcie jest ekstremum. Ponieważ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{4} > 0$, jest to minimum równe $f(4, 2) = 8$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Wyznaczyć ekstrema funkcji:

(a) $f(x, y) = y^3 - 3xy^2 + 6xy - 3x^2 - 15y + 15x$

(b) $f(x, y) = x^2 - 6xy + y^3 + 3x + 6y$

(c) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

(d) $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{8}{y}$

(e) $f(x, y) = (6 - x - y)x^2y^3$

2. Wyznaczyć współrzędne punktów leżących na paraboli $2y - x^2 = 0$, których odległość od punktu $A(4, 1)$ jest najmniejsza. (odległość dwóch punktów $P_1 = (x_1, y_1)$ i $P_2 = (x_2, y_2)$ na płaszczyźnie: $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$)
3. Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216m^3$. Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie $30zł/m^2$, do budowy podłogi w cenie $40zł/m^2$, a sufitu w cenie $20zł/m^2$. Znaleźć długość a , szerokość b i wysokość c magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy. (wykorzystaj odpowiednie wzory na objętość i pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu konstruując odpowiednią funkcję dwóch zmiennych)

Odpowiedzi. 1.(a) $A = (\frac{5}{2}, 0)$, $B = (1, -1)$, $C = (1, 3)$, max w A ; 1.(b) $A = (\frac{3}{2}, 1)$, $B = (\frac{27}{2}, 5)$, min w B ; 1.(c) $A = (1, 2)$, $B = (-1, -2)$, $C = (2, 1)$, $D = (-2, -1)$, min w C , max w D ; 1.(d) min w $A = (\frac{1}{2}, 4)$; 1.(e) min w $A = (2, 3)$; 2. $(2, 2)$ 3. $a = b = c = 6m$.