# Szeregi trygonometryczne

**Szeregiem trygonometrycznym** nazywamy szereg postaci

$$\tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ ,$$

gdzie $a_n$, $b_n$ są stałymi.

Można zauważyć, że jeśli szereg trygonometryczny jest zbieżny w przedziale $[-\pi, \pi]$, to jest zbieżny w całym zbiorze $\mathbb{R}$ i wtedy jego suma jest funkcją okresową o okresie $2\pi$. Szeregi trygonometryczne istotnie różnią się od szeregów potęgowych: suma szeregu trygonometrycznego może być funkcją nieciągłą, albo ciągłą ale nieróżniczkowalną.

**Twierdzenie 1** *Jeśli szereg trygonometryczny jest jednostajnie zbieżny w przedziale* $[-\pi, \pi]$ *do sumy* $f(x)$, *to współczynniki* $a_n$, $b_n$ *są postaci*

$$a_n = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad , \quad b_n = \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \ .$$

Wzory powyższe nazywamy **wzorami Eulera-Fouriera**. Liczby określone tymi wzorami nazywamy **współczynnikami Eulera-Fouriera**.

Załóżmy, że funkcja $f$ jest całkowalna w przedziale $[-\pi, \pi]$. Można wtedy obliczyć współczynniki $a_n$, $b_n$ przy pomocy wzorów Eulera-Fouriera i w ten sposób uzyskać **szereg Fouriera** funkcji $f$. Piszemy wtedy

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \ .$$

Szereg Fouriera funkcji $f$ nie musi być zbieżny! A jeśli jest zbieżny, to jego sumą nie musi być $f$!

**Przykład** Wyznacz szereg Fouriera funkcji $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Z całkowania przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = 0 \\ b_n &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \tfrac{2(-1)^{n+1}}{n} \ . \end{aligned}$$

Stąd

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \ , \ x \in [-\pi, \pi] \ .$$

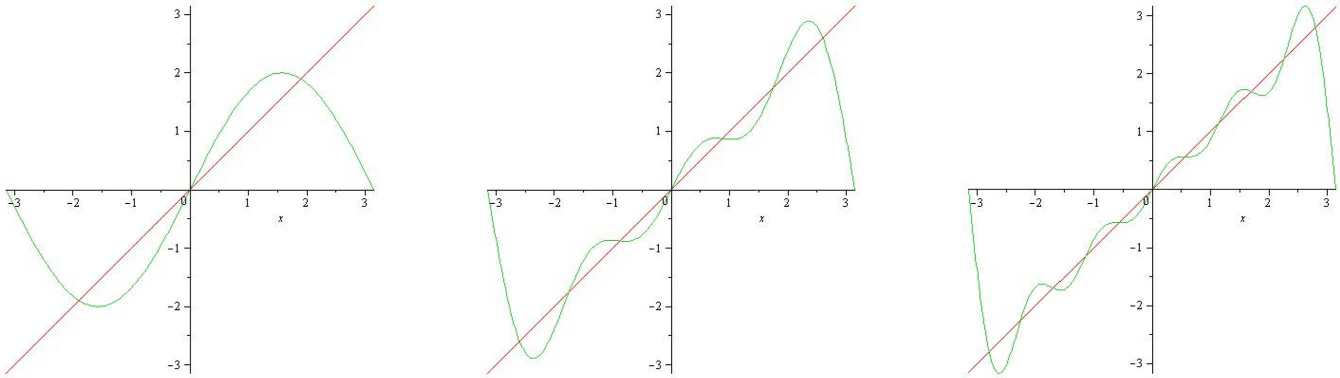
**Przykład** Wyznacz szereg Fouriera funkcji $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Z dwukrotnego całkowania przez części otrzymujemy

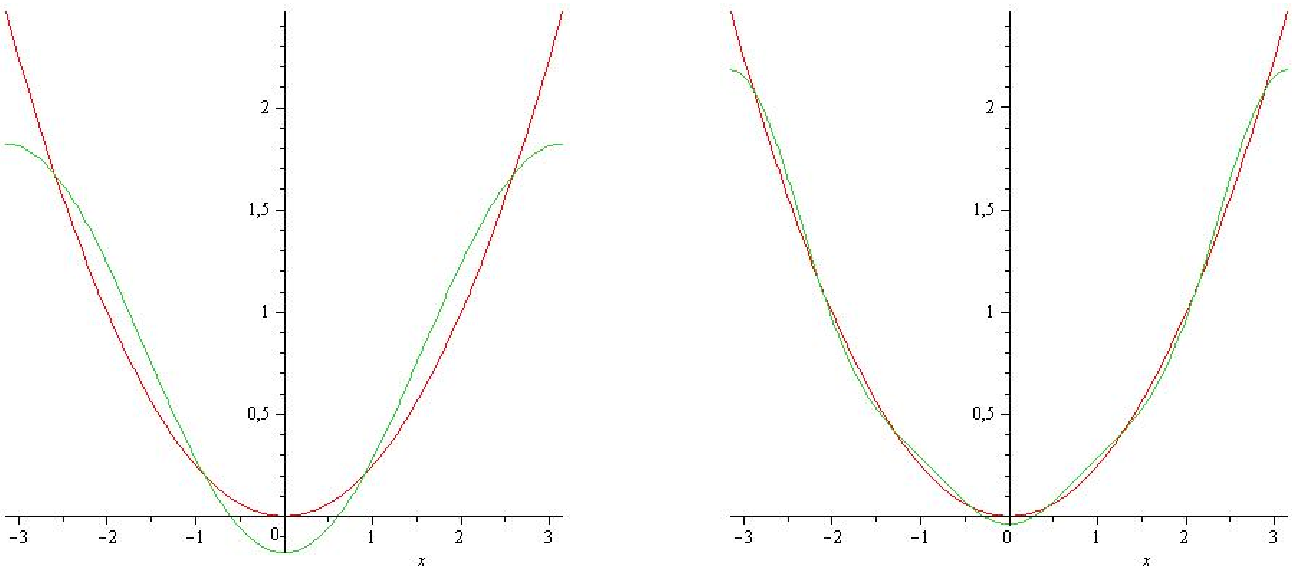
$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \tfrac{2\pi^2}{3} \\ a_n &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \tfrac{4(-1)^n}{n^2} \\ b_n &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = 0 \ . \end{aligned}$$

Stąd

$$x^2 \sim \tfrac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \ , \ x \in [-\pi, \pi] \ .$$



Rysunek 1: Funkcja $f(x) = x$ i jej suma częściowa szeregu Fouriera w przedziale $[-\pi, \pi]$ dla $n = 1$, $n = 3$ i $n = 5$



Rysunek 2: Funkcja $f(x) = x^2$ i jej suma częściowa szeregu Fouriera w przedziale $[-\pi, \pi]$ dla $n = 1$ i $n = 3$

**Twierdzenie 2** *Załóżmy, że $f$ jest całkowalna w przedziale $[-\pi, \pi]$.*

1. *Jeśli $f$ jest funkcją parzystą, to jej współczynniki Eulera-Fouriera $b_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.*

2. *Jeśli $f$ jest funkcją nieparzystą, to jej współczynniki Eulera-Fouriera $a_n = 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

W powyższej sytuacji mówimy, że szereg Fouriera jest szeregiem cosinusowym (gdy $b_n = 0$) lub szeregiem sinusowym (gdy $a_n = 0$).
**Uwaga** Jeśli funkcja $f$ jest całkowalna w przedziale $[-l, l]$, to jej szereg Fouriera jest postaci

$$f(x) \sim \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \tfrac{n\pi}{l} x + b_n \sin \tfrac{n\pi}{l} x \right) \ .$$

Do badania zbieżności szeregó Fouriera stosujemy poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 3 (kryterium Dirichleta)** *Jeśli funkcja $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ jest*

1. *przedziałami monotoniczna,*

2. *przedziałami ciągła, przy czym w każdym punkcie nieciągłości $x_0$ spełnia warunek*

$$f(x_0) = \tfrac{1}{2} \left[ f(x_0^-) + f(x_0^+) \right] \ ,$$

*3.* $f(-\pi) = f(\pi)$,

*to funkcja $f$ jest sumą swojego szeregu Fouriera, tzn.*

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \ ,$$

*gdzie współczynniki $a_n$, $b_n$ dane wzorami Eulera-Fouriera.*

**Uwaga** Jeśli funkcja $f$ jest określona dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ i ma okres $2\pi$, to przy spełnieniu założeń kryterium Dirichleta $f$ jest sumą swojego szeregu Fouriera dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.
**Uwaga** Jeśli $f(-\pi) \neq f(\pi)$, to można zmodyfikować definicję funkcji $f$ na końcach tak, aby $f(-\pi) = f(\pi) = \frac{1}{2}\left[f(\pi^-) + f(-\pi^+)\right]$ i teza kryterium Dirichleta pozostaje prawdziwa.

**Przykład** Wiemy, że szereg Fouriera funkcji $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$ jest postaci

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \ , \ x \in [-\pi, \pi] \ .$$

Funkcja $f(x) = x$ jest ciągła i rosnąca; nie spełniony jest trzeci warunek kryterium Dirichleta. Mamy zatem dwie możliwości.
I. Modyfikujemy definicję funkcji $f$ w następujący sposób:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x & , x \in (-\pi, \pi) \\ 0 & , x = -\pi \vee x = \pi \end{cases} \ .$$

Teraz funkcja $\tilde{f}$ spełnia założenia kryterium Dirichleta, więc

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \ , \ x \in [-\pi, \pi] \ .$$

II. Z punktu I. wynika, że

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \ , \ x \in (-\pi, \pi) \ ,$$

czyli, że równość powyższa zachodzi nie w przedziale domkniętym $[-\pi, \pi]$, ale w przedziale otwartym $(-\pi, \pi)$.

**Przykład** Wiemy, że szereg Fouriera funkcji $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$ jest postaci

$$x^2 \sim \tfrac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \ , \ x \in [-\pi, \pi] \ .$$

Funkcja $f(x) = x^2$ jest ciągła i przedziałami monotoniczna, spełnia także warunek $f(-\pi) = f(\pi)$. Zatem z kryterium Dirichleta mamy

$$x^2 = \tfrac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \ , \ x \in [-\pi, \pi] \ .$$

Zauważmy, że np. dla $x = \pi$ mamy

$$\pi^2 = \tfrac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{4(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi) = \tfrac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{4}{n^2} \ ,$$

skąd otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2} = \tfrac{\pi^2}{6} \ ,$$

czyli sumę szeregu harmonicznego rzędu 2.