PRZYKŁAD 1

$$y^{IV} + 4y'' + 4y = 0$$ – RÓWNANIE JEDNORODNE

$$r^4 + 4r^2 + 4 = 0$$ – RÓWNANIE CHARAKTERYSTYCZNE

$$r^4 + 4r^2 + 4 = (r^2+2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$r^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow r = \pm i\sqrt{2}$$

$r_1 = r_2 = i\sqrt{2}$ $\quad r_3 = r_4 = -i\sqrt{2}$ – 2 PODWÓJNE PIERWIASTKI ZESPOLONE

$$\alpha = 0 \quad \beta = \sqrt{2}$$

$$y(t) = e^{0t}\left[(c_1 + c_2 t)\cdot\cos\sqrt{2}t + (c_3 + c_4 t)\sin\sqrt{2}t\right]$$

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)\cos\sqrt{2}t + (c_3 + c_4 t)\sin\sqrt{2}t$$

PRZYKŁAD 2

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 6\cos t$$

ZAPISZMY NAJPIERW RÓWNANIE JEDNORODNE

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$$

A NASTĘPNIE ODPOWIADAJĄCE MU RÓWNANIE CHARAKTERYSTYCZNE:

$$r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0$$

GRUPUJĄC ODPOWIEDNIE WYRAZY ZAŁ ZNAJDUJEMY JEGO PIERWIASTKI:

$$r^3 - r^2 + 4r - 4 = r^2(r-1) + 4(r-1) = (r-1)(r^2+4) = 0$$

$$r_1 = 1 \quad r_2 = 2i \quad r_2 = -2i$$

PRZYKŁAD 2 CD.

ROZWIĄZANIE OGÓLNE RÓWNANIA JEDNORODNEGO PRZYJMIE POSTAĆ:

$$y_j(t) = C_1 e^{1t} + C_2 e^{0t} \cos 2t + C_3 e^{0t} \sin 2t \quad , \text{A ZATEM}$$

$$y_j(t) = C_1 e^{t} + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t \quad - \text{R.O.R.J.}$$

PRZEWIDUJEMY ROZWIĄZANIE SZCZEGÓLNE RÓWNANIA NIEJEDNORODNEGO:

$$q(t) = 6 \cos t \quad = P_0 \cos \beta t \quad P_0 \text{ - stała} \quad \beta = 1$$

SPRAWDZAMY, ŻE LICZBY $\pm \beta i = \pm i$ NIE SĄ PIERWIASTKAMI RÓWNANIA CHARAKTERYSTYCZNEGO, A ZATEM

$$\varphi(t) = A\cos t + B \sin t \quad \text{— RÓŻNICZKUJĄC DWUKROTNIE MAMY}$$

$$\varphi'(t) = -A\sin t + B\cos t$$

$$\varphi''(t) = -A\cos t - B\sin t \qquad \varphi'''(t) = A\sin t - B\cos t$$

PODSTAWIAJĄC POWYŻSZE DO RÓWNANIA WYJŚCIOWEGO DOSTAJEMY

$$A\sin t - B\cos t - (A\cos t - B\sin t) + 4(-A\sin t + B\cos t) - 4(A\cos t + B\sin t) = 6\cos t$$

PORÓWNUJĄC STRONAMI WYRAŻENIA DOSTAJEMY:

$$\begin{aligned} \cos t &: \begin{cases} -B - A + 4B - 4A = 6 \\ A + B - 4A - 4B = 0 \end{cases} \\ \sin t &: \end{aligned}$$

$$+\begin{cases} -5A + 3B = 6 \\ -3A - 3B = 0 \end{cases}$$

$$-8A = 6 \Rightarrow A = -\frac{3}{4}$$

$$B = -A \Rightarrow B = \frac{3}{4}$$

ZATEM

$$\varphi(t) = -\frac{3}{4}\cos t + \frac{3}{4}\sin t \quad - \text{R.O.R.N.J.}$$

PAMIĘTAJĄC, ŻE $\quad y(t) = y_j(t) + \varphi(t)$

ZAPISUJEMY ROZWIĄZANIE OGÓLNE RÓWNANIA NIEJEDNORODNEGO

$$y(t) = C_1 e^{t} + C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t - \frac{3}{4}\cos t + \frac{3}{4}\sin t$$