Zadanie 1. Oblicz całkę podwójną po prostokącie.

(a) $\iint_P x^3y^2\ dxdy, \quad P = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$

(b) $\iint_P e^{x+y}\ dxdy, \quad P = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant \ln 4,\ 0 \leqslant y \leqslant \ln 5\}$

(c) $\iint_P x^2(x+4y)\ dxdy, \quad P = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 1 \leqslant y \leqslant 2\}$

(d) $\iint_P \sin(x+y)\ dxdy, \quad P = \{(x,y) : -\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4}\}$

(e) $\iint_P x\sin(xy)\ dxdy, \quad P = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \pi \leqslant y \leqslant 2\pi\}$

(f) $\iint_P e^{2x-y}\ dxdy, \quad P = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 0\}$

Rozwiązanie przykładu (b) i (d):

$$
\begin{aligned}
(b) \qquad \iint_P e^{x+y}\ dxdy &= \int_0^{\ln 4}\left[\int_0^{\ln 5} e^x \cdot e^y dy\right] dx = \int_0^{\ln 4}\left(e^x \left[e^y\right]_0^{\ln 5}\right) dx \\
&= \int_0^{\ln 4}\left(e^x\left[e^{\ln 5} - e^0\right]\right) dx = 4\int_0^{\ln 4} e^x dx = 4\left[e^x\right]_0^{\ln 4} \\
&= 4\left[e^{\ln 4} - e^0\right] = 12.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(d) \quad \iint_P \sin(x+y)\ dxdy &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)dy\right] dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[-\cos(x+y)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(-\cos(x+\tfrac{\pi}{4}) + \cos x\right) dx = \left[-\sin(x+\tfrac{\pi}{4}) + \sin x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \left[-\sin\tfrac{\pi}{2} + \sin\tfrac{\pi}{4}\right] - \left[-\sin 0 + \sin(-\tfrac{\pi}{4})\right] = -1 + 2\cdot\tfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1.
\end{aligned}
$$

Zadanie 2. Oblicz całki podwójne po zbiorze normalnym.

(a) $\iint_G (x^2+y)\ dxdy$, gdzie G jest ograniczony krzywmi $y = x^2$ i $x = y^2$

(b) $\iint_G \frac{x^2}{y^2}\, dxdy$, gdzie G ograniczony jest krzywymi $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$

(c) $\iint_G \cos(x+y) dxdy$, gdzie G jest ograniczony prostymi $x = 0$, $y = x$, $y = \pi$

(d) $\iint_G xydxdy$, gdzie G jest ograniczony krzywymi $y = 4 - x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = 0$

(e) $\iint_G (x^2 - xy) dxdy$, gdzie G jest ograniczony prostą $y = x$ i krzywą $y = 3x - x^2$

(f) $\iint_G (4xy + x + 2) dxdy$, gdzie G jest ograniczony krzywymi $y = 4x - x^2$, $y = x^2 - 6$

Rozwiązanie przykładu (a): Punkty wspólne krzywych $y = x^2$ i $x = y^2$ otrzymamy z odpowiedniego układu równań. Otrzymujemy z niego równanie $x = x^4$, lub równoważnie $x(1 - x^3) = 0$, które ma dwa rozwiązania $x = 0$ i $x = 1$. Zatem punktami wspólnymi tych krzywych są $(0, 0)$ oraz $(1, 1)$. Oznacza to, że $x \in [0, 1]$. Dolną granicą zbioru G jest krzywa $y = x^2$, zaś górną $y = \sqrt{x}$. A zatem G jest zbiorem normalnym względem osi Ox i można go opisać w następujący sposób

$$G = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1 \ , \ x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\} \ .$$

Zatem

$$\begin{aligned}
\iint_G (x^2 + y)\ dxdy &= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y)\ dy \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[x^2 y + \tfrac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left[x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{1}{2}x - x^4 - \tfrac{1}{2}x^4 \right] dx \\
&= \left[\tfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{10}x^5 \right]_0^1 = \tfrac{2}{7} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10} = \tfrac{33}{140}.
\end{aligned}$$

Rozwiązanie przykładu (f): Punkty wspólne krzywych $y = 4x - x^2$ i $y = x^2 - 6$ otrzymamy z odpowiedniego układu równań. Otrzymujemy z niego równanie $x^2 - 2x - 3 = 0$, które ma dwa rozwiązania $x = -1$ i $x = 3$. Zatem punktami wspólnymi tych krzywych są $(-1, -5)$ oraz $(3, 3)$. Oznacza to, że $x \in [-1, 3]$. Dolną granicą zbioru G jest parabola $y = x^2 - 6$, zaś górną parabola $y = 4x - x^2$. A zatem G jest zbiorem normalnym względem osi Ox i można go opisać w następujący sposób

$$G = \{(x, y) : -1 \leqslant x \leqslant 3 \ , \ x^2 - 6 \leqslant y \leqslant 4x - x^2\} \ .$$

Zatem

$$
\begin{aligned}
\iint_G (4xy + x + 2)\ dxdy &= \int_{-1}^{3} \left[\int_{x^2-6}^{4x-x^2} (4xy + x + 2)\ dy\right] dx \\
&= \int_{-1}^{3} \left[2xy^2 + (x+2)y\right]_{x^2-6}^{4x-x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{3} \left[2x\left[(4x-x^2)^2 - (x^2-6)^2\right] + (x+2)(4x - x^2 - x^2 + 6)\right] dx \\
&= \int_{-1}^{3} \left[2x(4x - x^2 - x^2 + 6)(4x - x^2 + x^2 - 6) + (x+2)(6 + 4x - 2x^2)\right] dx \\
&= \int_{-1}^{3} \left[2x(6 + 4x - 2x^2)(4x - 6) + (x+2)(6 + 4x - 2x^2)\right] dx \\
&= \int_{-1}^{3} (6 + 4x - 2x^2)\left[2x(4x-6) + (x+2)\right] dx \\
&= \int_{-1}^{3} \left[12 - 58x + 54x^3 - 16x^4\right] dx = \left[12x - 29x^2 + \tfrac{27}{2}x^4 - \tfrac{16}{5}x^5\right]_{-1}^{3} = \tfrac{576}{5}\ .
\end{aligned}
$$