1 Płaszczyzny i proste w $\mathbb{R}^3$

Równanie normalne płaszczyzny. Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\overrightarrow{r_o}$ i prostopadłej do wektora $\overrightarrow{n} = (A, B, C) \neq \overrightarrow{0}$ ma postać:

$$\pi : \ (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}) \circ \overrightarrow{n} = 0,$$

Podstawiając współrzędne wektorów $\overrightarrow{r}$ oraz $\overrightarrow{r_0}$ otrzymujemy inną postać równania normalnego płaszczyzny:

$$\pi : \ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Równanie ogólne płaszczyzny. Równanie:

$$\pi : \ Ax + By + Cz + D = 0,$$

nazywamy równaniem ogólnym płaszczyzny π.

Przykład 1. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez środek odcinka AB, gdzie $A = (3, 2, -1)$, $B = (5, 0, 7)$ i prostopadłej do tego odcinka.

Potrzebujemy punktu P_0 należącego do płaszczyzny i wektora prostopadłego do niej $\overrightarrow{n}$ (normalnego). Skoro płaszczyzna przechodzi przez środek odcinka AB, to przechodzi przez punkt $P_0 = (A + B)/2 = (3+5, 2+0, -1+7)/2 = (4, 1, 3)$. Płaszczyzna π jest też prostopadła do odcinka AB, a więc jest prostopadła do wektora $\overrightarrow{AB} = (5-3, 0-2, 7-(-1)) = (2, -2, 8)$. Za wektor normalny możemy przyjąć dowolny wektor równoległy do wektora $\overrightarrow{AB}$, na przykład $\overrightarrow{n} = a\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(2, -2, 8) = (1, -1, 4)$. Równanie **normalne** płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (4, 1, 3)$ i prostopadłej do wektora $\overrightarrow{n} = (1, -1, 4)$ będzie miało postać:
$\pi : \ 1(x - 4) - 1(y - 1) + 4(z - 3) = 0.$
Po uproszczeniu otrzymujemy równanie **ogólne** tej płaszczyzny:
$\pi : \ x - y + 4z - 15 = 0.$
Równanie odcinkowe płaszczyzny. Równanie płaszczyzny π odcinającej na osiach $0x$, $0y$, $0z$ układu współrzędnych odpowiednio odcinki zorientowane $a, b, c \neq 0$ ma postać:

$$\pi : \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Przykład 2. Znaleźć równanie odcinkowe płaszczyzny $\pi : \ x - y + 4z - 15 = 0$.

Przekształcamy: $x - y + 4z - 15 = 0 \ \Rightarrow \ x - y + 4z = 15 \ \Rightarrow \ \pi : \ \frac{x}{15} + \frac{y}{-15} + \frac{z}{15/4} = 1.$
Równanie parametryczne płaszczyzny. Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt
$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i rozpiętej na niewspółliniowych wektorach $\overrightarrow{u} = (a_1, b_1, c_1)$ i $\overrightarrow{v} = (a_2, b_2, c_2)$ ma postać:

$$\pi : \begin{cases} x &= x_0 + sa_1 + ta_2 \\ y &= y_0 + sb_1 + tb_2 \\ z &= z_0 + sc_1 + tc_2 \end{cases} \text{, gdzie } t, s \in \mathbb{R}.$$

Przykład 2. Napisać równanie parametryczne płaszczyzny π przechodzącej przez początek układu współrzędnych oraz równoległej do wektorów: $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$ i $\overrightarrow{v} = (0, -1, 2)$

Zauważmy, że wektory $\overrightarrow{u}$ i $\overrightarrow{v}$ nie są współliniowe, a punkt $P_0 = (0,0,0) \in \pi$. Równanie parametryczne będzie miało postać:

$$\pi : \begin{cases} x &= 0 + 1s + 0t \\ y &= 0 + 2s - 1t \\ z &= 0 + 3s + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= s \\ y &= 2s - t \\ z &= 3s + 2t \end{cases} t, s \in \mathbb{R}.$$

Uwaga. Zauważmy, że rugując parametry s i t z równania parametrycznego otrzymujemy równanie ogólne płaszczyzny: $\pi : -7x + 2y + z = 0$.

Równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty. Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez trzy niewspółliniowe punkty $P_i = (x_i, y_i, z_i)$ gdzie $1 \leqslant i \leqslant 3$, ma postać:

$$\pi : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie parametryczne prostej. Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\overrightarrow{r_0}$ w kierunku wektora $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ (kierunkowego) ma postać:

$$l : \ \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{v}, \quad \text{lub} \quad l : \begin{cases} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \\ z &= z_0 + tc \end{cases}, \text{gdzie } t \in \mathbb{R}.$$

Równanie kierunkowe prostej. Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ w kierunku wektora $\overrightarrow{v} = (a, b, c)$ otrzymujemy rugując parametr t:

$$l : \ \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Uwaga. W tym przypadku dopuszcza się zero w mianowniku jako notację współrzędnej wektora kierunkowego.

Równanie krawędziowe prostej. Równanie prostej l będącej częścią wspólną dwóch nierównoległych płaszczyzn $\pi_1 : \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ i $\pi_2 : \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \end{cases}.$$

Przykład 3. Znaleźć równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P_0 = (0, 0, -2)$ i prostopadłej do wektorów $\overrightarrow{a} = (0, 1, -5)$ i $\overrightarrow{b} = (-2, 3, 0)$.

Potrzebujemy wektora kierunkowego prostej l (jakikolwiek równoległy). Skoro $l \perp \overrightarrow{a}$ i $l \perp \overrightarrow{b}$, to $l \parallel \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$. Obliczamy $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (0, 1, -5) \times (-2, 3, 0) = \overrightarrow{i}(1 \cdot 0 - (-5) \cdot 3) - \overrightarrow{j}(0 \cdot 0 - (-5) \cdot (-2)) + \overrightarrow{k}(0 \cdot 3 - 1 \cdot (-2)) = 15\overrightarrow{i} + 10\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k} = (15, 10, 2)$. Zatem wystarczy przyjąć, że wektor kierunkowy $\overrightarrow{v} = (15, 10, 2)$. Równanie prostej ma postać:

$$l : \begin{cases} x &= 15t \\ y &= 10t \\ z &= -2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Odległość punktu od płaszczyzny. Odległość punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny
$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ określamy wzorem:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Odległość punktu od prostej. Odległość punktu P_0 od prostej l przechodzącej przez punkt P_1 o wektorze kierunkowym v określamy wzorem:

$$d(P_0, l) = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_0} \times \overrightarrow{v}\|}{\|\overrightarrow{v}\|}.$$

Uwaga. Odległość punktu P od płaszczyzny π można wyznaczyć jako długość wektora $\overrightarrow{PP'}$, gdzie P' jest rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π. Analogicznie, odległość punktu P od prostej l można wyznaczyć jako długość wektora $\overrightarrow{PP'}$, gdzie P' jest rzutem punktu P na prostą l.

Przykład 4. Obliczyć odległość punktu $P_0 = (3, 4, 2)$ od prostej $l : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Znajdźmy równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (3, 4, 2)$ i prostopadłej do prostej l. W takim razie wektor normalny płaszczyzny będzie równoległy do wektora kierunkowego prostej, i możemy przyjąć $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v} = (1, 1, -3)$. Równanie płaszczyzny ma postać: $\pi : x + y - 3z - 1 = 0$. Niech punkt P' będzie rzutem prostokątnym punktu P na płaszczyznę π, a więc punktem przecięcia prostej i płaszczyzny. W takim razie punkt P' spełnia zarówno równanie prostej, jak i płaszczyzny. Otrzymujemy układ warunków: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 3 - 3t \\ x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$. Podstawiając trzy pierwsze do ostatniego dostajemy: $-2 + t + 1 + t - 3(3 - 3t) - 1 = 0$, skąd $t = 1$. Współrzędne punktu P' otrzymujemy podstawiając do równania prostej l: $P' = (-2 + 1, 1 + 1, 3 - 3) = (-1, 2, 0)$. Pozostaje znaleźć długość wektora $\overrightarrow{PP'}$, $d(P_0, l) = \|\overrightarrow{PP'}\| = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (2 - 4)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

Odległość płaszczyzn równoległych. Odległość płaszczyzn równoległych $\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$ i $\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$ określamy wzorem:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{\|D_1 - D_2\|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Odległość prostych równoległych. Odległość prostych równoległych l_1 i l_2 wyznaczamy jako długość wektora $\overrightarrow{P'P''}$, gdzie punkty P' i P'' są punktami przecięcia tych prostych z płaszczyzną prostopadłą do tych prostych.

Kąt między płaszczyznami. Kątem między płaszczyznami π_1 i π_2 nazywamy kąt ostry pomiędzy ich wektorami normalnymi $\overrightarrow{n_1}$ i $\overrightarrow{n_2}$:

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \arccos \frac{|\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_1}|}{\|\overrightarrow{n_1}\| \cdot \|\overrightarrow{n_2}\|}.$$

Kąt między prostymi. Kątem między prostymi l_1 i l_2 nazywamy kąt ostry pomiędzy ich wektorami kierunkowymi $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$:

$$\angle(l_1, l_2) = \arccos \frac{|\overrightarrow{v_1} \circ \overrightarrow{v_1}|}{\|\overrightarrow{v_1}\| \cdot \|\overrightarrow{v_2}\|}.$$

Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny. Kąt nachylenia prostej l o wektorze kierunkowym $\overrightarrow{v}$ do płaszczyzny π o wektorze normalnym $\overrightarrow{n}$ dany jest wzorem:

$$\angle(l, \pi) = \arcsin \frac{|\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{v}|}{\|\overrightarrow{n}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|}.$$