

1 Płaszczyzny i proste w \mathbb{R}^3 - ćwiczenia

Zadanie 1. Znaleźć równanie ogólne i parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez punkty $A = (1, 3, -1)$, $B = (2, 0, 4)$, $C = (3, 1, 0)$.

Zacznijmy od równania parametrycznego, do którego potrzebujemy punktu P_0 należącego do płaszczyzny i dwóch wektorów niewspółliniowych rozpinających płaszczyznę \vec{u} i \vec{v} (równoległe do płaszczyzny ale nie równoległe względem siebie). Wybierzmy punkt $P_0 = A = (1, 3, -1)$, a następnie skonstruujmy wektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, -3, 5)$ oraz $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2, -2, 1)$. Zapiszmy równanie parametryczne płaszczyzny:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + s + 2t \\ y = 3 - 3s - 2t \\ z = -1 + 5s + t \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Przejdźmy teraz do równania normalnego płaszczyzny, do którego potrzebujemy punktu P_0 należącego do płaszczyzny i wektora normalnego \vec{n} (prostopadłego do płaszczyzny). Podobnie jak wcześniej wybierzmy $P_0 = A = (1, 3, -1)$. Skoro wektory \vec{u} i \vec{v} rozpinają płaszczyznę, to wynik ich iloczynu wektorowego będzie wektorem prostopadłym do nich, a zarazem prostopadłym do naszej płaszczyzny. Możemy zatem przyjąć $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$. Obliczamy rozwijając wyznacznik względem pierwszego wiersza $\vec{u} \times \vec{v} = (1, -3, 5) \times (2, -2, 1) = \vec{i}(-10 + 3) - \vec{j}(10 - 1) + \vec{k}(-6 + 2) = -7\vec{i} - 9\vec{j} - 4\vec{k} = (-7, -9, -4) = \vec{n}$. W takim razie, równanie normalne płaszczyzny przyjmie postać:

$$\pi : -7(x - 1) - 9(y - 3) - 4(z + 1) = 0,$$

a stąd równanie ogólne przyjmie postać:

$$\pi : -7x - 9y - 4z + 30 = 0.$$

Zadanie 2. Znaleźć równanie kierunkowe i parametryczne prostej przechodzącej przez punkty $P = (1, 2, 3)$ i $Q = (3, 2, 1)$.

W obydwu przypadkach szukamy punktu p_0 należącego do prostej i wektora kierunkowego \vec{v} (równoległego) tej prostej. Skoro prosta przechodzi przez punkty P i Q , to jest równoległa do wektora \overrightarrow{PQ} , który ma współrzędne: $\overrightarrow{PQ} = (3, 2, 1) - (1, 2, 3) = (2, 0, -2)$. Możemy zatem przyjąć $\vec{v} = a\overrightarrow{PQ} = 1/2(2, 0, -2) = (1, 0, -1)$. Wybierzmy dodatkowo $P_0 = P = (1, 2, 3)$. Równanie kierunkowe prostej przyjmie postać:

$$l : \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{0} = \frac{z - 3}{-1}.$$

Uwaga. Zwróćmy uwagę na 0 w mianowniku. Równanie parametryczne przyjmie postać:

$$l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 3. Sprawdzić, czy punkt $A = (1, -2, 5)$ należy do prostej $l : \frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 2}{0} = \frac{z - 5}{-3}$.

Zapiszmy równanie parametryczne naszej prostej:

$$l : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 \\ z = 5 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Podstawiając do tego równania $t = 0$ otrzymujemy współrzędne punktu $A = (1, -2, 5)$, a zatem punkt P_0 należy do prostej l .

Zadanie 4. Sprawdzić, czy prosta $l : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$, jest zawarta w płaszczyźnie

$$\pi : 3x + 3y + z - 6 = 0.$$

Prosta będzie zawarta w płaszczyźnie, jeżeli będzie spełniała jej równanie, zatem podstawiamy równanie parametryczne prostej l do równania ogólnej płaszczyzny π : $3(1+t) + 3(-2t) + (3+3t) - 6 = 0 \Rightarrow 3 + 3t - 6t + 3 + 3t - 6 = 0 \Rightarrow 0 = 0$. Oznacza to, że równość zachodzi dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, a zatem prosta l jest zawarta w płaszczyźnie π .

Zadanie 5. Znaleźć odległość dwóch prostych równoległych $l_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ i

$$l_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-3}{2}.$$

Posłużymy się następującą metodą: wyznaczmy równanie płaszczyzny π prostopadłej do obydwu prostych, na przykład przechodzącej przez dowolny punkt P_1 na prostej l_1 . Następnie wyznaczmy punkt P_2 przecięcia tej płaszczyzny z prostą l_2 i na koniec obliczymy długość wektora $\overrightarrow{P_1P_2}$, która będzie równa odległości pomiędzy prostymi równoległymi. Wektor normalny płaszczyzny π jest równoległy do wektora kierunkowego \vec{v}_1 prostej l_1 (jak również do wektora kierunkowego \vec{v}_2 prostej l_2). Możemy zatem przyjąć $\vec{n} = \vec{v}_1 = (1, 2, -1)$, a za punkt P_0 płaszczyzny π przyjmujemy punkt P_1 prostej l_1 : $P_0 = (1, -1, 0)$. Równanie ogólne płaszczyzny otrzymamy z równania normalnego:

$$\pi : (x-1, y+1, z) \circ (1, 2, -1) = 0,$$

a stąd

$$\pi : x + 2y - z + 1 = 0.$$

Punkt P_2 , jest punktem przecięcia prostej l_2 z płaszczyzną π , a zatem musi spełniać zarówno równanie prostej, jak i płaszczyzny skąd dostajemy układ równań warunków:

$$\begin{cases} \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-3}{2} \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases},$$

który jest spełniony przez punkt $P_2 = (0, 1, 3)$. Szukaną odległość dostaniemy jako długość wektora $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$d(l_1, l_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \|(0, 1, 3) - (1, -1, 0)\| = \|(-1, 2, 3)\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Zadanie 6. Obliczyć miarę kąta między prostą $l : \frac{x+2}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ i

płaszczyzną $\pi : 2x - 3y - 5 = 0$. Zgodnie ze wzorem, miara kąta pomiędzy prostą o wektorze kierunkowym \vec{v} i płaszczyzną o wektorze normalnym \vec{n} wyraża się wzorem:

$$\angle(l, \pi) = \arcsin \frac{|\vec{n} \circ \vec{v}|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Podstawiając $\vec{v} = (-3, -2, 1)$ i $\vec{n} = (2, -3, 0)$ dostajemy:

$$\angle(l, \pi) = \arcsin \frac{|(2, -3, 0) \circ (-3, -2, 1)|}{\|(2, -3, 0)\| \cdot \|(-3, -2, 1)\|} = \arcsin \frac{-6 + 6 + 0}{\sqrt{4+9} \cdot \sqrt{9+4+1}} = \arcsin \frac{0}{\sqrt{182}} = \arcsin 0 = 0[\text{rad}].$$

Oznacz to, że prosta l i płaszczyzna π są równoległe.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Napisać równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (1, 3, -2)$ i przez oś Oy .

2. Obliczyć w jakim punkcie płaszczyzna π :
$$\begin{cases} x = -1 + 2s - t \\ y = 2 + 3s + 2t \\ z = -3 - s + t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R},$$
 przecina oś Ox .

3. Zbadać, czy proste $l_1 : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{3}$ i $l_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-4}$ mają punkt wspólny.

4. Wyznaczyć odległość punktu $P = (3, 6, -1)$ od płaszczyzny $\pi : x = 1 + s + 2t, y = 2s - t, z = t, s, t \in \mathbb{R}$.

5. Obliczyć kąt między prostymi $l_1 : x = 2t, y = 1 - t, z = t, t \in \mathbb{R}$ oraz $l_2 : x = 1 - 3s, y = 2 + s, z = -3, s \in \mathbb{R}$.

Odpowiedzi. 1. $2x + z = 0$; 2. $(-28/5, 0, 0)$; 3. Tak, $P = (-1, 1, 7)$. 4. $\sqrt{3/10}$ 5. $\arccos \frac{7}{\sqrt{70}}$;