

# Układy równań - metoda macierzy odwrotnej

**Zadanie 1.** Korzystając z macierzy odwrotnej rozwiązać układy równań:

$$(a) \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + 4y + z = 1 \end{cases}$$

**Uwaga:** Układy równań podane w zadaniu na poprzednich ćwiczeniach również można obliczyć metodą macierzy odwrotnej (polecam to zrobić).

**Rozwiązanie przykładu (a):**

Układ równań możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gdzie  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  oraz  $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Aby móc skorzystać z tej metody, wyznacznik macierzy  $A$  musi być różny od 0. Otrzymujemy  $|A| = -1 \neq 0$ . Widzimy, że  $AX = B$ . Z poprzednich ćwiczeń wiemy, że  $A^{-1}AX = A^{-1}B$ , stąd  $X = A^{-1}B$ . Zatem, aby wyznaczyć macierz  $X$ , wystarczy znaleźć macierz odwrotną do macierzy  $A$  i pomnożyć ją przez macierz wyrazów wolnych  $B$ . Metodą poznaną na poprzednich ćwiczeniach, znajdujemy

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$