Układy równań - wzory Cramera

Zadanie 1. Korzystając ze wzorów Cramera rozwiązać podane układy równań:

(a) $\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x + y + z = -1 \\ x + 2z = -6 \\ 3y + 2z = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + 4y + 2z = 2 \\ 4x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -1 \\ 3x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = -1 \\ -x + y - 2z = 1 \\ x - 3y + 4z = 1 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ -x + z = 1 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x + y + 2z = -5 \\ -3x + 2y - z = 10 \\ 2x - y - 3z = 5 \end{cases}$

Rozwiązanie przykładu (a):
Układ równań możemy zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$$

gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix}$.

Układ jest układem Cramera (proszę to sprawdzić!), zatem możemy skorzystać ze wzorów Cramera:

$$x = \frac{|A_1|}{|A|},\ y = \frac{|A_2|}{|A|},\ z = \frac{|A_3|}{|A|},$$

gdzie $|A|$ jest wyznacznikiem macierzy współczynników; $|A_1|$, $|A_2|$, $|A_3|$ są wyznacznikami powstałymi przez usunięcie kolumny współczynników stojących przy zmiennej x, y i z odpowiednio i zastąpienie jej, w każdym przypadku, kolumną wyrazów wolnych. Mamy

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 60 \neq 0,$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 180, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 60, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 60,$$

zatem

$$x = \frac{180}{60} = 3,\ y = \frac{60}{60} = 1,\ z = \frac{60}{60} = 1.$$

Rozwiązanie przykładu (d):

Zapisujemy układ w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Postępując jak w przykładzie (a) obliczamy poszczególne wyznaczniki:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -6, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -10,$$

zatem

$$x = \frac{-6}{6} = -1,\ y = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3},\ z = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3}.$$